数理解析研究所講究録
471巻 1982年 183-229

ヘドロソ空間の理論と応用

東工大　総合理工　　冨澤信明
(Nobuaki Tomizawa)

1. まえがき

1) "マトロイド" は線形独立・従属の概念の抽象化として1935年にWhitney[36]によって導入された概念で，基，独立集合，サーキット，階数関数，閉包関数等のいろいろな概念によって公理系が与えられる。[11],[34],[35]

2) "ポリマトロイド" はマトロイドの台集合の任意の部分集合に含まれる独立集合の「極大であることと最大であることが同値である」という性質を集合から非負ベクトルに，もしくは階数関数の値域を非負整数から非負実数に拡張したものとして1970年にEdmonds[1] によって導入された概念である。

3) "ハイパーマトロイド" はポリマトロイドの基ベクトルの非負性を除去してそれを任意のモジュラー関数に拡張し，もしくは階数関数の非減少性を除去して任意の劣モジュラー

関数に一般化した概念として1980年に冨澤により公理論的にとり扱われ，命名されたものである。[14],[17]

4）冨澤はマトロイドの自己双対な基公理[13]を任意のモジュラー関数の場合に一般化して，“基の交換公理”を確立し，ハイパーマトロイドの双対なる概念をはじめて明確にし，ハイパーマトロイドのいくつかの等価な公理系を与えた。そして基多面体（ヘドロン）の線形結合という概念に至達してそれを“超空間”又は“ヘドロン空間”と名づけた。[14]

5）藤重は台集合Eと2^E上の任意の劣モジュラー関数ρとの対(E, ρ)を“劣モジュラーシステム”と呼び，[6]ポリマトロイドと類似して，$\rho(\phi)=0$の場合に基多面体，独立多面体を定義した。そして同じ基多面体を決定する優モジュラー関数の存在や，基多面体を平行移動することによってポリマトロイドに変換できることを指摘した。[4],[5]

6）ハイパーマトロイドの基多面体とポリマトロイドのそれとの組合せ論的構造は全く同じであるけれども，劣モジュラーな階数ρの最大値はポリマトロイドでは$\rho(E)$で与えられるのに対し，必ずしも非減少ではないハイパーマトロイドの階数関数ではその最大値を求める手法は知られていないということにも象徴されるようにハイパーマトロイドにはポリマトロイドと同様の取扱いができない部分も少くない。

7) マトロイドやポリマトロイドの更に一般化された概念として4), 5)の理論を統一的にながめハイパーマトロイドを公理的に体系化し，マトロイドやポリマトロイドをその特殊なクラスとして認識することが妥当であることが明らかになって来た。こうしてマトロイドと整ポリマトロイドの中間に“準マトロイド”というマトロイドよりも基本的な概念が存在することを分かって来たのである。

2. 優/劣モジュラー関数とモジュラー関数

$8^{\pm}$) Eを有限集合とする($|E|=m$)。集合関数$\sigma: 2^E \to R$が

$$\sigma(\phi)=0$$

を満たすときσは“正規化”されているといい，

$$\sigma(X) \lesseqgtr \sigma(Y) \quad (X \subseteqq Y)$$

を満たすとき“非減少/非増加”といい，

$$\sigma(X)+\sigma(Y) \gtreqless \sigma(X \cup Y)+\sigma(X \cap Y)$$

を満たすとき“優/劣モジュラー関数”という(複号同順)。2^E上の優/劣モジュラー関数の全体を$\mathcal{S}_\pm(E)$で表わす。$\mathcal{S}_\pm(E)$はR^{2^E}上の凸多面錐である。

9) 優モジュラーかつ劣モジュラーな関数を“モジュラー関数”と呼ぶ。2^E上のモジュラー関数の全体を$\mathcal{S}_0(E) \equiv \mathcal{S}_+(E) \cap \mathcal{S}_-(E)$で表わす。$\mathcal{S}_0(E)$は$R^{2^E}$上の階数$m+1$のベクト

ル部分空間である。

10) モジュラー関数$\xi \in \gamma_0(E)$に対して，一意に決まるベクトル

$$\acute{\xi} \equiv \bigoplus_{i \in E} \{ \xi(\{i\}) - \xi(\phi) \} \in R^E$$

をξの"固有ベクトル"と呼び，$\xi(\phi)$をξの"固有値"と呼ぶ。$\xi(\phi)=0$のときには$\xi \in \gamma_0(E)$と$\acute{\xi} \in R^E$とは自明な一対一対応をし，同一視できる。

11$^{\pm}$) $\xi \in \gamma_0(E)$に対して

$$\begin{aligned} car^{\pm}\,\xi &= \{ i \mid \xi(\{i\}) \gtrless \xi(\phi) \}, \\ \|\xi\|^{\pm} &= \xi(\phi) + \sum_{i \in car^{\pm}\xi} \{ \xi(\{i\}) - \xi(\phi) \}, \\ \|\xi\| &= \|\xi\|^{+} - \|\xi\|^{-} \end{aligned}$$

と定義する。ここで$\|\xi\|$をξの"ノルム"と呼ぶ。$\|\xi\|$は固有値$\xi(\phi)$の値によらず，ベクトル$\acute{\xi}$の絶対値ノルムに他ならない。

12) $$\mu^J(X) = \begin{cases} 1 & (J \subseteqq X \text{ のとき}) \\ 0 & (J \nsubseteq X \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定義される関数μ^J ($J \in 2^E$) を"単位優モジュラー関数"と呼ぶ。

13) $\mu^\phi(X)=1$ ($\forall X \subseteqq E$) である関数μ^ϕを特に"単位定数関数"と呼ぶ。μ^ϕは実数1と同一視される。また関数$\mu^i \equiv \mu^{\{i\}}$ ($i \in E$)を特に"単位モジュラー関数"と呼ぶ。μ^iは"単位ベ

クトル”に相当する概念である。

14$^{\pm}$) $\sigma_\pm \in \gamma_\pm(E)$ に対して $\sigma_\pm(\phi)$ をその“固有値”と呼び，その“上限ベクトル” $\grave{\sigma}_\pm$，“下限ベクトル” $\acute{\sigma}_\pm$ を

$$\acute{\sigma}_+/\grave{\sigma}_- = \bigoplus_{i\in E}(\sigma_\pm(\{i\})-\sigma_\pm(\phi))\in R^E,$$

$$\grave{\sigma}_+/\acute{\sigma}_- = \bigoplus_{i\in E}(\sigma_\pm(E)-\sigma_\pm(E-\{i\}))\in R^E$$

によって定義する。

15$^{\pm}$) $\sigma_\pm$ の“上限モジュラー関数” $\hat{\sigma}_\pm$，“下限モジュラー関数” $\check{\sigma}_\pm$ を

$$\hat{\sigma}_\pm(X)=\sigma_\pm(\phi)+\sum_{i\in X}\grave{\sigma}_\pm(i)\quad(X\subseteqq E),$$

$$\check{\sigma}_\pm(X)=\sigma_\pm(\phi)+\sum_{i\in X}\acute{\sigma}_\pm(i)\quad(X\subseteqq E)$$

によって定義する。ここで

$$\hat{\sigma}_\pm=-(-\check{\sigma}_\pm),\quad \check{\sigma}_\pm=-(-\hat{\sigma}_\pm)$$

なる関係がある。

16$^{\pm}$) $\sigma_\pm^\circ=\hat{\sigma}_\pm-\check{\sigma}_\pm\quad(\geqq 0)$

を $\sigma_\pm\in\gamma_\pm(E)$ の“振巾”と呼ぶ。このとき

$$\sigma_\pm\in\gamma_\circ(E)\iff\sigma_\pm^\circ=0.$$

17$^{\pm}$) $\sigma_\pm\in\gamma_\pm(E)$に対して“♯－双対”，“♭－双対”，“♮－双対”をそれぞれ

$$\sigma_\pm^\sharp(X)=-\sigma_\pm(\bar{X})+\sigma_\pm(E)+\sigma_\pm(\phi)\in\gamma_\mp(E),$$

$$\sigma_\pm^\flat=\sigma_\pm^\circ-\sigma_\pm\in\gamma_\mp(E),$$

$$\sigma_\pm^\natural=(\sigma_\pm^\flat)^\sharp\in\gamma_\pm(E)$$

によって定義する。

18±) 定理. $(\sigma_\pm{}^\#)^\# = (\sigma_\pm{}^\flat)^\flat = (\sigma_\pm{}^\natural)^\natural = \sigma_\pm$,

$$(\sigma_\pm{}^\#)^\natural = (\sigma_\pm{}^\natural)^\# = \sigma_\pm{}^\flat,$$

$$(\sigma^\flat)^\natural = (\sigma^\natural)^\flat = \sigma_\pm{}^\#,$$

$$(\sigma^\flat)^\# = (\sigma^\#)^\flat = \sigma_\pm{}^\natural.$$

19) 一般に集合関数σのTからの"切断"$\sigma_\downarrow^T$, Sからの"射影"$\sigma_S^\uparrow$, "区間"σ_S^Tをそれぞれ

$$\sigma_\downarrow^T(X)=\sigma(X)\ (X\subseteqq T),$$

$$\sigma_S^\uparrow(X)=\sigma(S\cup X)-\sigma(S)\ (X\subseteqq E-S),$$

$$\sigma_S^T=(\sigma_\downarrow^T)_S^\uparrow\ (S\subseteqq T)$$

によって定義する。

20±) 定理. 優/劣モジュラー関数$\sigma_\pm\in\gamma_\pm(E)$は

$$\sigma_\pm=\sigma_\pm(\phi)\mu^\phi+(\check{\sigma}_\pm-\sigma_\pm(\phi)\mu^\phi)+(\sigma_\pm-\check{\sigma}_\pm)$$

と一意に分解される。

21±) $\sigma_\pm^{(0)}\equiv\sigma_\pm(\phi)\mu^\phi$ を$\sigma_\pm$の0次(定数)部分, $\sigma_\pm^{(1)}\equiv\check{\sigma}_\pm-\sigma_\pm(\phi)\mu^\phi$ を1次部分と呼ぶ。$\check{\sigma}_\pm\equiv\sigma_\pm^{(0)}+\sigma_\pm^{(1)}$を"モジュラー部分", $\tilde{\sigma}_\pm\equiv\sigma_\pm-\check{\sigma}_\pm$を"固有な"優/劣モジュラー関数と呼ぶ。$2^E$上の固有な優/劣モジュラー関数の全体を$\tilde{\gamma}_\pm(E)$で表わす

22) "単位劣モジュラー関数"を$\lambda^J=(\mu^J)^\#$によって定義する。

$$\lambda^J(X)=\begin{cases}1 & (J=\phi\ \text{又は}\ J\cap X\neq\phi\ \text{のとき})\\ 0 & (\text{その他のとき}).\end{cases}$$

