数理解析研究所講究録
472巻 1982年 143-164



# 代数的オー積分存在のための必要条件

東大理.天文　吉田春夫
Yoshida Haruo

| |
|---|
| 問題：与えられた力学系の方程式が完全積分可能であるか否か，すなわち十分な数の独立な1価のオー積分を有するか否かを出来るだけ統一的な有限の手続きで判定し，積分可能ならば実際に一般解を求める手続きを与え，積分不可能ならばそれが何故であるかを答えること |

についての解答は今日、有限自由度（常微分方程式系），無限自由度（偏微分方程式系）いずれの場合においても得られておらず，解答可能であるという保証もない。有限自由度のHamilton系に限れば前世紀末から今世紀を通して，与えられた積分可能系に「十分近い」系の積分可能性は比較的十分に研究された。（Poincaré, Birkhoff, Whittaker, Siegel, Arnold）しかしこれらの研究においては摂動論的手法，すなわち微小パラメーター $\mu$ による展開によっているため，ある与えられた $\mu=\mu_0$ についての情報は何も与えないのが普通である。

本稿では右辺が有理式からなり、ある種の相似不変性をもつ有限自由度の力学系が十分な数の代数的第一積分を持つための必要条件を与える(§6)。そして1つの最も重要な例として古典的な三体問題が一般に代数的に積分可能でないことの証明をBruns(1887)によるものとは全く独立に与える。(§7)

## §1. 相似不変系と解の特異点での展開

右辺が $x_1,\cdots,x_n$ の有理式からなる自励系

$$\frac{d}{dt}x_i = F_i(x_1,\cdots,x_n) \qquad i=1,\cdots,n \tag{1.1}$$

を考える。今ある有理数の組 $\{g_1,\cdots,g_n\}$ が存在して変換

$$t\to\alpha^{-1}t\ ,\quad x_1\to\alpha^{g_1}x_1,\ \cdots,\ x_n\to\alpha^{g_n}x_n \tag{1.2}$$

によって(1.1)が不変，すなわち $x_1,\cdots,x_n,\alpha$ についての恒等式系

$$F_i(\alpha^{g_1}x_1,\cdots,\alpha^{g_n}x_n)=\alpha^{g_i+1}F_i(x_1,\cdots,x_n) \quad (i=1,\cdots,n) \tag{1.3}$$

が成り立つ時(1.1)を相似不変系と呼ぶことにする。(1.3)を $\alpha$ で微分して $\alpha=1$ とおけば

$$\sum_{j=1}^{n} g_j x_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1,\cdots,x_n)=(g_i+1)F_i(x_1,\cdots,x_n) \tag{1.4}$$

を得るが(1.4)は $F_i(x)$ から $\{g_1,\cdots,g_n\}$ を決定する線形方程式

と見なすことが出来る。よって函数行列式

$$\det_{1\leqq i,j\leqq m}\left[x_j\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1,\cdots,x_m)-\delta_{ij}F_i(x_1,\cdots,x_m)\right] \tag{1.5}$$

が恒等的に0でなければ，系(1.1)に対して $\{g_1,\cdots,g_m\}$ の選択は，もしその存在を仮定すれば一意的である。(1.1)が線形の時，(1.2)なる相似変換は存在し得ないので，本稿の意味での「相似不変系」は非線形な系に特有の概念であるといえる。

相似不変系は一般に $c_1,\cdots,c_m$ を定数とする

$$x_1=c_1t^{-g_1},\quad\cdots\cdots,\quad x_m=c_mt^{-g_m} \tag{1.6}$$

なる形の特殊解を有する。実際(1.3)で $x_i=c_i$，$\alpha=t^{-1}$ とおいて得られる

$$F_i(c_1t^{-g_1},\cdots\cdots,c_mt^{-g_m})=t^{-g_i-1}F_i(c_1,\cdots,c_m) \tag{1.7}$$

に注意すれば，$c_1,\cdots,c_m$ が連立代数方程式

$$F_i(c_1,\cdots,c_m)=-g_ic_i\qquad i=1,\cdots,m \tag{1.8}$$

の1組の解であれば，(1.6)は(1.1)の解となる。(1.8)が解を持たない例外的な場合は以下の考察の対象とはしない。また(1.8)の解は一般に複素数となるので，(1.6)なる特殊解は $t$ の複素平面上で定義された複素解析函数とみることにする。

相似不変系(1.1)の特殊解(1.6)を1つ fix して変数 $z_1, \cdots, z_n$ を

$$x_i = (c_i + z_i)t^{-g_i} \qquad i = 1, \cdots, n \tag{1.9}$$

で定義する。この時、(1.6)が(1.1)の解であることに注意すれば

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(z_i t^{-g_i}) &= F_i[(c_1+z_1)t^{-g_1}, \cdots, (c_n+z_n)t^{-g_n}] - F_i[c_1 t^{-g_1}, \cdots, c_n t^{-g_n}] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(c_1 t^{-g_1}, \cdots, c_n t^{-g_n}) z_j t^{-g_j} \\ &\quad + \sum_{j,k} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k}(c_1 t^{-g_1}, \cdots, c_n t^{-g_n}) z_j z_k t^{-g_j - g_k} \\ &\quad + O(z^3)\end{aligned} \tag{1.10}$$

