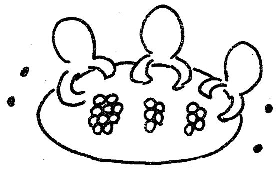
数理解析研究所講究録
471巻 1982年 160-167

n人でする石取りゲーム



明石高専　加納幹雄 (MIKIO KANO)

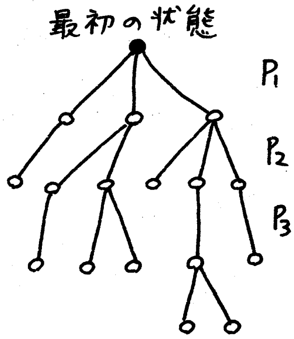
まずいくつかの石の山をつくる．この石の山を用いてn人のプレーヤー $P_1, P_2, \cdots, P_n$ で次のような石取りゲームをする．まずP_1がどれか1つの山から1個以上石を取る．このとき取る石の数に制限をつける場合とつけない場合がある．次にP_2がある山から1個以上石を取る．以下このような石取りを$P_3, P_4, \cdots, P_n, P_1, \cdots, P_n, P_1, \cdots$と石が失くなるまで続けてゆく．そして$X_1$が着手(石を取ること)したとき全部の石が取られゲームは終ったものとする．X_1のi手前に着手したプレーヤーをX_{i+1}で表す．例えばP_1, P_2, P_3, P_4の4人でゲームをし，P_3が着手したときゲームが終了すれば，$X_1=P_3$, $X_2=P_2$, $X_3=P_1$, $X_4=P_4$である．このとき$\{1,2,\cdots,n\}$上の置換σを1つ選び，これを用いてプレーヤーの順位を1位$X_{\sigma(1)}$, 2位$X_{\sigma(2)}$, $\cdots$, n位$X_{\sigma(n)}$と定める．このような石取りゲームを<u>n人でするσ-石取りゲーム</u>とよぶ．しかしここで扱うのは次のような特別なゲームである．

<u>正規型石取りゲーム</u>　　1位X_1, 2位X_2, $\cdots$, n位X_n

<u>l後退正規型石取りゲーム</u>　　1位X_l, 2位X_{l+1}, $\cdots$, n位X_{l+n-1}

ただし$l \geqq 2$で，添字$l+i$は$(\mathrm{mod}\ n)$でとるものとする．

すると2人でする正規型石取りゲームは普通の正規型石取りゲームになっており，2人でする2後退正規型石取りゲームは普通の逆型石取りゲームになっている．



ゲームの木

さて σ-石取りゲームを決めると，最初の石の山の型により，誰れが1位になるかがゲームを始める前に理論上確定することを述べよう．最初の石の山を頂点とするゲームの木を考える．この木の点は石の山の型に対応し，辺は着手に対応する([3])．するとこの木の末端から順に誰が1位になるかが，特に全員の順位が決まってくる．つまりある点（ある石の山）において，その点からでているすべての下の点に対し誰が1位になるかが決まっておれば，この点で着手するプレーヤーは自分の順位が最もよくなるように着手するはずである．よってこの点からゲームを始めると誰が1位になるか，特に全員の順位が確定する．これを繰り返してゆけばよい．

もちろんあるプレーヤーが1位になるはずのゲームであっても，最下位にならないはずのプレーヤーがミスをすれば他のプレーヤーが1位になることもある．そしてミスをしたプレーヤーは，他のプレーヤーがその後着手を誤まらなければ，最初に得られるはずだった順位より下位になる．つまり1人のミスは全体の順位を狂わせるが，ミスをした本人の順位も下げる．

$x, y, \cdots, z$ 個の石からなる石の山を $(x, y, \cdots, z)$ で表す．そして $x, y, \cdots, z$ を2進展開し，各桁ごとに加えたものを $(\mathrm{mod}\ n)$ で求め，これを n 進展開したものとみなして求めた数を<u>n-ニム和</u>とよび $x \oplus y \oplus \cdots \oplus z$