3. ハイパーマトロイドの公理系

23) 有限集合E上の"ハイパーマトロイド" $\mathfrak{M}=(E,\cdot)$ は次の24)～27±)のような互に等価な種々の概念によって定義される。

24) 基公理. $\mathfrak{M}=(E,\mathcal{B})$：

コンパクトな凸集合 $\mathcal{B}\subseteqq\gamma_0(E)$ に対して, $\xi,\xi'\in\mathcal{B},\xi\neq\xi'$
$\Rightarrow {}^{\exists}i\in car^{-}(\xi-\xi'),\ {}^{\exists}j\in car^{+}(\xi-\xi'),\ {}^{\exists}c\in R_{+}$：
$\xi+c(\mu^{i}-\mu^{j})\in\mathcal{B},\ \xi'+c(\mu^{j}-\mu^{i})\in\mathcal{B}.$

$\mathcal{B}$ を"基多面体"又は"ヘドロン", $\xi\in\mathcal{B}$ を"基"と呼ぶ。[14]

25±) 支配／独立公理. $\mathfrak{M}=(E,\mathcal{I}_{\pm})$：

下／上に有界な凸閉集合 $\mathcal{I}_{\pm}\subseteqq\gamma_0(E)$ に対し

〈$\mathcal{I}_{\pm}0$〉 $\xi,\eta\in\mathcal{I}_{\pm}\Rightarrow\eta(\phi)=\xi(\phi)$（$\equiv\xi_0$ を固有値と呼ぶ）,

〈$\mathcal{I}_{\pm}1$〉 $\xi\in\mathcal{I}_{\pm},\ \eta\gtreqless\xi,\ \eta(\phi)=\xi(\phi)\Rightarrow\eta\in\mathcal{I}_{\pm}$,

〈$\mathcal{I}_{\pm}2$〉 $\omega\in\gamma_0(E)\,(\omega(\phi)=\xi_0)$ に対して $\xi\lesseqgtr\omega$ なる極小／極大モジュラー関数 $\xi\in\mathcal{I}_{\pm}$ は全て同じノルム $\|\xi\|$ をもつ。

26±) 不足度／階数公理. $\mathfrak{M}=(E,\sigma_{\pm})$：

不足度／階数関数 $\sigma_{\pm}:2^{E}\to R$ は優／劣モジュラー関数である。すなわち

$$\sigma_{\pm}(X)+\sigma_{\pm}(Y)\lesseqgtr\sigma_{\pm}(X\cup Y)+\sigma_{\pm}(X\cap Y).$$

この"優／劣モジュラー不等式"は $i,j\in X,\ i\neq j$ に対して
$\sigma_{\pm ij}(X)\equiv(\sigma_{\pm}(X\cup\{i,j\})-\sigma_{\pm}(X\cup\{i\}))-(\sigma_{\pm}(X\cup\{j\})-\sigma_{\pm}(X))$

とおくとき，

$$\sigma_{\pm ij}(X) \gtreqless 0 \quad (i, j \notin X \subseteq E,\ i \neq j)$$

とも書ける。[14]

27$^{\pm}$) 相関／逆相関公理． $\mathcal{M} = (E, \tau^{\pm})$：

相関／逆相関関数 $\tau^{\pm}: 2^E \to R$ は

$$\sum_{\{i,j\} \subseteq T \subseteq S \cup \{i,j\}} \tau^{\pm}(T) \gtreqless 0 \quad (\forall \{i,j\} \in \binom{E}{2},\ i, j \notin \forall S \subseteq E)$$

なる関係をみたす。[25]

$\tau^{\pm}$ は“特性／表現関数”とも呼ばれる。

28) 24)～27$^{\pm}$)の各公理系は次の関係により互に等価であることが示される。

29$^{\pm}$) 定理．基公理 ⟺ 支配／独立公理．

$\mathcal{L}$ =「$\mathcal{I}_{\pm}$の極小／極大モジュラー関数の族」

$$\mathcal{I}_{\pm} = \{\eta \mid \eta \gtreqless \xi,\ \xi \in \mathcal{L},\ \eta(\phi) = \xi(\phi),\ \eta \in \gamma_0(E)\}$$

30$^{\pm}$) 定理．基公理 ⟺ 不足度／階数公理．

$$\mathcal{L} = \{\xi \mid \xi \gtreqless \sigma_{\pm},\ \xi(E) = \sigma_{\pm}(E),\ \xi(\phi) = \sigma_{\pm}(\phi),\ \xi \in \gamma_0(E)\},$$

$$\sigma_{\pm}(X) = \begin{smallmatrix}\min\\ \max\end{smallmatrix} \{\xi(X) \mid \xi \in \mathcal{L}\} \quad (X \subseteq E).$$

31$^{\pm}$) 定理．不足度／階数公理 ⟺ 相関／逆相関公理．

$\tau^{\pm} = \sigma_{\pm}^{\nabla}$（$\sigma_{\pm}$ の Möbius 反転），

$\sigma_{\pm} = \tau^{\pm\,\Delta}$（$\tau^{\pm}$ の Riemann 反転）．

すなわち，$\tau^{\pm}$ と $\sigma_{\pm}$ は次の関係をみたす。

$$\tau^{\pm}(T) = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T|-|S|} \sigma_{\pm}(S),$$

$$\sigma_\pm(S) = \sum_{T\subseteq S} \tau^\pm(T).$$

32$^\pm$) 定理. ハイパーマトロイド$\mathfrak{M}$の階数／不足度関数は$\mathfrak{M}$の不足度／階数関数の#－双対である：

$$\sigma_\pm^{\#} = \sigma_\mp .$$

33) 不足度／階数関数$\sigma_\pm \in \gamma_\pm(E)$は相関$\tau^+(J)$,逆相関$\tau^-(J)$を用いて$\mu^J$, λ^Jに関して次のように"Taylor展開"される。[25]

$$\sigma_\pm = \sum_{J\subseteq E} \tau^\pm(J)\mu^J = \sum_{J\subseteq E} \tau^\mp(J)\lambda^J .$$

このことからτ^+を相関関数と呼び，τ^-を逆相関関数と呼んだ意味が理解されよう。

4. ヘドロンと可換性行列

34) $\xi \in \mathcal{L}$に関する$m\times m$行列$\varepsilon(\xi)$: $E\times E \to R_+$を

$$\varepsilon_{ij}(\xi) = \max\{c \mid \xi + c(\mu^i - \mu^j) \in \mathcal{L}\} \quad (\xi \in \mathcal{L})$$

によって定義し，基ξに関する"可換性行列(exchangeability matrix)"と呼ぶ。

35$^\pm$) 定理. ヘドロン$\mathcal{L}$の不足度／階数関数を$\sigma_\pm$とすれば

$$\varepsilon_{ij}(\xi) = \min\{\xi(X) - \sigma_+(X) \mid j \in X \subseteq E - \{i\}\}$$
$$/ \min\{\sigma_-(X) - \xi(X) \mid i \in X \subseteq E - \{j\}\}$$

なる関係が成立する。

36) 定理. 可換性行列は"推移的"である，すなわち

$$\varepsilon_{ij}(\xi) > 0,\ \varepsilon_{jk}(\xi) > 0 \Rightarrow \varepsilon_{ik}(\xi) > 0 .$$

37) 定理．$Q(\subseteqq R)$ を実加群Rの部分加群（例えば整数加群の場合が特に重要）とする。このとき，34) より不足度／階数関数及び基の値域がQ，すなわち $\sigma_\pm : 2^E \to Q$，$\xi : 2^E \to Q$ ならば $\varepsilon_{ij}(\xi) \in Q$ となる。

38) ヘドロンはコンパクトな凸多面体に関するKrein & Milmanの定理よりその有限個の端点集合 $\dot{\mathfrak{S}}$ によって決まる。$\dot{\mathfrak{S}}$ はその不足度／階数関数を用いて次のようにして求めることができる。

39$^\pm$) 算法．ブール束 2^E 上の $m!$ 個の組成鎖を

$$C : (\phi =) E_0 \subsetneqq E_1 \subsetneqq E_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq E_m (= E)$$

とし，Cにおいて元 $i \in E$ が現われる順番を π_i とすれば

$$\{i\} = E_{\pi_i} - E_{\pi_i - 1}$$

と書ける。そこで

$$\xi(X) = \sigma_\pm(\phi) + \sum_{i \in X} \{\sigma_\pm(E_{\pi_i}) - \sigma_\pm(E_{\pi_i - 1})\}$$

によって $\xi \in \mathfrak{S}$ を決めれば $\xi \in \dot{\mathfrak{S}}$ である。

40$^\pm$) ベクトル $\lambda \in R^E$ が与えられたとき基 $\xi \in \mathfrak{S}$ に関して

$$\lambda[\xi] = \sum_{i \in E} \lambda(i)[\xi(\{i\}) - \xi(\phi)]$$

を ξ の λ に関する“長さ（length）”と呼び，$\xi \in \mathfrak{S}$ の中で $\lambda[\xi]$ が最小／最大となる基を λ に関する“最短基／最長基”と呼ぶ。最短基／最長基は次の41$^\pm$) によって求めることができる。

41$^{\pm}$) greedy 算法. $\lambda(i)$を大きい順にならべたときの$i\in E$の順番をπ_iとし，算法39$^{\pm}$)における組成鎖$\mathcal{C}$を

$$E_{\pi_i}=E_{\pi_i-1}\cup\{i\}\quad(i\in E)$$

によって決める。このとき算法39$^{\pm}$)によって求められる端点基$\xi\in\dot{\mathcal{L}}$が求める最短基／最長基である。

42$^{\pm}$) 定理. QをRの部分加群とするとき，ヘドロン$\mathcal{L}$の不足度／階数関数$\sigma_\pm$の値域がQ，すなわち$\sigma_\pm:2^E\to Q$ならば，端点基$\xi\in\dot{\mathcal{L}}$に関して

$$\xi\in\dot{\mathcal{L}}\Rightarrow\xi_i\equiv\xi(\{i\})-\xi(\phi)\in Q.$$

43) 定理. 端点基$\xi\in\dot{\mathcal{L}}$に関する可換性行列$\mathcal{E}(\xi)$は“反対称的”であり逆も真である。

$$\xi\in\dot{\mathcal{L}}\iff\text{「}\mathcal{E}_{ij}(\xi)>0\Rightarrow\mathcal{E}_{ji}(\xi)=0\text{」。}$$ [23]

44) 可換性行列$\mathcal{E}(\xi)$が“反射的”であることは明らかだから36), 43)より$\xi\in\dot{\mathcal{L}}$ならば$\mathcal{E}(\xi)$（の正要素）は半順序関係を表現していることになる。したがって$\mathcal{E}(\xi)$によってEの上に半順序構造が導入される。一般に任意の基ξに関しても$\mathcal{E}(\xi)$の（正要素の）2項関係の推移的閉包をとることによって同値類（強連結成分）とその間の半順序関係を導入することができる。