を得るが(1.3)を $x_j$ 達で偏ビブンして $x_i = c_i$, $\alpha = t^{-1}$ とおいて得られる

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(c_1 t^{-g_1}, \cdots, c_n t^{-g_n}) = t^{-g_i+g_j-1} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(c_1, \cdots, c_n) \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k}(c_1 t^{-g_1}, \cdots, c_n t^{-g_n}) = t^{-g_i+g_j+g_k-1} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k}(c_1, \cdots, c_n) \tag{1.12}$$

に注意すれば(1.10)は

$$t\frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} K_{ij} z_j + \sum_{j,k} L_{ijk} z_j z_k + O(z^3) \tag{1.13}$$

但し

$$K_{ij} \stackrel{\mathrm{def}}{\equiv} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(c_1, \cdots, c_n) + \delta_{ij} g_i , \tag{1.14}$$

$$L_{ijk} \stackrel{\mathrm{def}}{\equiv} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k}(c_1, \cdots, c_n) \quad , \text{ etc.} \tag{1.15}$$

と書きなおされる。(1.13)の右辺には $t$ が現れない。$n \times n$

の複素定数行列 $K=(K_{ij})$ の固有値 $\rho_1,\cdots,\rho_n$ を Kowalevski の exponent (あるいは単に exponent) と呼ぶことにし，その中で $\rho_1,\cdots,\rho_k$ まではその実部が正，$\rho_{k+1},\cdots,\rho_n$ はその実部が0または負であるとする。この時，一般の(1.13)の形の非線形方程式に対して次の結果が知られている。

定理 (Poincaré, Picard)

(i) $K=(K_{ij})$ は Jordan 標準形が対角行列である

(ii) $\rho_1,\cdots,\rho_k$ の間に $\{m_1,\cdots,m_k\}$ を非負整数でかつ $\sum_{j=1}^{k} m_j \geq 2$ を満たすとする時

$$\rho_i = \sum_{j=1}^{k} m_j \rho_j \qquad i=1,\cdots,k \tag{1.16}$$

なる有理的な関係は決して存在しない．

と仮定する。この時 (1.13) の $t=0$ の近傍で $k$ 個の任意定数 $I_{\rho_1},\cdots,I_{\rho_k}$ を含む解

$$z_i = P_i(I_{\rho_1}t^{\rho_1},\cdots\cdots,I_{\rho_k}t^{\rho_k}) \qquad i=1,\cdots,n \tag{1.17}$$

が存在する。但し $P_i(u_1,\cdots,u_k)$ は $P_i(0,\cdots,0)=0$ で原点の十分近傍で収束する Taylor 級数

$$P_i(u_1,\cdots,u_k) = \sum_{|l|=1}^{\infty} a_{l_1\cdots l_k} u^{l_1}\cdots u^{l_k} \tag{1.18}$$

を表わす。 end.

Remark

条件(ii)は (1.17) なる形の解を許すための十分条件であって，

必要条件ではないことに注意する。実際(1.16)なる有理関係が複数個存在し、かつ(1.17)なる解を許す場合がある。(1.17)の形の解があるかどうかを見るためには，(1.18)の展開係数$a_{l_1\cdots l_n}$が順に矛盾なく，方程式(1.13)から決定されるかどうかを見ればよい。展開係数が必ず矛盾なく定まるための十分条件が(i)と(ii)で与えた条件である。矛盾を生ずる時には(1.17)の代わりに$\log t$を含む表式が必要となる(Siegel)がここでは立ち入らないことにする。 end.

我々の問題に戻ると相似不変系(1.1)に対して，k個の任意定数$I_{\rho_1},\cdots,I_{\rho_k}$を含む解(特異点での展開)

$$x_i = t^{-g_i}\{c_i + P_i(I_{\rho_1}t^{\rho_1},\cdots,I_{\rho_k}t^{\rho_k})\} \quad k\leqq n \tag{1.19}$$

が得られたことになる。

## §2. 代数的第一積分のreduction

相似不変系(1.1)がtを陽に含まない多項式からなる第一積分

$$\Phi(x_1,\cdots,x_n) = \text{const.} \tag{2.1}$$

を有したとする。(1.1)は変換(1.2)によって不変であるから，(2.1)のΦに(1.2)なる変換を施した表式

$$\Phi' = \Phi(\alpha^{g_1}x_1,\cdots,\alpha^{g_n}x_n) = \text{const.} \tag{2.2}$$