で表す、つまり $x=\sum x_i 2^i$, $y=\sum y_i 2^i$, …, $z=\sum z_i 2^i$ とし $x\oplus y\oplus\cdots\oplus z=\sum w_i n^i$ とおくと $x_i+y_i+\cdots+z_i\equiv w_i \pmod{n}$, $0\leq w_i<n$ である、例えば 14, 11, 10, 7 の 3ニム和は $14\oplus 11\oplus 10\oplus 7=(8+4+2)\oplus(8+2+1)\oplus(8+2)\oplus(4+2+1)=(3\times 8+2\times 4+4\times 2+2\times 1)=(2\times 9+1\times 3+2\times 1)=23$ となる、

定理A　石の山 $(x, y, \cdots, z)$ を用いて n 人で取る石の数に制限のない正規型石取りゲームをするものとする、このとき最初に着手するプレーヤーが最下位になるための必要十分条件は

$x\oplus y\oplus\cdots\oplus z=0$　(nニム和)　となることである、

定理B　石の山 $(x, y, \cdots, z)$ を用いて n 人で取れる石の数に制限のない l 後退正規型石取りゲームをするものとする、このとき最初に着手するプレーヤーが最下位になるための必要十分条件は

もしある石の山に2個以上石があれば　$x\oplus y\oplus\cdots\oplus z=0$　(nニム和)

もしすべての石の山に1個石があれば　$x\oplus y\oplus\cdots\oplus z=l-1$　(nニム和)

となることである、

取れる石の数が k 個以下に制限された場合は、石の山が高々2つまでの場合しかわかっていない、また一般に n 人でする石取りゲームのグルンディー関数についても存在・不存在（合理的な計算法を含めて）が不明である、2人でする石取りゲームについては一松[1]が詳しい、又2人でする逆型石取りゲームについては山崎[2]を参照されたい、

定理Aの証明

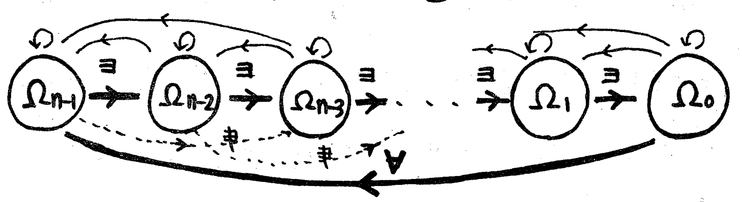
石のない状態(0)も含めて石の山の全体をΩとおく。そしてi番目に着手するプレーヤーP_iが1位になる石の山の全体をΩ_iで表し，便宜上Ω_nをΩ_0とかき$(0)\in\Omega_0$とする。するとΩは$\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_{n-1}$と直和に分割される。石の山$\overline{m}$に着手$\varphi$をして得られる石の山を$\varphi(\overline{m})$とかき，着手$\varphi_1$をし次に着手$\varphi_2$をして得られる石の山を$\varphi_2(\varphi_1(\overline{m}))=\varphi_2\circ\varphi_1(\overline{m})$とかく。

補題1　Ωの分割$\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_n$は次の条件をみたす。

(1)　$(0)\in\Omega_0$、また$\overline{m}\in\Omega_0$なら任意の着手φに対し$\varphi(\overline{m})\in\Omega_{n-1}$となる。

(2)　$\overline{m}\in\Omega_i$　$(1\leq i\leq n-1)$ なら$\varphi(\overline{m})\in\Omega_{i-1}$となる着手$\varphi$が存在する。

(3)　$\overline{m}\in\Omega_i$　$(2\leq i\leq n-1)$ なら任意の着手φに対し$\varphi(\overline{m})\notin\Omega_{i-2}\cup\cdots\cup\Omega_0$.