45) $\xi\in\dot{\mathcal{L}}$のとき可換性行列$\mathcal{E}(\xi)$の各行各列はマトロイドにおける基に関する基本サーキット／コサーキットに相当

する概念であり，これによってハイパーマトロイドの“サーキット／コサーキット”が定義できる。この意味において $\mathcal{E}(\xi)$ を端点基 $\xi(\in\dot{\mathcal{L}})$ に関する“基本サーキット行列”とも呼ぶことができる。

46$^{\pm}$) 定理．ヘドロン $\mathcal{L}$ の不足度／階数関数を $\sigma_{\pm}$ とするとき

$$\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\ \sigma_{\pm}(X)=\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\{\|\xi\|^{\pm}\mid\xi\in\mathcal{L}\}\ (\gtreqless 0)$$

が成立する。これを“最大不足度＝最小剰余定理／最小階数＝最大不足定理”と呼ぶ。

5. ヘドロン空間

47) 定理．基の交換公理24)が自己双対な形をしていることから $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{V}_0(E)$ がヘドロンならば

$$-\mathcal{L}=\{-\xi\mid\xi\in\mathcal{L}\}$$

もヘドロンとなり，$\mathcal{L}$ の“反転(inverse)”と呼ばれる。

48) “ヘドロン空間”又は“超空間” $\mathcal{H}(E)$ は $\mathcal{V}_0(E)$ における全てのヘドロンの線形空間であって，その“和”は

$$\mathcal{L}+\mathcal{L}'=\{\xi+\xi'\mid\xi\in\mathcal{L},\ \xi'\in\mathcal{L}'\},$$

“スカラー倍”は

$$c\mathcal{L}=\{c\xi\mid\xi\in\mathcal{L}\}\quad(c\in R)$$

で定義される。明らかに

$$\mathcal{V}_0(E)\subseteq\mathcal{H}(E)$$

であって，ヘドロン空間はベクトル空間の自然な一般化になっている。

49$^{\pm}$) 定理. $\mathcal{L}^{(k)} \in \mathcal{H}(E)$, $c^{(k)} \in R$ $(k=1,\cdots,p)$ に対して，$\mathcal{L}^{(k)}$ の不足度／階数関数を $\sigma_{\pm}{}^{(k)}$ とすれば，

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{p} c^{(k)} \mathcal{L}^{(k)} \in \mathcal{H}(E)$$

の不足度／階数関数 $\sigma_{\pm}$ は

$$\sigma_{\pm} = \sum_{c^{(k)}>0} c^{(k)} \sigma_{\pm}{}^{(k)} + \sum_{c^{(\ell)}<0} c^{(\ell)} \sigma_{\mp}{}^{(\ell)}$$

で与えられる。[14]

50) 全ての $X \in 2^E$ に対して 0 をとる関数を 0 で表わし，"零関数" と呼ぶ。零関数 $0 \in \gamma_0(E)$ を基に持つヘドロンの全体を $\mathcal{H}_0(E)$ で表わす。

51) $\mathcal{H}_0(E)$ のヘドロン $\mathcal{L}$ はその不足度関数 σ_+ と階数関数 σ_- によって決まるユークリッド空間 R^E 内の平行 $2(2^{m-1}-1)$ 面体：

$$\acute{\mathcal{L}} = \{x \mid \sigma_+(X) \leqq \sum_{i\in X} x(i) \leqq \sigma_-(X),\ \sum_{i\in E} x(i) = 0,\ x \in R^E\}$$

と同一視される。一般に $\mathcal{H}(E)$ は $\mathcal{H}_0(E)$ と実平面 $R^2 (= R^{\{\phi, E\}})$ との直積である。すなわち，

$$\mathcal{H}(E) \cong \mathcal{H}_0(E) \times R^2.$$

52) 同じ固有値を持つ２つのヘドロン $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \in \mathcal{H}(E)$ に対してその間の "距離(distance)" を

$$\|\mathcal{L} - \mathcal{L}'\| = \min\{\|\xi - \xi'\| \mid \xi \in \mathcal{L}, \xi' \in \mathcal{L}'\} \quad (\xi(\phi) = \xi'(\phi))$$

で定義する。

53) 52)において$\mathcal{B}$と$\mathcal{B}'$の距離を与える基の対ξ, ξ'を$\mathcal{B}$と$\mathcal{B}'$の"最近接基対(nearest pair of bases)"と呼ぶ。

54) 定理. 距離$\|\mathcal{B}-\mathcal{B}'\|$は$46^+$)と$49^+$)により次のようにも表現できる。

$$\|\mathcal{B}-\mathcal{B}'\| = 2\min\{\|\xi-\xi'\|^+ \mid \xi\in\mathcal{B}, \xi'\in\mathcal{B}'\} - \{\xi(E)-\xi'(E)\}$$
$$= 2\max\{\sigma_+(X)-\sigma'_-(X) \mid X\subseteq E\} - \{\sigma_+(E)-\sigma'_-(E)\}.$$

(ここでσ_+は$\mathcal{B}$の不足度関数，σ'_-は$\mathcal{B}'$の階数関数である)

55) ヘドロン空間$\mathcal{H}(E)$は$\|\mathcal{B}-\mathcal{B}'\|$によって距離が与えられた"擬距離空間"とみなすことができる。(通常の凸体の間の距離を与えて"距離空間"とみなすこともできるが，絶対値ノルム$\|\cdot\|$を用いる方が何かと便利である)

6. ポリマトロイド，整ポリマトロイド

$56^{\pm}$) ハイパーマトロイド$\mathcal{M}=(E,\mathcal{B})$の不足度／階数関数を$\sigma_\pm$とするとき，$\sigma_\pm$が正規化かつ非減少のとき，すなわち

$$\sigma_\pm(\phi)=0,\quad \sigma_\pm(X)\leqq\sigma_\pm(Y)\ (X\subseteqq Y)$$

ならば$\mathcal{M}$は"ポリマトロイド"と呼ばれる。[1]

$57^{\pm}$) 定理. $\sigma_\pm$が優／劣モジュラー関数のとき，$\sigma_\pm$の下限ベクトルが非負であることと$\sigma_\pm$が非減少であることは同値である：

「$\check{\sigma}_\pm \geqq 0 \Leftrightarrow \sigma_\pm(X) \leqq \sigma_\pm(Y)\ (X \subseteq Y)$」$(\sigma_\pm \in \gamma_\pm(E))$.

$58^\pm$) ハイパーマトロイド$\mathfrak{M}=(E,\mathfrak{L})$において

$$\xi \in \mathfrak{L} \Rightarrow \xi(\phi)=0,\quad \xi \gtreqless 0$$

のとき，$\mathfrak{M}$は"正/負ハイパーマトロイド"と呼ばれる。一方

$$\xi \in \mathfrak{L} \Rightarrow \xi(\phi)=0,$$

かつ$\xi \gtreqless 0$となる基$\xi \in \mathfrak{L}$が少くとも1つ存在するとき$\mathfrak{M}$は"準正/準負ハイパーマトロイド"と呼ばれる。

59) 定理. ポリマトロイドは正ハイパーマトロイドである。

60) ハイパーマトロイド$\mathfrak{M}=(E,\sigma_\pm)$において，下限モジュラー関数が零関数，すなわち，

$$\check{\sigma}_\pm = 0$$

のとき，$\mathfrak{M}$を"固有なハイパーマトロイド"と呼ぶ。

61) 定理. 固有なハイパーマトロイドはポリマトロイドである。

62) ハイパーマトロイド$\mathfrak{M}=(E,\sigma_\pm)$において全ての元$i$に対して

$$\sigma_\pm(\{i\})+\sigma_\pm(E-\{i\})=\sigma_\pm(E)+\sigma_\pm(\phi)\quad(i\in E)$$

となっているとき，$\mathfrak{M}$を"完全可分"と呼ぶ。これは$\sigma_\pm$がモジュラー関数であることと同値である。

63) 26^-)と57^-)よりポリマトロイドの"独立な"階数公理系を次の64)のように述べることができる。

64) 公理. ポリマトロイド $\mathcal{M}=(E,\rho)$ の階数 $\rho: 2^E \to R$ は次の関係をみたす。[14]

〈ρ0〉 $\rho(\phi)=0$,

〈ρ1〉 $\rho(E) \geqq \rho(E-\{i\}) \quad (i \in E)$,

〈ρ2〉 $\rho_{ij}(X) \equiv \rho(X)+\rho(X\cup\{i,j\})-\rho(X\cup\{i\})-\rho(X\cup\{j\}) \leqq 0$

$(i, j \notin X,\ i \neq j)$.

この公理系は Edmonds の公理系[1] よりも簡単である。

65) ポリマトロイド $\mathcal{M}$ の階数関数を ρ とする。このとき, $D: 2^E \times 2^E \to R$ を

$$D(X,Y) \equiv 2\rho(X\cup Y)-\rho(X)-\rho(Y)$$

によって定義する. 一方 $\Delta: 2^E \times 2^E \times 2^E \to R$ を

$$\Delta(X,Y,Z)=\frac{1}{2}\{D(X,Y)+D(Y,Z)-D(X,Z)\}$$

によって定義する。

66) 定理. ρ がポリマトロイドの階数関数ならば, すなわち非減少, 劣モジュラー関数ならば

〈0〉 $D(X,X)=0$,

〈1〉 $D(X,Y)=D(Y,X) \geqq 0$,

〈2〉 $\Delta(X,Y,Z) \geqq 0$,

すなわち $D(\cdot,\cdot)$ は 2^E 上の擬距離である。[23]

67) 公理. ポリマトロイド $\mathcal{M}$ は 2^E 上の擬距離 $D: 2^E \times 2^E \to R$ を用いて次のように定義される。

〈D0〉Dはブール束2^E上の擬距離である，

〈D1〉$\Delta(X,Y,Z)=0\quad(X\subseteqq Y\subseteqq Z)$，

〈D2〉$\Delta(X,X\cup Y,Y)=0$．

68）一般にハイパーマトロイド$\mathfrak{M}=(E,\mathcal{L})$の不足度/階数関数$\sigma_\pm$の値域が整数加群$\mathbb{Z}$，すなわち$\sigma_\pm:2^E\to\mathbb{Z}$のとき$\mathfrak{M}$を“整ハイパーマトロイド”と呼び，$\mathfrak{M}$がポリマトロイドのときには“整ポリマトロイド”と呼ぶ。

69）ヘドロン$\mathcal{L}$に含まれる格子点の全体を$\mathring{\mathcal{L}}$で表わし，その凸胞を$[\mathring{\mathcal{L}}]$で表わす。

