数理解析研究所講究録
467巻 1982年 1-3



# Knots の Union の一般化

北大 理学部 酒井 健
(Ken Sakai)

Unknotting number 1 の knot が prime knot であるかどうかは、古くからの問題であるが、現在のところ、未解決である(筆者の知る範囲で)。この問題に対する一つのアプローチとして、2つの knots $K_1$, $K_2$ に対し、knots の集合 $K_1 +_n K_2$ (但し、$n$ は non-negative integer) を定義し、この集合に関するある命題が、上の問題と同値であることを示し、又、この命題に関連した結果を与える。これらについての、詳しい内容は、現在投稿中の論文中にある。

## 1. $K_1 +_n K_2$ の定義。

$K_1$ と $K_2$ を 3-sphere 内の knots として、2-sphere $S^2$ を decomposition sphere とする $K_1$ と $K_2$ の knot sum

$\overline{K}$ をつくる： $\overline{K} = K_1 \#_{S^2} K_2$。そこで、$\Gamma$ を、下の条件をみたす arc とする：

(1) $\Gamma \cap \overline{K} = \partial\Gamma \cap \overline{K} = \{a, b\} \subset \overline{K} - S^2$.

(2) $\Gamma$ と $S^2$ とは general position にあり、

$\#(\Gamma \cap S^2) = n$。

そこで、$a$ の十分近くの $\overline{K}$ の subarc を、$\Gamma$ にそって押してゆき、$b$ の近くの $\overline{K}$ の subarc に引っかけて $\overline{K}$ から得られる knot を $K_\Gamma$ とする。この時、

$$K_1 +_n K_2 = \{K_\Gamma \mid \Gamma \text{ は (1), (2) をみたす。}\}。$$

(但し、上の定義は若干のあいまいさがあるが、今の所あまり気にしないでよい。)

この時、次が成立する：

☆ 次の2つは同値：

(1) unknotting number 1 の knot は prime である。

(2) $\forall K_1, \forall K_2, \forall n$；但し、$K_1, K_2$ はともに non-trivial knot；に対し、$K_1 +_n K_2$ は trivial knot を含まない。//

2. 結果.

上の (2) に関連して、次のことがわかる：

定理 $\forall K_1, \forall K_2$ ; non-trivial knots に対し, $n \leqq 2$ ならば, $K_1 +_n K_2$ は trivial knot を含まない。//

$K_1 +_0 K_2$ については Schubert の結果の Coro. であり, $K_1 +_1 K_2$ については 樹下-寺阪 の結果である。筆者は $K_1 +_2 K_2$ が trivial knot を含むならば、$K_1 +_0 K_2$ 又は $K_1 +_1 K_2$ が trivial knot を含まなければならないことを示し、$n=2$ の場合の結果を得た。

補足: $n \geqq 3$ については不明であるが、とくに、$n=3$ の時は次が成立することが最近わかった:

定理': $K_1 +_3 K_2$ が trivial knot を含むならば $b(K_1) \leqq 2$ 又は $b(K_2) \leqq 2$, 但し $b(K_i)$ は $K_i$ の bridge number。//


[1] S. Kinoshita - H. Terasaka; Osaka Math. J. 9(1957), 131-153.

[2] H. Schubert; Sitz. Akad. Wiss. Heiderberg, math-nat. Kl. 3 Abh (1949).

[3] H. Terasaka; Osaka Math. J. 12(1960), 113-144.