

Multipartite Doubles Designs

新居 英高 専

潮 和彦
(Ushio Kazuhiko)

1. Multipartite Doubles Designs(MDD)

n 人ずつの選手からなるチームが m チーム集まって、ダブルスによるテニスの試合をする。どの選手も、他のチームの選手とは λ 回ずつ敵対し、自分のチームの選手とは敵対しないようなダブルス試合の組合せを Multipartite Doubles Design (MDD) とよび、 $MDD(m, n, \lambda)$ と書く ($m \geq 2, n \geq 1, \lambda \geq 1$)。

選手を点に、選手間の敵対を線に対応させれば、 $MDD(m, n, \lambda)$ は、グラフ理論の言葉で言えば、 mn 個の点と $\lambda \binom{m}{2} n^2$ 本の線からなる完全 m 組グラフ $\lambda K_m K_n$ を、互いに線を共有しないように、4個の点と4本の線からなる完全 2 組グラフ $K_{2,2}$ の和に分解すること ($K_{2,2}$ 分解) であるということが出来る。

$MDD(m, n, \lambda)$ が存在するための必要十分条件について述べる。

2. MDD 定理

パラメータ m, n, λ に対し, $MDD(m, n, \lambda)$ が存在するための必要十分条件について, 次の定理が成り立つ。

定理 1. $\exists MDD(m, n, \lambda)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \lambda m(m-1)n^2 \equiv 0 \pmod{8} \\ \text{(ii)} & \lambda(m-1)n \equiv 0 \pmod{2} \\ \text{(iii)} & mn \geq 4 \end{cases}$$

2.1 定理 1 の必要性の証明

パラメータ m, n, λ をもつ $MDD(m, n, \lambda)$ が存在したとする。このとき, mn 人の選手間には $\lambda \binom{m}{2} n^2$ 個の敵対があり, 1 試合当り 4 個の敵対が消化されるから

$$\text{(i)} \quad \lambda m(m-1)n^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

である。さらに, どの選手にも他の $4 - \lambda$ の $(m-1)n$ 人の選手の各々と λ 回ずつの敵対があり, 1 試合に彼は 2 人の選手と敵対するから

$$\text{(ii)} \quad \lambda(m-1)n \equiv 0 \pmod{2}$$

である。また, 1 試合には 4 人の選手が登場するから

$$\text{(iii)} \quad mn \geq 4$$

である。従って, 条件 (i) (ii) (iii) が必要である。

2.2 $K_{2,2}$ 分解

選手 v_1, v_2 が一方のパートナー (ペア) となり, 選手 v_3, v_4 がもう一方のパートナー (ペア) となるとき, この 4 人によ

るダブルスの試合を

$$K_{2,2} = \begin{array}{|c|} \hline v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline v_3 \\ \hline v_4 \\ \hline \end{array}$$

と表わす。 $K_{2,2}$ 分解に関して、次の lemma が成り立つ。

Lemma 1. $2K_4 \rightarrow K_{2,2}$

(証明) $V = \{1, 2, 3, 4\}$ とおく。

$$\begin{aligned} 2K_4 &= \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \\ &= K_{2,2} \oplus K_{2,2} \oplus K_{2,2} \end{aligned}$$

Lemma 2. $2K_5 \rightarrow K_{2,2}$

(証明) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とおく。 base block $K_{2,2} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}$

を 4 回 turning すれば

$$2K_5 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

が得られる。

Lemma 3. $K_{4,4} \rightarrow K_{2,2}$

(証明) $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $V_2 = \{5, 6, 7, 8\}$ とおく。 V_1 から 2 組のペア $(1, 2)$, $(3, 4)$ を用意し, V_2 から 2 組のペア $(5, 6)$, $(7, 8)$ を用意し, ペア同志の対坑試合を異なった 4-4 間で行なえば

$$K_{4,4} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline 8 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline 8 \\ \hline \end{array}$$