70）定理．ハイパーマトロイド$\mathfrak{M}=(E,\mathcal{L})$が整ハイパーマトロイドであるための必要十分条件は

$$\mathring{\mathcal{L}}\subseteqq\mathring{\mathcal{L}}$$

となることである。

71）70）において$[\mathring{\mathcal{L}}]=\mathcal{L}$となることに注意しよう。整ハイパーマトロイドにおいては$\xi\in\mathring{\mathcal{L}}$に対して$\varepsilon(\xi)$は非負整数値行列であり，基の交換公理24）は$\mathcal{L}$を$\mathring{\mathcal{L}}$に制限しても成立する。（このときcも自然数に制限する。）

72）定理54）は$\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$がともにポリマトロイドのヘドロンである場合にはEdmonds[1]による2つのポリマトロイドの“最大共通独立ベクトル”を求める問題，すなわち

$$\max\{\|\xi\wedge\xi'\|\mid\xi\in\mathcal{L},\ \xi'\in\mathcal{L}'\}$$

$$= \min\{\sigma_-(X) + \sigma'_-(\bar{X}) \mid X \subseteq E\}$$

を求める問題と等価である。(ここで σ_- は $\mathcal{S}$ の階数関数，σ'_- は $\mathcal{S}'$ の階数関数である。)

7. マトロイドと準マトロイド

73) マトロイド $\mathcal{M} = (E, \rho)$ は階数関数 ρ が

$$\rho(X) \leqq |X|$$

となるような整ポリマトロイドである。

74) 定理. 73) の条件は $\dot{\rho} \leqq 1$，すなわち

$$\rho(\{i\}) \leqq 1 \quad (i \in E)$$

と同値である。

75) 完全可分なマトロイドは"自己閉路"と"橋"のみからなるマトロイドに他ならない。

76) 定理. マトロイドは固有なマトロイドと完全可分なマトロイドとの直和である。

77) 整ポリマトロイド $\mathcal{M} = (E, \rho)$ で階数関数 ρ が

$$\rho_{ij}(X) \equiv \rho(X) + \rho(X \cup \{i,j\}) - \rho(X \cup \{i\}) - \rho(X \cup \{j\}) = 0, -1$$

を満たすとき $\mathcal{M}$ を"準マトロイド(quasimatroid)"と呼ぶ。

78) 固有な準マトロイドと完全可分なマトロイドとの直和であるような準マトロイドを特に"原子的(primitive)"な準マトロイドと呼ぶ。

79) マトロイドは原始的（準マトロイド）である。

80) 準マトロイドのヘドロンはその稜の長さ，すなわち隣接する端点ξ, ξ'の距離$\|\xi-\xi'\|$がすべて2であるような特別な平行$2(2^{m-1}-1)$面体である。

81) 固有な準マトロイド$\mathcal{M}=(E,\rho)$は2^Eの"2－区間"の集合

$$Z=\{[X, X\cup\{i,j\}] \mid \rho_{ij}(X)=-1\}$$

が極小であるとき"初等的(elementary)"であるという。

82) 定理．初等的かつ固有な準マトロイドの階数関数は固有な劣モジュラー関数の全体からなる凸多面錐$\tilde{\gamma}_-(E)$の端点(extreme ray)である。[15]

83) マトロイド$\mathcal{M}$が唯一つの"非可分なマトロイド"と"退化マトロイド"（≡零関数を階数関数に持つハイパーマトロイド）の直和であるとき，"弱非可分"と呼ぶ。

84) 弱非可分な完全可分マトロイドは単位ベクトルに対応した"単位マトロイド"(E,μ^i)に他ならない。

85) 初等的である固有な準マトロイドと単位マトロイドとを合わせた概念を"初等的準マトロイド"と呼ぶ。

86) 定理．E上のポリマトロイド$\mathcal{M}=(E,\rho)$の階数関数ρの全体がなす凸多面錐$\gamma_-^+(E)$の端点は初等的準マトロイドの階数関数である。したがってポリマトロイドの階数関数ρ

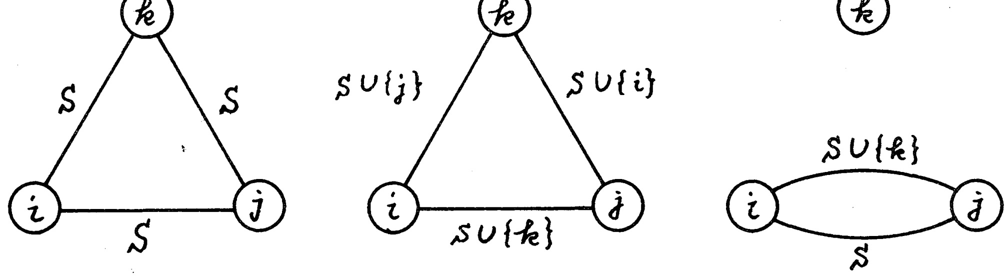
は初等的準マトロイドの階数関数の非負一次結合で書ける。[15],[20]

87) 定理. E上の劣モジュラー関数全体のなす凸多面錐$\mathcal{K}$(E)の端点集合は分解定理20)より初等的準マトロイドの階数関数に$-\rho^i$ ($i \in E$)と$\pm\rho^\phi$を添加したものである。[15],[20]

88) 定理. マトロイド$\mathfrak{M}$が初等的(準マトロイド)であるための必要十分条件は$\mathfrak{M}$が弱非可分であることである。[15]

89) $\mathfrak{M}$を固有な準マトロイドとするとき"集合枝グラフ"$\mathcal{G}(\mathfrak{M}) = (E, U)$を次のように定義する。$\mathcal{G}(\mathfrak{M})$の点集合は$\mathfrak{M}$の台集合Eとする。枝集合Uは$\rho_{ij}(X) = -1$ ($i \neq j$, $i, j \notin X$)のとき点iと点jを結ぶ無向枝$\{i, j\}$をもうけ, その枝に集合の番号Xを付与する(この枝を"集合枝"と呼ぶ)。このようにして作られるグラフ$\mathcal{G}(\mathfrak{M})$を$\mathfrak{M}$の"集合枝グラフ表現"と呼ぶ。

90) 公理. 固有な準マトロイドの集合枝グラフ表現を$\mathcal{G}(\mathfrak{M})$とする。相異なる任意の3点$i, j, k \in E$とそれらを結ぶ集合枝だけからなる$\mathcal{G}(\mathfrak{M})$の部分三角形集合枝グラフは次の三つの型の"基本三角形集合枝グラフ"の直和となる。[20]



91) <u>公理.</u> マトロイド$\mathfrak{M}=(E,\mathfrak{B})$の自己双対な基の交換公理は$\xi\in\mathring{\mathfrak{B}}$が$(0,1)$-ベクトルであることから，それと自明な対応をする集合Bを基とみなすことによって次の形に書ける：

「$B, B'\in\mathring{\mathfrak{B}},\ B\neq B' \Rightarrow {}^{\exists}i\in B-B',\ {}^{\exists}j\in B'-B$:

$B\cup\{i\}-\{j\},\ B'\cup\{j\}-\{i\}\in\mathring{\mathfrak{B}}$ 」[13]

8. ハイパーマトロイドの変換

91$^{\pm}$) ハイパーマトロイド$\mathfrak{M}=(E,\mathfrak{B})$ の不足度／階数関数を$\sigma_\pm$ とする。$\mathfrak{B}$から振巾$\sigma_\pm^\circ$に関して決められる

$$\mathfrak{B}^\natural=\{\sigma_\pm^\circ-\xi \mid \xi\in\mathfrak{B}\}$$

をヘドロンに持つハイパーマトロイド$\mathfrak{M}^\natural=(E,\mathfrak{B}^\natural)$を$\mathfrak{M}$の"双対ハイパーマトロイド"と呼ぶ。$\mathfrak{M}^\natural$のヘドロン$\mathfrak{B}^\natural$を$\mathfrak{M}$の"双対ヘドロン"，$\xi\in\mathfrak{B}^\natural$を$\mathfrak{M}$の"補基"と呼ぶ。$\mathfrak{M}^\natural$の不足度／階数関数は$\sigma_\pm{}^\natural$で与えられるが，$\sigma_\pm{}^\natural$を$\mathfrak{M}$の"零度／充足度関数"と呼ぶ。

92) <u>定理.</u> 任意のハイパーマトロイド$\mathfrak{M}$に対して

$$(\mathfrak{M}^\natural)^\natural=\mathfrak{M}.$$

93$^{\pm}$) ハイパーマトロイド$\mathfrak{M}=(E,\sigma_\pm)$に対して

$$\mathfrak{M}\overset{\times}{\cdot}T=(T,\sigma_\pm{}^{T}_{\downarrow})\quad(T\subseteq E)$$

を$\mathfrak{M}$の"Tへの縮約／簡約"と呼ぶ。$\mathfrak{M}\overset{\times}{\cdot}T$のヘドロン$\mathfrak{B}\overset{\times}{\cdot}T$は

$$\mathcal{L} \overset{\times}{\cdot} T = \{\xi^{T}_{\downarrow} \mid \xi \in \mathcal{L},\ \xi(T) = \sigma_{\pm}(T)\}\ (\subseteqq \gamma_{0}(T))$$

で与えられる。ここで

$$\mathcal{M} \overset{\times}{\cdot} E = \mathcal{M}$$

と約束する。

94$^{\pm}$) ハイパーマトロイド $\mathcal{M} = (E, \sigma_{\pm})$ に対して

$$\mathcal{M} \overset{\times}{\cdot} T \div S = (T - S,\ \sigma_{\pm}{}^{T}_{S})\ \ (S \subseteqq T \subseteqq E)$$

を $\mathcal{M}$ の"優/劣マイナー"と呼ぶ。このヘドロンは

$$\mathcal{L} \overset{\times}{\cdot} T \div S \equiv \{\xi^{T}_{S} \mid \xi \in \mathcal{L},\ \xi(T) = \sigma_{\pm}(T),\ \xi(S) = \sigma_{\pm}(S)\}$$

で与えられる。$T = E$ のときには

$$\mathcal{M} \div S = \mathcal{M} \overset{\times}{\cdot} E \div S$$

と記し，$\mathcal{M}$ の" S からの簡約/縮約"と呼ぶ。

一般に次の定理 95$^{\pm}$) が成立する。

95$^{\pm}$) 定理. ハイパーマトロイド $\mathcal{M}$ において

$$\mathcal{M}^{\natural} \overset{\times}{\cdot} T \div S = (\mathcal{M} \overset{\times}{\cdot} \bar{S} \div \bar{T})^{\natural}\ \ (S \subseteqq T)$$