着手の存在と石の山の流れ

$\overline{m}\in\Omega_i$	Ω_{n-1}	Ω_{n-2}	$\cdots$	Ω_2	Ω_1	Ω_0
P_1から始めたときのP_1の順位	$n-1$	$n-2$		2	1	n
P_1　〃　P_n　〃	n	$n-1$		3	2	1

$\overline{m}$からゲームを始めたときのP_1とP_nの順位表

(証)　$\overline{m}\in\Omega_i$, $i\neq 0$とする。$\overline{m}$に着手するプレーヤーをPとするとPの順位はiとなるはずである(上の表)。1手着手するとその局面において最後に着手するプレーヤーとなるから，最後に着手するプレーヤーがi位になる局面にできるはずである(上の表)。よって(2)が成り立つ。また$\overline{m}\in\Omega_i$ $(i\geq 2)$のとき$\varphi(\overline{m})\in\Omega_{i-2}\cup\cdots\cup\Omega_0$となる着手$\varphi$が存在すれば，この着手によって$P$の順位は$i-1$位より良くなり$i$位になることに反する。よって(3)が成り立つ。同じ理由で$m\in\Omega_0$ならすべての着手φで$\varphi(\overline{m})\in\Omega_{n-1}$となる。つまり(1)が成り立つ。

補題2　Ωの分割 $\Omega=\Omega'_0\cup\Omega'_1\cup\cdots\cup\Omega'_{n-1}$ が補題1と同じ条件をみたすなら $\Omega_i=\Omega'_i$, $0\le i\le n-1$, となる。

（証）Ωの元全体に、$\overline{m}$の番号 > $\varphi(\overline{m})$の番号（すべての着手φに対して）となるように番号をつけ、この番号に関する帰納法で証明する。$(0)\in\Omega_0$より1番目はよい。$\overline{m}\in\Omega'_i$ とする。もし $\overline{m}\in\Omega'_0$ なら $\varphi(\overline{m})\in\Omega'_{n-1}$ となり、帰納法の仮定により $\varphi(\overline{m})\in\Omega_{n-1}$ となる。すべての着手で Ω_{n-1} になる $\overline{m}$ は Ω_0 のものに限るから $\overline{m}\in\Omega_0$。もし $\overline{m}\in\Omega'_i$ $(1\le i\le n-1)$ なら $\varphi(\overline{m})\in\Omega'_{i-1}$ となる着手φが存在する。帰納法の仮定より $\varphi(\overline{m})\in\Omega_{i-1}$。よって $\overline{m}$ を用いてゲームをすると P_1 は i位以上になれる（Ω_{i-1} における P_n の順位は i位）。一方 $\varphi(\overline{m})\in\Omega'_j$ $(j\le i-2)$ となる着手φは存在しないし、$\varphi(\overline{m})\in\Omega'_k$ $(k\ge i)$ となる着手φをP_1がすれば $\varphi(\overline{m})\in\Omega_k$ より P_1の順位は $k+1$位となる。よって P_1の得られる最高順位は i位である。故に $\overline{m}\in\Omega_i$。

補題3　Ωの部分集合Xが次の条件をみたせば $X=\Omega_0$ である。

(1)　$(0)\in X$

(2)　$\overline{m}\in X$ とすると、任意の着手 $\varphi_1,\cdots,\varphi_r$ $(1\le r\le n-1)$ に対し $\varphi_r\circ\cdots\circ\varphi_1(X)\notin X$。

(3)　$\overline{m}\notin X$ なら $\varphi_s\circ\cdots\circ\varphi_1(X)\in X$ となる着手 $\varphi_1,\cdots,\varphi_s$ $(1\le s\le n-1)$ が存在する。

（証）$\Omega''_0=X$, Ω''_{n-1} $\{\varphi(\overline{m})\mid \overline{m}\in\Omega''_0\}$, $\Omega''_{n-2}=\{\varphi(\overline{m})\mid\overline{m}\in\Omega''_{n-1}\}-\Omega''_{n-1}$, …, $\Omega''_1=\{\varphi(\overline{m})\mid\overline{m}\in\Omega''_2\}-\Omega''_{n-1}\cup\cdots\cup\Omega''_2$（補題1の図）とおくと、Ω は $\Omega=\Omega''_0\cup\cdots\cup\Omega''_{n-1}$ と直和に分割され、又補題1の条件をみたす。よって補題2より $\Omega''_i=\Omega_i$, 特に $\Omega''_0=X=\Omega_0$ となる。