が得られる。

Lemma 4. $2K_{5,4} \longrightarrow K_{2,2}$

(証明) $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $V_2 = \{6, 7, 8, 9\}$ とおく。 V_1 から 5 組の $\vee \wedge$ $(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)$ を用意し, V_2 から 2 組の $\vee \wedge$ $(6, 7), (8, 9)$ を用意し, $\vee \wedge$ 同志の対坑試合を異なった 4-4 間で行なえば

$$2K_{5,4} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \textcircled{1} \text{---} \textcircled{6} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{2} \text{---} \textcircled{7} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \oplus \begin{array}{c} \textcircled{1} \text{---} \textcircled{8} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{2} \text{---} \textcircled{9} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \oplus \begin{array}{c} \textcircled{2} \text{---} \textcircled{6} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{3} \text{---} \textcircled{7} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \oplus \begin{array}{c} \textcircled{2} \text{---} \textcircled{8} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{3} \text{---} \textcircled{9} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \oplus \begin{array}{c} \textcircled{3} \text{---} \textcircled{6} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{4} \text{---} \textcircled{7} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \\ \oplus \begin{array}{c} \textcircled{3} \text{---} \textcircled{8} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{4} \text{---} \textcircled{9} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \oplus \begin{array}{c} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{6} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{5} \text{---} \textcircled{7} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \oplus \begin{array}{c} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{8} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{5} \text{---} \textcircled{9} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \oplus \begin{array}{c} \textcircled{5} \text{---} \textcircled{6} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \text{---} \textcircled{7} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \oplus \begin{array}{c} \textcircled{5} \text{---} \textcircled{8} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{1} \text{---} \textcircled{9} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \end{array}$$

が得られる。

2.3 MDD の拡張 lemma

MDD に関して, 次の拡張 lemma が成り立つ。

Lemma 5. $\exists MDD(m, n, \lambda) \Leftrightarrow \exists MDD(m, \alpha n, \lambda)$

(証明) $V_i = \{i_1, i_2, \dots, i_{\alpha n}\}$ ($i=1, 2, \dots, m$) とおく。各 4-4 に対して, α 人ずつの組を n 組 $(i_1, i_2, \dots, i_{\alpha}), (i_{\alpha+1}, i_{\alpha+2}, \dots, i_{2\alpha}), \dots, (i_{(\alpha-1)\alpha+1}, i_{(\alpha-1)\alpha+2}, \dots, i_{\alpha n})$ を用意する。 $\lambda_m K_n \longrightarrow K_{2,2}$ より, この α 人ずつの組を 1 つの点とみなせば, $\lambda_m K_{\alpha n} \longrightarrow K_{2\alpha, 2\alpha}$ が得られる。

Lemma 3 と同様にし, $K_{2\alpha, 2\alpha} \longrightarrow K_{2,2}$ が成り立つ。従って,

$\lambda_m K_{\alpha n} \longrightarrow K_{2,2}$ が得られる。

Lemma 6. $\exists MDD(m, n, \lambda) \Leftrightarrow \exists MDD(m, n, \alpha \lambda)$

(証明) $MDD(m, n, \lambda)$ の $b = \lambda m(m-1)n^2/8$ 個の試合を λ 回ずつくりかえせば, $MDD(m, n, \lambda)$ が得られる。

2.4 定理1の十分性の証明

定理1の必要条件 (i) (ii) (iii) は, また, 十分条件でもあることを証明する。(i) (ii) (iii) をみたす λ - \mathcal{D} m, n, λ は,

① $n: \text{even}$

② $n: \text{odd}, \lambda: \text{odd}, m \equiv 1 \pmod{8}$

③ $n: \text{odd}, \lambda \equiv 0 \pmod{4}, mn \geq 4$

④ $n: \text{odd}, \lambda \equiv 2 \pmod{4}, m \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{4}$

の4通りに分類される。 MDD に関する (2, 次の lemma が成り立つ。

Lemma 7. $n: \text{even} \Rightarrow \exists MDD(m, n, \lambda=1)$

(証明) $V_i = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ ($i=1, 2, \dots, m$) とおく。各 $4-4$ に対して, $\frac{n}{2}$ 組のペア $(i_1, i_2), (i_3, i_4), \dots, (i_{n-1}, i_n)$ を用意して, ペア同志の対坑試合を異なった $4-4$ 間で行なえば, $MDD(m, n, \lambda=1)$ が得られる。

Lemma 8. $m \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow \exists MDD(m, n=1, \lambda=1)$

(証明) $m=8t+1$ ($t \geq 1$) とおく。 $V = \{1, 2, \dots, 8t+1\}$ に対して, t 個の base block