であり，$\mathcal{M}$ が固有なハイパーマトロイドならば

$$\mathcal{M} \div S = \mathcal{M} \overset{\cdot}{\times} \bar{S}$$

なる関係がある。

96$^{\pm}$) $\sigma_{\pm} \in \gamma_{\pm}(E)$ のとき，$\sigma_{\pm}(\phi) = \omega(\phi)$ であるような $\omega \in \gamma_{0}(E)$ に対して

$$\sigma_{\pm}{}^{\omega}(X) = \genfrac{}{}{0pt}{}{\max}{\min}\{\sigma_{\pm}(Y) - \sigma_{\pm}(\phi) + \omega(X - Y)\}\ \ (Y \subseteqq X)$$

で定義される $\sigma_{\pm}{}^{\omega} \in \gamma_{\pm}(E)$ を $\sigma_{\pm}$ と ω との"たたみこみ (convolution)” という。$\sigma_\pm{}^\omega$を不足度／階数関数に持つハイパーマトロイド

$$\mathcal{M}_\pm^\omega = (E, \sigma_\pm{}^\omega)$$

を$\mathcal{M}=(E,\sigma_\pm)$の“上切片／下切片”と呼ぶ。[16],[21]

97) $\sigma_\pm(\phi)=\omega(\phi)$なる$\sigma_\pm \in \mathcal{V}_\pm(E)$と$\omega \in \mathcal{V}_0(E)$に対して

$$\mathcal{M}_\omega^\uparrow = \mathcal{M}_+^\omega - \{\omega\},$$

$$\mathcal{M}_\downarrow^\omega = \mathcal{M}_-^\omega$$

をそれぞれ，$\mathcal{M}=(E,\sigma_\pm)$のモジュラー関数$\omega$による“縮約”，“簡約”と呼ぶ。この縮約と簡約を繰り返して適用することによって$\mathcal{M}$から得られるハイパーマトロイドを$\mathcal{M}$の“ベクトルマイナー”と呼ぶ。

98) モジュラー関数全体のなす空間$\mathcal{V}_0(E)$の束としての区間$[\eta,\zeta]$とヘドロン$\mathcal{S}\in\mathcal{H}(E)$が共通部分を持つとき，$\mathcal{M}=(E,\mathcal{S})$において

$$\mathcal{M}_\eta^\zeta = (\mathcal{M}_\eta^\uparrow)_\downarrow^\zeta = (\mathcal{M}_\downarrow^\zeta)_\eta^\uparrow$$

を$\mathcal{M}$の“区間(interval)”と呼ぶ。

99) $\mathcal{M}$が整ポリマトロイドであるとき，

$$\mathcal{M}_\downarrow^1 \quad (1 = \sum_{i\in E} \mu^i)$$

はマトロイドとなる。これを$\mathcal{M}$の“台マトロイド”と呼ぶ。

100$^\pm$) 定理. ハイパーマトロイド$\mathcal{M}=(E,\mathcal{S})$の階数関数を$\rho$とするときに，非負実数$p$に対して

$$\mathcal{L}^{(\pm p)}=\{\xi \mid \xi(X)\leqq \rho(X)\quad (X\neq E),\ \xi(\phi)=\rho(\phi),$$
$$\xi(E)=\rho(E)\pm p,\ \xi\in \mathcal{V}_0(E)\}$$

は（$\mathcal{L}^{(+p)}$の方はそれが空集合でない場合に，$\mathcal{L}^{(-p)}$はつねに）$\mathcal{H}(E)$のヘドロンとなる。

101$^{\pm}$）$\mathcal{M}^{(\pm p)}=(E,\mathcal{L}^{(\pm p)})$を$\mathcal{M}$の“p－延長（p-elongation）”/“p－打切（p-truncation）”と呼ぶ。

102$^{\pm}$）定理．100$^{\pm}$）と同じ条件で

$$\mathcal{L}^{[\pm p]}\equiv\{\xi \mid \xi(X)\leqq \rho(X)\pm p\ (X\neq \phi, E),\ \xi(\phi)=\rho(\phi),$$
$$\xi(E)=\rho(E),\ \xi\in \mathcal{V}_0(E)\}$$

は（$\mathcal{L}^{[-p]}\neq\phi$のとき，$\mathcal{L}^{[+p]}$はつねに）$\mathcal{H}(E)$のヘドロンとなる。

103$^{\pm}$）$\mathcal{M}^{[\pm p]}=(E,\mathcal{L}^{[\pm p]})$を$\mathcal{M}=(E,\mathcal{L})$の“p－拡大（p-enlargement）”/“p－縮少（p-abridgement）”と呼ぶ。

104$^{\pm}$）定理．$f_{\pm}(x)$を（非負とは限らない）単調非減少な実関数で，凸／凹関数とする。このとき（非負とは限らない）非減少な優／劣モジュラー関数$\sigma_{\pm}$に対して$f_{\pm}(\sigma_{\pm}):2^{E}\to R$も優／劣モジュラー関数である。

105$^{\pm}$）$f_{\pm}(\sigma_{\pm})$を$\sigma_{\pm}$の$f_{\pm}$による“凸／凹変換”と呼ぶ。104$^{\pm}$）によって与えられたポリマトロイド$\mathcal{M}=(E,\sigma_{\pm})$から非減少凸／凹関数$f_{\pm}$によって新たなハイパーマトロイド$\mathcal{M}'=(E,f_{\pm}(\sigma_{\pm}))$を構成することができることが分かる。

106）任意の有限集合E，E′に対して$\Gamma:2^{E'}\to 2^{E}$が次の性

質を満たすとき，"劣モジュラー写像"と呼ぶ。

〈$\Gamma 0$〉 $\Gamma(\phi)=\phi$,

〈$\Gamma 1$〉 $\Gamma(X)\subseteqq\Gamma(Y)\ (X\subseteqq Y)$,

〈$\Gamma 2$〉 $\Gamma(X\cup\{y\})-\Gamma(X)\geqq\Gamma(X\cup\{y,z\})-\Gamma(X\cup\{z\})$.

107) 定理． $\rho: 2^E\to R$ が非減少劣モジュラー関数ならば劣モジュラー写像 $\Gamma: 2^{E'}\to 2^E$ に関して $\rho(\Gamma(\cdot)): 2^{E'}\to R$ も非減少劣モジュラー関数である。

108) 定理107)によって2部グラフにおける横断理論においては Γ を2部グラフの行 E' から列 E への2項関係を表わす写像とし，ρ として基数関数 $|\cdot|: 2^E\to R$ を考えれば $|\Gamma(\cdot)|$ が非減少劣モジュラー関数であるというよく知られた事実が得られる。特にRadoによる独立横断の理論においては ρ をマトロイドの階数関数として $\rho(\Gamma(\cdot))$ が非減少劣モジュラー関数であることが導かれる。

109) 一方Nash-Williamsの階数関数 ρ をもつマトロイドの写像 φ によるいわゆる"写像"の理論では φ^{-1} を Γ と考えることにより $\rho(\varphi^{-1}(\cdot)): 2^{E'}\to R$ が非減少劣モジュラー関数であることが分かる。これらのいずれもが整ポリマトロイドになるのでその台マトロイドを考えればマトロイド理論においてよく知られた諸結果が導かれる。

9. ハイパーマトロイドの例と応用

110) $N=(E, A; c)$ を E を点集合，A を有向枝集合とする有向グラフ $\vec{G}=(E, A)$ の枝 A 上に非負容量 c が与えられたネットワークとする。このとき"カット関数" $\gamma: 2^E \to R_+$ を

$$\gamma(X)=c(X, \bar{X}) \equiv \sum_a c(a)(\partial^+ a \in X,\ \partial^- a \in \bar{X},\ a \in A)$$

によって定義する。

111) ネットワークN上の"フロー" f とは容量条件

$$0 \leqq f \leqq c$$

を満たすベクトル $f \in R_+^A$ とする。このとき，フロー f の"境界(boundary)" $\partial f: 2^E \to R$ を

$$\partial f(X)=\sum_{x \in X}\{f(\delta^+ x)-f(\delta^- x)\}$$

によって定義する。

112) 110), 111)のもとで $\mathfrak{M}=(E, \gamma)$ は階数関数によって定義されたハイパーマトロイドとなる。すなわち

$$\partial f(\phi)=\gamma(\phi)(=0),\ \partial f(E)=\gamma(E)(=0),$$

$$\partial f \leqq \gamma,\quad \partial f \in \gamma_0(E),$$

より $\mathfrak{M}$ のヘドロン $\mathfrak{H}$ は

$$\mathfrak{H}=\{\partial f \mid f \text{ はNのフロー}\}$$

によって与えられる。[18], [19]

113) 112)のハイパーマトロイドはネットワークNの"境界ハイパーマトロイド"と呼ばれ[21]，そのようなハイパーマト

ロイドを総称して"ネットワーク的なハイパーマトロイド"と呼ぶ。これは典型的なハイパーマトロイドの例である。この例は通常の"ネットワークフロー問題"，"独立フロー問題"[3]，及びそれらのより一般化された"混合独立フロー問題"[18],[19]に直接応用できる。

114) $\mathcal{M}=(E,\mathfrak{A})$, $\mathcal{K}=(E,\mathfrak{B})$をそれぞれ$\rho_\pm$, $\sigma_\pm$を不足度/階数関数に持つハイパーマトロイドとする。このときそれらの対$\mathcal{N}=(\mathcal{M},\mathcal{K})$を一般化された多端子対ネットワークという意味で"ニューオイド(nuoid)"と呼ぶ。[18] ここで$\mathcal{M}$を$\mathcal{N}$の需給に関するハイパーマトロイド，$\mathcal{K}$を境界に関するハイパーマトロイドと呼ぶ。

115) $\mathcal{N}=(\mathcal{M},\mathcal{K})$において$\xi\in\mathfrak{A}$, $\eta\in\mathfrak{B}$が条件:

$$0\leqq\eta(X)\leqq\xi(X)\quad({}^\forall X\subseteqq \mathrm{car}^+\xi\equiv S^+),$$

$$0=\eta(X)=\xi(X)\quad({}^\forall X\subseteqq \mathrm{car}^0\xi\equiv S^0),$$

$$0\geqq\eta(X)\geqq\xi(X)\quad({}^\forall X\subseteqq \mathrm{car}^-\xi\equiv S^-)$$

を満たすとき，これを$\eta\precsim\xi$と書きηはξに関して"混合独立"であると呼び，(ξ,η)を"混合独立基対"と呼ぶ。$S^\pm$を$\mathcal{N}$の"ソース/シンク"と呼ぶがこれはξによって変化することに注意されたい。

116) ニューオイド$\mathcal{N}$が混合独立基対を持つための必要十分条件及びそれを求めるための実際的算法が得られている。[18]