$n=4$和が0となる石の山の全体をYで表す。すなわち

$$Y=\{\overline{m}=(x,y,\cdots,z)\mid x\oplus y\oplus\cdots\oplus z=0\quad(n=4\text{和})\}\cup\{(0)\}$$

とおく．以下 Y が補題3の条件をみたすこと示す．これができれば定理Aは証明されたことになる．Y が補題3の(1)をみたすのは明らかである．

<u>補題4</u>　Y は補題3の条件(2)をみたす．

(証) $\overline{m}=(m_1,m_2,\cdots,m_k)\in Y$ が r 回の着手 $\varphi_r\circ\varphi_{r-1}\circ\cdots\circ\varphi_1$ で $\overline{m'}=(m'_1,\cdots,m'_k)$ になったとする．$m_i=\sum_t \alpha_i^t 2^t$，$m'_i=\sum_t \beta_i^t 2^t$　$(\alpha_i^t,\beta_i^t=0$ or $1)$ とおくとある i,t で $\alpha_i^t>\beta_i^t$ となっている．このような i,t の中で t が最大になるものを s とおく．すると $\sum_{i=1}^k \alpha_i^s\equiv 0 \pmod n$ と $\#\{i\mid\alpha_i^s\neq\beta_i^s\}\leq r<n$ より

$$-\sum_{i=1}^k\beta_i^s\equiv\sum_i(\alpha_i^s-\beta_i^s)\equiv n-\#\{i\mid\alpha_i^s\neq\beta_i^s\}\not\equiv 0 \pmod n.$$

よって $\sum_i\beta_i^s\not\equiv 0 \pmod n$，つまり $\overline{m'}\notin Y$．

<u>補題5</u>　Y は補題3の条件(3)をみたす．

$\overline{m}=(m_1,\cdots,m_k)\notin Y$ とする．もし $k<n$ なら k 回の着手で $\overline{m}$ を $(0)\in Y$ にできる．よって $k\geq n$ としてよい．$m_i=\sum_t\alpha_i^t 2^t$　$(\alpha_i^t=0$ or $1)$ とおく．

$m_1\oplus\cdots\oplus m_k=an^p+a_1n^{p-1}+\cdots$，$a>0$ とかけるが，一般性を失うことなく $\alpha_1^p=\cdots=\alpha_a^p=1$ と仮定してよい．$m_{a+1}\oplus\cdots\oplus m_k=\sum f_t n^t$ とおく．

<u>1°</u> もしすべての t，$0\leq t\leq p-1$，で $f_t=0$ 又は $n-a\leq f_t<n$ なら a 回の着手で $\overline{m}$ を $(m'_1,\cdots,m'_a,m_{a+1},\cdots,m_k)$ にかえ $m'_1\oplus\cdots\oplus m'_a\oplus m_{a+1}\oplus\cdots\oplus m_k=0$ とできる．

(証) 各 t，$0\leq t\leq p-1$ に対し $f_t=0$ なら $g_t=0$，$f_t\neq 0$ なら $g_t=n-f_t$ とおく．そして整数 $y_1,\cdots,$ を $y_1\oplus\cdots\oplus y_a=\sum_{t=0}^{p-1}g_t n^t$ となるようにとる．これは $0\leq g_t\leq a$ より容易にできる．このとき各 m_i，$1\leq i\leq a$，を $m'_i=\sum_{t>p}\alpha_i^t 2^t+y_i$ にかえる（$\alpha_i^p=1$ より $m_i>m'_i$）．すると $m'_1\oplus\cdots\oplus m'_a\oplus m_{a+1}\oplus\cdots\oplus m_k=0$ となる．