$m-1$ 回 turning すれば, $MDD(m, n=1, \lambda=1)$ が得られる。

Lemma 9. $\lambda=4, mn \geq 4 \Rightarrow \exists \text{MDD}(m, n, \lambda=4)$

(証明) $V_i = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ ($i=1, 2, \dots, m$) とおく。各 $4-4$ 対にして、 n 組のペア $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_n, i_1)$ を用意して、ペア同志の対抗試合を異なった $4-4$ 間で行なえば、 $\text{MDD}(m, n, \lambda=4)$ が得られる。

Lemma 10. $\lambda=2, m \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow \exists \text{MDD}(m, n=1, \lambda=2)$

(証明) $m=4t$ ($t \geq 1$) とおく。 $V = \{1, 2, \dots, 4t\}$ に対して、4人ずつの組を t 組 $(1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), \dots, (4t-3, 4t-2, 4t-1, 4t)$ 用意する。

$$2K_{4t} = \overbrace{2K_4 \oplus 2K_4 \oplus \dots \oplus 2K_4}^t \oplus \overbrace{K_{4,4} \oplus K_{4,4} \oplus \dots \oplus K_{4,4}}^{2\binom{t}{2}}$$

と分解される。Lemma 1 より、4人の組の内部で $2K_4 \rightarrow K_{2,2}$ が成り立つ。また、Lemma 3 より、4人ずつの組同志で $K_{4,4} \rightarrow K_{2,2}$ が成り立つ。従って、 $\text{MDD}(m, n=1, \lambda=2)$ が得られる。

Lemma 11. $\lambda=2, m \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow \exists \text{MDD}(m, n=1, \lambda=2)$

(証明) $m=4t+5$ ($t \geq 0$) とおく。 $V = \{1, 2, \dots, 4t+5\}$ に対して、5人の組を 1 組 $(1, 2, 3, 4, 5)$ と、4人ずつの組を t 組 $(6, 7, 8, 9), (10, 11, 12, 13), \dots, (4t+2, 4t+3, 4t+4, 4t+5)$ 用意する。

$$2K_{4t+5} = 2K_5 \oplus \overbrace{2K_4 \oplus \dots \oplus 2K_4}^t \oplus \overbrace{2K_{5,4} \oplus \dots \oplus 2K_{5,4}}^t \oplus \overbrace{K_{4,4} \oplus \dots \oplus K_{4,4}}^{2\binom{t}{2}}$$

と分解される。Lemma 2 より、5人の組の内部で $2K_5 \rightarrow K_{2,2}$ が成り立つ。Lemma 1 より、4人の組の内部で $2K_4 \rightarrow K_{2,2}$ が成り立つ。Lemma 4 より、5人と4人の組同志で $2K_{5,4} \rightarrow$

$K_{2,2}$ が成り立つ。Lemma 3 より, 4人ずつの組同志で $K_{4,4}$
 $\rightarrow K_{2,2}$ が成り立つ。従って, $MDD(m, n=1, \lambda=2)$ が得られる。

拡張 lemma (Lemma 5, Lemma 6) を上記の Lemma 7 ~ Lemma
 11 に適用すれば, ① ~ ④ のいずれの場合にも $MDD(m, n, \lambda)$ が
 得られる。(定理 1 の証明終り)

2.5 DD 定理

$MDD(m, n, \lambda)$ は, 特に $n=1$ の場合には, 単に Doubles Design
 (DD) とよび, $DD(m, \lambda)$ と書く。次の定理が成り立つ。

定理 2 $\exists DD(m, \lambda)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \lambda m(m-1) \equiv 0 \pmod{8} \\ (ii) & \lambda(m-1) \equiv 0 \pmod{2} \\ (iii) & m \geq 4. \end{cases}$$

3. References

- [1] C.Huang and A.Rosa, On the existence of balanced bipartite designs, Utilitas Math. 4(1973), 55-75.
- [2] C.Huang, On the existence of balanced bipartite designs II, Discrete Math. 9(1974), 147-159.
- [3] K.Ushio, Bipartite decomposition of complete multipartite graphs, Hiroshima Math. J. 11(1981), 321-345.
- [4] K.Ushio, On balanced claw designs of complete multi-partite graphs, Discrete Math. 38(1982), 117-119.
- [5] 潮 和彦, 完全 m 組グラフの balanced bipartite design
 について, 日本数学会昭和 57 年度年会応用数学分科会
 講演予稿集, 102-105.