117$^{\pm}$) 定理．ニューオイド $\mathcal{N}=(\mathcal{M},\mathcal{H})$ が混合独立基対を持つとき最大不足度＝最小剰余定理 46$^{\pm}$) 又は 54) より次の関係式が成立する。

$$\min_{\xi,\eta}^{\max}\{\|\xi-\eta\|^{\pm} \mid \eta\le\xi,\ \xi\in\mathfrak{A},\ \eta\in\mathfrak{B}\}$$
$$=\max_{X}^{\min}\{\rho_{\pm}(X)-\sigma_{\mp}(X) \mid X\subseteq E\}.$$

（ここで 117^{+}) と 117^{-}) は等価である）

118) 117$^{\pm}$) の最大＝最小定理を成立せしめる混合独立基対 (ξ,η) や分離集合 X を求める問題を〝混合独立フロー問題〟と呼ぶ。

119) 混合独立フロー問題において，台集合 E の分割を $E=S^{+}\oplus S^{\circ}\oplus S^{-}$ として $\mathcal{M}=(E,\rho_{-})$ を

$\mathcal{M}=\mathcal{M}^{+}\oplus\mathcal{M}^{\circ}\oplus\mathcal{M}^{-}$：

$\mathcal{M}^{+}=(S^{+},\rho_{-}^{+})$ を正ハイパーマトロイド；

$\mathcal{M}^{\circ}=(S^{\circ},0)$ を退化マトロイド；

$\mathcal{M}^{-}=(S^{-},-\rho_{-}^{-\#})$ を負ハイパーマトロイド

（ここで $\rho_{-}^{\pm}$ はともにポリマトロイドの階数関数である）

とおき，$\mathcal{H}=(E,\sigma_{-})$ をネットワーク $N=(E,A;c)$ に関連した境界ハイパーマトロイドとすれば（σ_{-} はカット関数となる），混合独立フロー問題は最大独立フロー問題[3]となり特に $\rho_{-}^{\pm}$ を非負ベクトルにとれば通常のネットワーク上の最大

フローを求める問題となる。

120) ハイパーマトロイド$\mathfrak{M}=(E,\mathcal{L})$の不足度／階数関数$\sigma_\pm$が$(m+1)$個の実数$s_{\pm0}, s_{\pm1}, \cdots, s_{\pm m}$によって

$$\sigma_\pm(X)=\sigma_{\pm|X|} \quad (X\subseteqq E)$$

と書けるとき，$\mathfrak{M}$を“対称的(symmetrical)”と呼ぶ。このとき優／劣モジュラー不等式より

$$2s_{\pm i} \lesseqgtr s_{\pm(i-1)} + s_{\pm(i+1)} \quad (i=1,\cdots,m-1)$$

なる関係がある。このような数列は“凸／凹な数列”と呼ばれる。

121) 凸／凹な数列$s_{\pm i}$ $(i=0,\cdots,m)$においてその1階差分

$$a_{\pm i}=s_{\pm i}-s_{\pm(i-1)} \quad (i=1,\cdots,m)$$

は非減少／非増加列である。したがって

$$s_{\pm0}=0,\ s_{+1}/s_{-m}\geqq 0$$

ならば$\mathfrak{M}=(E,\sigma_\pm)$は対称的ポリマトロイドである。

122) 対称的マトロイドは“一様マトロイド(uniform matroid)”$\mathfrak{M}\binom{E}{i}$（Eのi元集合の族$\binom{E}{i}$を整基の族としてもつマトロイドのこと）$(i=0,\cdots,m)$に他ならない。一様マトロイド$\mathfrak{M}\binom{E}{i}$のうち退化マトロイド$\mathfrak{M}\binom{E}{0}$と自由マトロイド$\mathfrak{M}\binom{E}{m}$を除いたものが初等的である。

123) 対称的ハイパーマトロイドの端点基$\xi\in\dot{\mathcal{L}}$は$\pi=(\pi_1,\cdots,\pi_m)$を$(1,\cdots,m)$ $(E=\{1,\cdots,m\})$の順列として

$$\xi_0 \equiv \xi(\phi) = s_{\pm 0},$$

$$\xi_{\pi_i} \equiv \xi(\{\pi_i\}) - \xi(\phi) = s_{\pm i} - s_{\pm(i-1)},$$

$$\xi(X) = \xi_0 + \sum_{i \in X} \xi_i$$

によって与えられる。

124) 対称的ハイパーマトロイドは"Schur変換"と密接な関係がある。今Dを$m \times m$重確率行列とする。m次元ベクトル$x = (x_1, \cdots, x_m)$, $y = (y_1, \cdots, y_m)$に対して$y = Dx$のとき, yはxのSchur変換と呼ばれる。

125) x, yの各成分を非増加にならべて

$$x_{p_1} \geqq x_{p_2} \geqq \cdots \geqq x_{p_m},$$

$$y_{q_1} \geqq y_{q_2} \geqq \cdots \geqq y_{q_m}$$

となっているとする(ここで$p = (p_1, \cdots, p_m)$, $q = (q_1, \cdots, q_m)$は$(1, \cdots, m)$の順列である)。さて

$$y_{q_1} + \cdots + y_{q_k} \leqq x_{p_1} + \cdots + x_{p_k} \quad (1 \leqq k \leqq m-1),$$

$$y_{q_1} + \cdots + y_{q_m} = x_{p_1} + \cdots + x_{p_m}$$

のとき, $y \prec x$と書くことにする。

126) 定理. (Hardy, Littlewood & Pólya)

次の3条件は同値である。

(i) $y \prec x$;

(ii) $y = Dx$となる重確率行列Dが存在する;

(iii) yは全ての順列$\pi = (\pi_1 \cdots, \pi_m)$にわたる$(x_{\pi_1}, \cdots, x_{\pi_m})$の

凸胞である。

127) 126) の条件は $x_{p_1} \geqq x_{p_2} \geqq \cdots \geqq x_{p_m}$ として

$$\rho(\phi) = 0,$$

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^{|X|} x_{p_i} \quad (|X| \geqq 1)$$

によって決まる ρ を階数関数に持つ対称的ハイパーマトロイドにおいて y が独立ベクトルであることを言っているに過ぎない。

128) 定理．対称的ポリマトロイドは"一様マトロイド" $\mathfrak{M}\binom{E}{i}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ の非負一次結合でかける。

10. ポリマトロイドの例と応用

$129^{\pm}$) 110), 111), 119) と同じ記号を用いて S^+ をソース，S^- をシンクに持つ多端子対ネットワーク $(S^+, N = (V, A; c), S^-)$ においてソースからシンクへ流せる最大フロー f を求めたとき S^+ から出る／S^- に入るフローベクトルに対応したモジュラー関数 $\partial f(X)$ $(X \subseteqq S^{\pm})$ はポリマトロイドの基となることは良く知られている。これはポリマトロイドの典型的な例である。

130) $X_1, X_2, \cdots, X_m$ を有限個の値をとる確率変数とする。$E = \{X_1, X_2, \cdots, X_m\}$ とおき，各 $S \subseteqq E$ $(S \neq \phi)$ に対し，S の Shannon の意味でのエントロピーを $h(S)$ と記し，$h(\phi) = 0$ と約束する。このとき関数 $h(S) : 2^E \to R_+$ は"エントロピー

関数”と呼ばれ，ポリマトロイドの階数関数となる。hの劣モジュラー性はShannonの条件つき相互情報量が非負であることから導かれる[2],[5]

131) 特性関数型の協力ゲーム(E, ν)においてνは一般に優加法的集合関数であるが，νが非減少優モジュラー関数である場合には(E, ν)はポリマトロイドとなるから従来のゲーム理論よりも詳細な構造が解明できる。このときゲーム(E, ν)には“コア”が存在してこれはポリマトロイド$\mathcal{M} = (E, \nu)$のへドロンに他ならない。[22]

132) 有向グラフ$\vec{G} = (E, A)$の点から点への接続を表わす2項関係を$\Gamma : 2^E \to 2^E$とする。このときΓは劣モジュラー写像となるので$|\Gamma(X)|$を階数関数に持つ整ポリマトロイド$\mathcal{M}_\Gamma = (E, |\Gamma(\cdot)|)$が決まる。これを有向グラフ$\vec{G}$から誘導された“2項関係ポリマトロイド”と呼ぶ。[25]

133) $\mathcal{M}_\Gamma$の基は$\vec{G}$における内向次数が1以下の極大部分有向グラフ$\vec{G}_0$の外向次数ベクトルに他ならず，階数$|\Gamma(E)|$は内向次数が正である点の数に等しい。$\vec{G}_0$は高々1つのサイクルとその中のいくつかの点を“根(始点)”とするいくつかの有向木とからなる“逆関数的有向グラフ”の直和である。サイクルがない場合には単なる有向木となる。

134) 単位優モジュラー関数$\mu^J (\phi \neq J \subseteq E)$を不足度関数に持

つマトロイド $\mathfrak{M}^J \equiv (E, \mu^J) = \mathfrak{M}\binom{J}{1} \oplus \mathfrak{M}\binom{E-J}{0}$ を“単体的(simplicial)”マトロイドと呼ぶ。このマトロイドの整基の族は

$$\mathring{\mathcal{L}} = \binom{J}{1}$$

に他ならない。ここで μ^ϕ に対しては $\mathfrak{M}^\phi \equiv (E, \mu^\phi)$ は“退化ハイパーマトロイド”と呼ぶべきだが，これに対応した退化マトロイド $\mathfrak{M}^0 \equiv (E, 0)$ を単体的マトロイドの仲間に入れることにする。(なお広義には $(\mathfrak{M}^J)^q = \mathfrak{M}\binom{J}{|J|-1} \oplus \mathfrak{M}\binom{E-J}{0}$ も単体的マトロイドと呼ぶことにする。)

135) 相関関数 τ が非負関数であるようなハイパーマトロイド $\mathfrak{M}$，すなわち不足度関数 σ，階数関数 ρ がそれぞれ

$$\sigma(X) = \sum_{J \subseteq E} \tau(J)\mu^J(X) = \sum_{J \subseteq E} \tau(J) \quad (\tau(J) \geqq 0);$$

$$\rho(X) = \sum_{J \subseteq E} \tau(J)\lambda^J(X) = \tau(\phi) + \sum_{J \cap X \neq \phi} \tau(J) \quad (\tau(J) \geqq 0)$$

と書けるとき，$\mathfrak{M}$ を“単調な”ハイパーマトロイドと呼ぶ。特に固有なとき，すなわち $\tau(\phi) = 0$ ならば $\mathfrak{M}$ は単調なポリマトロイドとなる。[25]

136) 定理. 単調な整ポリマトロイドの台マトロイドは“横断マトロイド (transversal matroid)”である.