2° もしあるt, $0 \leq t \leq p-1$, で $0 < f_t < n-a$ となるなら，このようなtの中で最大のものをgとする．このとき $\alpha_{a+1}^{g} = \alpha_{a+2}^{g} = \cdots = \alpha_{a+b}^{g} = 1$, $b = f_t$ と仮定してよいが，すると $m_1, \cdots, m_a$ を $m_1', \cdots, m_a'$ にして

$$m_1' \oplus \cdots \oplus m_a' \oplus m_{a+1} \oplus \cdots \oplus m_k = (a+b)n^g + b_1 n^{g-1} + \cdots$$

とできる．

(証) 各t, $g < t < p$, に対し $f_t = 0$ なら $g_t = 0$, $0 < f_t$ なら $g_t = n - f_t$ とおき，整数 $y_1, \cdots, y_a$ を $y_1 \oplus \cdots \oplus y_a = \sum_{t=g+1}^{p-1} g_t n^t + a n^g$, $y_i < 2^p$, となるように決める．そして各 m_i を $m_i' = \sum_{t>p} \alpha_i^t 2^t + y_i$ にかえればよい．

$m_{a+b+1} \oplus \cdots \oplus m_k = \sum f_t' 2^t$ とおく．

3° もしすべてのt, $0 \leq t < g$ で $f_t' = 0$ 又は $n-(a+b) \leq f_t' < n$ なら $m_1, \cdots, m_{a+b}$ を $m_1'', \cdots, m_{a+b}''$ にかえて $m_1'' \oplus \cdots \oplus m_{a+b}'' \oplus m_{a+b+1} \oplus \cdots \oplus m_k = 0$ とできる．

(証) 各t, $0 \leq t < g$ に対し $f_t' = 0$ なら $g_t' = 0$, $0 < f_t'$ なら $g_t' = n - f_t'$ とおき，整数 $y_1', \cdots, y_{a+b}'$ を $y_1' \oplus \cdots \oplus y_{a+b}' = \sum_{t=0}^{g-1} g_t' n^t$, $y_i' < 2^g$ となるように決める．$g_t' \leq a+b$ よりこれはできる．さて各 m_i を $1 \leq i \leq a$ なら $m_i' = \sum \alpha_i^t 2^t$ とおくとき $\sum_{t>g} \alpha_i^t 2^t + y_i' = m_i''$ に，$a < i \leq a+b$ なら $\sum_{t>g} \alpha_i^t 2^t + y_i'$ にかえる．すると $m_1'' \oplus \cdots \oplus m_{a+b}'' \oplus m_{a+b+1} \oplus \cdots \oplus m_k = 0$ となる．($1 \leq i \leq a$ なら $m_i \geq m_i' \geq m_i''$ より m_i から m_i'' に 1回(又は0回)の着手でできる)

以下もし $0 < f_t' < n-(a+b)$ となる f_t' があれば 2° と同じようにし，次に 3° に相当することが成り立つかどうか調べる．成り立てばよいし，成り立たねば再び 2° と同じことをする．すると l 回 ($l \leq n-1$) の着手で $m_1, \cdots,$

m_ℓ を $m_1^*, \cdots, m_\ell^*$ にかえ $m_1^* \oplus \cdots \oplus m_\ell^* \oplus m_{\ell+1} \oplus \cdots \oplus m_k = 0$ とできることがわかる、故に補題5は証明された。

以上で定理Aは証明されたことになる。定理Bの証明もほぼ同じようにしてできる。異なる点は $(0) \in X$, $(0) \in \Omega_0$ が $(1, \cdots, 1) \in X$, $\in \Omega_0$, ただし1は mod n で数えて $\ell-1$ 個、となるだけである。詳しくは[4]を参照されたい。

最後にいろいろ議論していただいた二宮博氏に感謝します。

文　献

[1] 一松 信；石とりゲームの数理，森北出版 (1968)

[2] 山崎洋平；On misére Nim type games, J. Math. Soc. Japan, Vol. 32, 461－475 (1980)

[3] 二宮博；ある種のニムについて，明石高専研究紀要，Vol. 24 119－124 (1982)

[4] 加納幹雄；The game of Nim played by n players，投稿中