11. 準マトロイドの例と応用

137) 点集合E，枝集合 $U \subseteq \binom{E}{2}$ をもつ単純な無向グラフを

$G=(E,U)$とする。Gの各枝に向きをつけたときの有向グラフを$\vec{G}=(E,\vec{U})$で表わす。ここで$\vec{U}\subseteqq E\times E$は

$$\{i,j\}\in U \Leftrightarrow \text{「}(i,j)\in\vec{U}\text{又は}(j,i)\in\vec{U}\text{のいずれか一方のみが成り立つ」}$$

によって決められるものとする。

138) $\mathcal{G}_G^-$でGの"非巡回的向きづけ"，すなわちサイクルを含まないような有向グラフ$\vec{G}$の全体を表わし，$\mathcal{G}_G^+$でGの"強連結的向きづけ"，すなわちコサイクルを含まないような有向グラフ$\vec{G}$の全体を表わし，$\mathcal{G}_G^\circ$でサイクルもコサイクルもともに含むような向きづけ$\vec{G}$の全体を表わす。このとき，Gの$2^{|U|}$個の向きづけの全体$\mathcal{G}_G$は

$$\mathcal{G}_G=\mathcal{G}_G^-\oplus\mathcal{G}_G^\circ\oplus G_G^+$$

と直和分割されることは明らかである。

139) 無向グラフ$G=(E,U)$から

$$\rho(X)=|\{\{i,j\}\mid\{i,j\}\in U,\ \{i,j\}\cap X=\phi\}|$$

によって定義される劣モジュラー関数$\rho: 2^E\to Z_+$を階数関数に持つ整ハイパーマトロイド$\mathcal{M}=(E,\rho)$は固有な準マトロイドとなる。このような準マトロイドをGに関連した"グラフ的準マトロイド"と呼び，$\mathcal{M}_G$で表わす。[24] また$\mathcal{M}_G$のヘドロンを$\mathcal{Z}_G$で表わす。$\mathcal{M}_G$の不足度関数σは

$$\sigma(X)=|\{\{i,j\}\mid i,j\in X,\ \{i,j\}\in U\}|$$

すなわち

$$\sigma = \sum_{\{i,j\}\in U} \mu^{\{i,j\}}$$

と書ける。

140) 定理. $d^{\pm}(\vec{G})$ を G の向きづけ $\vec{G}$ の外向／内向次数関数（ベクトル）とすれば，$\mathscr{L}_G$ の格子点の全体 $\mathring{\mathscr{L}}_G$ は

$$\mathring{\mathscr{L}}_G = \{ d^{\pm}(\vec{G}) \mid \vec{G} \in \mathscr{G}_G \}$$

と書ける。より正確には，$\mathscr{L}_G$ の端点を $\dot{\mathscr{L}}_G$，境界を $\hat{\mathscr{L}}_G$，とするとき

$$\mathring{\mathscr{L}}_G = \{ d^{\pm}(\vec{G}) \mid \vec{G} \in \mathscr{G}_G^{-} \},$$
$$\mathring{\mathscr{L}}_G \cap \hat{\mathscr{L}}_G - \dot{\mathscr{L}}_G = \{ d^{\pm}(\vec{G}) \mid \vec{G} \in \mathscr{G}_G^{\circ} \},$$
$$\mathring{\mathscr{L}}_G - \hat{\mathscr{L}}_G = \{ d^{\pm}(\vec{G}) \mid \vec{G} \in \mathscr{G}_G^{+} \}$$

と書ける。特に非巡回的向きづけ $\vec{G}$ の外向／内向次数関数 $d^{\pm}(\vec{G})$ と $\dot{\mathscr{L}}_G$ との対応は一対一である。[24]

141) 定理. $\mathscr{L}_G$ の境界以外の内部にある格子点の全体 $\mathring{\mathscr{L}}_G - \hat{\mathscr{L}}_G$ の凸胞は $\mathscr{L}_G$ の1−縮少 $\mathscr{L}_G^{[-1]}$ に他ならない。

142) "強連結グラフ" の一般化として $\mathscr{L}_G^{[-p]}$ の格子点に対応する $d^{\pm}(\vec{G})$ を持つ有向グラフを "強P連結グラフ" と呼ぶ。これは全ての2点間に互に辺素な少くともP個の有向道が存在するような有向グラフのことである。

143) 定理141) を用いて与えられた非巡回グラフ $\vec{G} \in \mathscr{G}_G^{-}$ を強連結グラフにするために反向すべき辺の最小個数を求める

ための効率的算法が得られる。[8] この問題は自己閉路も橋も含まない場合には非巡回グラフを強連結グラフにするために短絡除去すべき辺の最小個数を求める問題と等価である。

144) 120), 121) の対称的ポリマトロイド $\mathfrak{M}=(E,\sigma_{\pm})$ において，さらに

$$s_{+1}/s_{-m}=0,\ s_{\pm(i-1)}+s_{\pm(i+1)}-2s_{\pm i}=0,\ \pm 1\ (i=1,\cdots,m-1)$$

ならば $\mathfrak{M}$ は固有な準マトロイドとなる。これを"対称的準マトロイド"と呼ぶ。

145) 完全グラフ $G=(E,\binom{E}{2})$ に関連したグラフ的準マトロイドは対称的であり"完全準マトロイド"と呼ばれる。これは階数最大の準マトロイドでベクトル $(0,1,\cdots,m-1)$ の任意の置換されたベクトルを端点基に持つ。

146) 一様マトロイド $\mathfrak{M}\binom{E}{1}$ は単体的マトロイド $\mathfrak{M}^E$ でもあり，一様マトロイド $\mathfrak{M}\binom{E}{m-1}$ は双対単体的マトロイド $(\mathfrak{M}^E)^q$ でもあるがそれらの和

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\binom{E}{1}+\mathfrak{M}\binom{E}{m-1}$$

を"正規(normal)"準マトロイドと呼ぶ。正規準マトロイドのヘドロンはその中心基 ξ から表面の任意の基 η までの距離 $\|\xi-\eta\|$ が全て2であるような特殊なヘドロンでヘドロン空間 $\mathcal{H}(E)$ のノルムを測る尺度である。

147) 自然数 $k(<m)$ に対して集合族 $\mathcal{S}(\subseteqq 2^E)$ が次の (i),

(ii) をみたすものとする。

(i) $L\in\mathcal{L} \Rightarrow |L|\geqq k$;

(ii) $K\in\binom{E}{k}$ に対して K を含む $\mathcal{L}$ の元が唯1つある。このとき $(E,\mathcal{L})$ は超平面族 $\mathcal{L}$ によって定義されたマトロイドとなり，"分割の幾何"と呼ばれる。[11] $\mathcal{L}\subseteqq\binom{E}{2}$ のとき，$(E,\mathcal{L})$ はグラフに他ならず，$\mathcal{L}$ を射影幾何の直線の族とすれば，$(E,\mathcal{L})$ は"射影幾何"に他ならない。

148) $k=2$ の場合の分割の幾何 $(E,\mathcal{L})$ において

$$\sigma(X)=\sum_{L\in\mathcal{L}}\mu^L(X)$$

と定義すれば $\sigma(X)$ は準マトロイドの不足度関数となる。こうしてグラフや射影幾何を特別の場合として含む $k=2$ の場合の分割の幾何 $(E,\mathcal{L})$ から準マトロイドが誘導される。

149) Steiner システム $(t,k,m)\equiv t-(m,k,1)$ でかつ2－デザイン (BIBD) であるもの，すなわち $S(2,k,m)$ は2点 i,j を含むブロックが唯1つに限ることから各ブロックを点の集合で表わしたときのブロックの集合族を $\mathcal{L}$ とおけば

$$\sigma(X)=\sum_{L\in\mathcal{L}}\mu^L(X)$$

は準マトロイドの不足度関数となる。

150) $S(2,k,k^2-k+1)$ は"射影平面"，$S(2,3,m)$ は"三角システム"，$S(2,3,7)$ は"Fano 図形"と呼ばれる。特に $S(2,2,m)$ から誘導される準マトロイドは完全準マトロイド

に他ならない。

151) マトロイドの例は文献〔11〕,〔35〕を参照されたい。これまで指摘されていない例として，群やモジュラー束の"直積分解"や"既約分解"に関連したマトロイド構造がある。〔26〕

152) 線形表現可能なマトロイドと代数的マトロイドの中間に存するマトロイド構造としてHilbertの基底定理から導かれるものがある。

153) Hilbertの基底定理：任意の体Kにおけるn変数x_1, …, x_nの同次整関数の族を$K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$とする。一つの集合族$E \subseteqq K(x_1, \ldots, x_n)$が与えられたときその中から適当な有限個の関数$F_1, F_2, \ldots, F_r$を選び出し，Eに属する任意の関数Fを常に

$$F = \sum_{i=1}^{r} a_i F_i$$

の形に表わすことができる。但し$a_1, \ldots, a_r$はいずれも$a_i \in K(x_1, \ldots, x_n)$である。

154) Hilbertの基底定理において$F_1, \ldots, F_r$はマトロイドの基となる。特殊な場合としてEをn元形式の不変式の全体にとれば不変式の基底定理が得られるが，不変式の基底はマトロイドの基である。不変式体における不変式の代数基底は代数的マトロイドの例でもある。

155) 151), 154)の新たなマトロイドの例からも分かるようにマトロイドはいろいろな代数学のきわめて基本的な構造であることが次第に明らかになりつつある。

156) $|E|=4$ の場合の準マトロイドは同型を除いて31個ある。これらの準マトロイドのヘドロンを単体座標で示せば3次元空間に表現できて，その第4軸方向から見た第4面への透視図が図1に示している。なお $|E|=5$ の場合の準マトロイドの表は文献〔10〕にある。

157) 図1のヘドロンは全て平行14面体であるがこれらは3次元の多面体としては切頭直方体の特殊な場合である。初等的なものが11個，グラフ的なものが11個，対称的なものが8個ある。初等的なもののうちマトロイドとなるものが8個でその中で6個が単体的（とその双対）である。初等的かつ対称的なものは自由マトロイドを除く4個の一様マトロイドである。初等的だがマトロイドでない3個のうち上の2個は"極小非マトロイド的準マトロイド"で"富澤の7面体"とその双対と呼ばれ[10]，下の1個は"線形表現不可能"な極小ポリマトロイドで"Vámos-Higgsの13面体"と呼ばれる。

完全な準マトロイドのヘドロンは切頭正8面体であるが，これは"Kelvinの14面体"と呼ばれ，体心立方格子に対する"Voronoi多面体"として特徴づけられる。

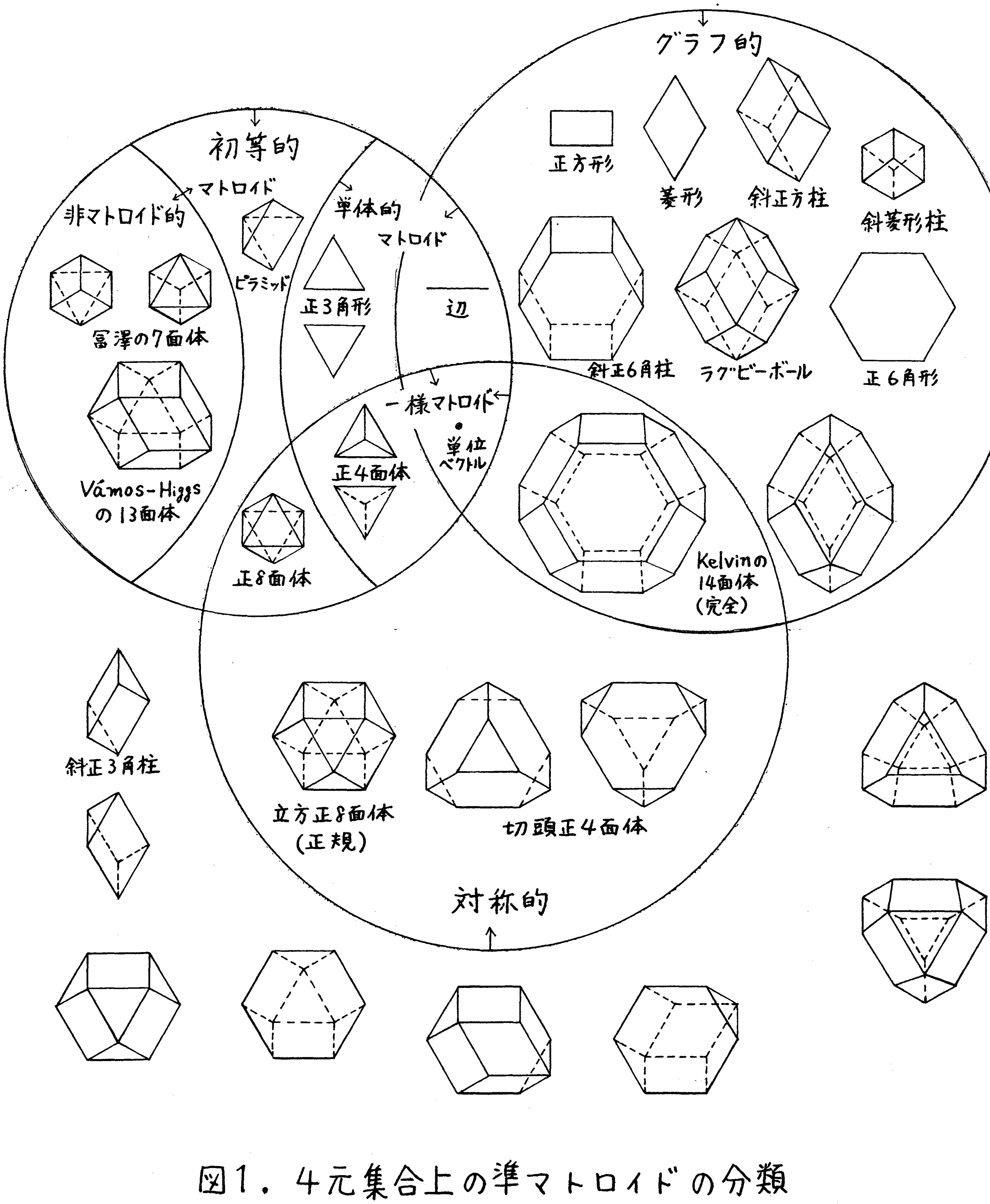


図1．4元集合上の準マトロイドの分類

12. あとがき

158) 本論文は著者により"超空間論"の名のもとに一連の論文[14]〜[28]において発表されて来た結果のうち主なものを整理し，新たな事実もつけ加えて概説したものである。

159) 線形独立・従属の概念の抽象化であるマトロイドやポリマトロイドの概念をより一般化することによって任意の劣モジュラー関数と同値な概念として"ハイパーマトロイド"が定義され，マトロイドやポリマトロイドと同様のとり扱いが可能であることが分って来た。

160) 台集合E上のハイパーマトロイドの基多面体，すなわち交換公理を満足する"ヘドロン"の線形結合がまたヘドロンであるという事実から，ヘドロン全体のなす線形空間を"ヘドロン空間"と名づけた。ヘドロン空間はベクトル空間の自然な一般化である。

161) ユークリード幾何学，射影幾何学，擬似幾何学はいうに及ばず，非ユークリッド幾何学，円幾何学等あらゆる幾何学はマトロイドであるといって過言ではない。一方グラフ，線形代数，群，環，体，束，代数幾何，不変式論等の代数系はその基本構造としてマトロイド構造を持っていることが分って来た。このことよりマトロイドは数学の基本概念となりつつあるように思われる。

162) マトロイドやポリマトロイドの理論の発展とその応用には近年めざましいものがあるが，その新たな例が今でも見い出されているという事実が示すようにまだまだなすべき仕事は沢山ある。

163) 準マトロイドはハイパーマトロイドの理論においてマトロイドよりも基本的概念であるにもかかわらず，その研究の歴史は浅く理論的にも不明の点は多い。また準マトロイドやハイパーマトロイドの応用に関しては余り調べられていないのが実情である。

164) 本論文ではハイパーマトロイドの"基本分割"の理論に関して述べることが出来なかったが，これに関しては文献〔12〕,〔17〕,〔27〕,〔30〕,〔31〕等を参照されたい。ハイパーマトロイドの一般化については"混合独立システム"〔22〕,分配束上の劣モジュラー関数〔7〕,〔9〕,"半モジュラーシステム"〔28〕等がある。

文献

〔1〕J. Edmonds: Submodular functions, matroids, and certain polyhedra; Proceedings of the International Conference on Combinatorial Structures and Their Applications (Gordon and Breach, New York, 1970) 69-87.

〔2〕藤重;エントロピー関数とポリマトロイド—情報理論における組合せ的構造;電子通信学会論文誌, 61-A, 308-312 (1978).

〔3〕S. Fujishige: Algorithms for solving the independent-flow problems; Journal of the Operations Research Society of Japan, 21, 189-204 (1978).

〔4〕藤重:"独立流れ"問題と劣モジュラー関数;東京大学工学部紀要(A), 16, 42~43 (1978).

〔5〕藤重:マトロイド理論とそのシステム工学的諸問題への応用, システムと制御, 23, 11-20 (1979).

〔6〕S. Fujishige: Principal structures of submodular systems, Discrete Applied Mathematics, 2, 77-79 (1980).

〔7〕S. Fujishige: Structures of polytopes determined by submodular functions on crossing families; Discussion Paper Series No. 121, Institute of Socio-Economic Planning, University of Tsukuba (1981).

〔8〕 S. Fujishge and N. Tomizawa : An algorithm for finding a minimum-cost strongly connected reorientation of a directed graph, ibid., No. 147 (1982).

〔9〕 S. Fujishige and N. Tomizawa : A note on submodular functions on distributive lattices; ibid., No 149 (1982).

〔10〕 柴崎・松藤・平山：準マトロイドの分類とテーブル；電子通信学会技術研究報告, CAS 82-1 (1982).

〔11〕 冨澤・伊理：マトロイドについて；計測と制御, 16, 455-468 (1977).

〔12〕 冨澤：強既約マトロイドとマトロイドの強既約マイナーへの基本分割について；電子通信学会論文誌, 59-A, 83-91 (1976).

〔13〕 冨澤：マトロイドの自己双対な基公理について；電子通信学会技術研究報告, CST 77-110 (1977).

〔14〕 冨澤：超空間論(I)－優モジュラー関数と"基"の概念の一般化； 同上, CAS 80-72 (1980).

〔15〕 冨澤：超空間論(II)－区間の幾何学と高階優モジュラー関数；同上, CAS 80-73 (1980).

〔16〕 冨澤：超空間論(III)－最大不足度＝最小剰余定理とその応用；同上, CAS 80-74 (1980).

〔17〕 冨澤：超空間論(IV)－ハイパーマトロイドの基本分割；

同上，CAS 80-85 (1980).

〔18〕冨澤：超空間論(V)－ニューオイド上のフローについて；同上，CAS 80-95 (1980).

〔19〕冨澤：超空間論(VI)－混合独立フロー問題の解法，同上，CAS 80-96 (1980).

〔20〕冨澤：超空間論(VII)－準マトロイドとそのグラフ的表現について；同上，CAS 80-106 (1980).

〔21〕冨澤・藤重：超空間論(VIII)－ネットワーク的なハイパーマトロイドの構造について；同上，CAS 81-62 (1981).

〔22〕冨澤：超空間論(IX)－混合独立システムについて；同上，CAS 81-63 (1981).

〔23〕冨澤：超空間論(X)－ポリマトロイドの性質について；同上，CAS 81-84 (1981).

〔24〕冨澤：超空間論(XI)－グラフ的準マトロイドとそのグラフの向き付けへの応用；同上，CAS 81-85 (1981).

〔25〕冨澤：超空間論(XII)－ハイパーマトロイドのハイパーグラフによる表現について；同上，CAS 81-93 (1981).

〔26〕冨澤：超空間論(XIII)－マトロイドと代数構造；同上，CAS.81-133 (1982).

〔27〕冨澤・藤重：超空間論(XIV)－距離束の優モジュラー関数に関する基本分解と基本構造；同上，CAS 82-2 (1982).

[28] 冨澤：超空間論(XV)－半モジュラーシステムについて；同上，CAS 82-46 (1982).

[29] N. Tomizawa : Theory of hypermatroids; Applied Combinatorial Theory and Algorithms, RIMS Kokyuroku 427, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University (1981) 43-50.

[30] N. Tomizawa and S. Fujishige : Historical survey of extensions of the concept of principal partition and their unifying generalization to hypermatroids; Proceedings of International Symposium on Circuits and Systems, Rome, May 10-12 (1982) 142-145.

[31] N. Tomizawa and S. Fujishige : (標題は上と同じでより詳しく書いたもの), Systems Science Research Report No.5 Department of Systems Science, Tokyo Institute of Technology (1982).

[32] N. Tomizawa : Quasimatroids and orientations of graphs; XI. International Symposium on Mathematical Programming, Bonn, August 23-27 (1982).

[33] N. Tomizawa : Hypermatroids, polymatroids, quasimatroids, and matroids; Collaquium on Matroid Theory, Szeged, Hungary, August 29 - September 4 (1982).

[34] W.T. Tutte : Introduction to the theory of matroids; American Elsevier, New York (1970).

[35] D.J.A. Welsh : Matroid Theory ; Academic Press, London (1976).

[36] H. Whitney : On the abstract properties of linear dependence ; American Journal of Mathematics, 57, 509-533 (1935).