は再び(1.1)の第一積分となるはずである。今、一般に、

$t, x_1, \cdots, x_n$ の函数（多項式，有理式）$\phi = \phi(t, x_1, \cdots, x_n)$ が変換(1.2)で $\alpha^M$ 倍される，すなわち

$$\phi(\alpha^{-1}t, \alpha^{g_1}x_1, \cdots, \alpha^{g_n}x_n) = \alpha^M \phi(t, x_1, \cdots, x_n) \tag{2.3}$$

なる $\alpha, x_1, \cdots, x_n$ についての恒等式が成り立つ時，$\phi$ を重みつき同次函数（多項式，有理式），M をその重みつき次数と呼ぶことにする。積分(2.2)を重みつき同次多項式の有限項の和

$$\Phi' = \sum_m \alpha^m \Phi_m(x_1, \cdots, x_n) = \mathrm{const} \tag{2.4}$$

に書く。但し $\Phi_m$ の重みつき次数は m とする。変換(1.2)で $\alpha$ は任意であったから，(2.4)は任意の $\alpha$ で成立しなければならない。よって(2.4)の各 $\Phi_m$ それ自身が第一積分なるべきことが結論される。同じ結論は $\Phi$ が整関数，すなわち収束半径が無限大の Taylor 級数

$$\Phi = \sum^{\infty} A_{l_1 \cdots l_n} x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n} = \mathrm{const.} \tag{2.5}$$

で与えられている場合にもなされる。

一般に $\Phi(x_1, \cdots, x_n)$ が $x_1, \cdots, x_n$ の代数函数である第一積分（代数的第一積分），すなわち

$$\Phi(x_1, \cdots, x_n) = \mathrm{const.} = a \tag{2.6}$$

が有理化されて

$$a^l + \phi_1(x_1, \cdots, x_n)a^{l-1} + \cdots + \phi_l(x_1, \cdots, x_n) = 0 \tag{2.7}$$

但し $\phi_k$ $(k=1, \cdots, l)$ は $x_1, \cdots, x_n$ の有理式

と書ける時，(1.1)の右辺が $x_1, \cdots, x_n$ の有理式という仮定から，

(2.7)の各 $\Phi_k$ 自身が第一積分なることが結論される。そして(1.1)の相似変換(1.2)に対する不変性より，多項式積分(2.1)の場合と同じ様な論理で、それらの有理式積分は重みつき同次多項式の商からなる第一積分

$$\Phi_m(x_1,\cdots,x_n)\big/\Phi_{m'}(x_1,\cdots,x_n)=\text{const.}\tag{2.8}$$

から四則算法によって合成されることが証明できる（Forsyth, Whittaker）。つまり右辺が有理式からなる相似不変系に対する代数的第一積分の存在を議論するには，重みつき同次有理式なる第一積分(2.8)の存在のみを議論すればよい。

## §3. Kowalevski の exponent に関する予備的な定理

本稿の主目的からはやや離れるが，予備的な定理を証明なしで述べておく。§2で相似不変系の任意の代数的第一積分の存在は，重みつき同次有理式なる第一積分の存在に帰着されることを述べた。その第一積分の重みつき次数は次の様に Kowalevski の exponent に反映する。

定理 1 (Yoshida)

相似不変系(1.1)が $\Phi(x_1,\cdots,x_n)=\text{const.}$ なる重みつき次数 M の第一積分を有したとする。この時(1.8)の一組の解 $\{c_1,\cdots,c_n\}$ に対して

$$\operatorname{grad}\Phi(c_1,\cdots,c_n)\stackrel{\text{def}}{\equiv}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(c_1,\cdots,c_n),\cdots,\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(c_1,\cdots,c_n)\right]\tag{3.1}$$

が有限確定でかつ零ベクトルでなければ，$\rho = M$ は対する Kowalevski の exponent として現われる。

特に Hamiltonian を有理式とする Hamilton 系

$$\frac{d}{dt}q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d}{dt}p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad i=1,\cdots,l \ (2l=n) \tag{3.2}$$

が $t \to \alpha^{-1}t$，$q_i \to \alpha^{g_i}q_i$，$p_i \to \alpha^{g_{i+l}}p_i$ で不変なる相似不変系である時，Hamiltonian 自身．重みつき同次有理式であると仮定してよいことが言える。（もしそうでなければ系は decouple する。）その Hamiltonian の重みつき次数を $h$ とすれば $g_i + g_{i+l} = h-1 \ (i=1,\cdots l)$ となっている。

<u>定理2</u>（Yoshida）

Hamiltonian の重みつき次数を $h$ とする相似不変系 (3.2) が $\Phi(q_1,\cdots;q_l,p_1,\cdots;p_l) = \text{const.}$ なる重みつき次数 $M$ の才一積分を有したとする。この時 (1.8) の一組の解 $\{c_1,\cdots,c_n\}$ に対して $\mathrm{grad}\,\Phi(c_1,\cdots;c_n)$ が有限確定，かつ零ベクトルでなければ $\rho = h-1-M$ が対する Kowalevski の exponent として現われる。（定理1より，$\rho = M$ 及び $\rho = h-1-M$ が pair で現われることになる。）

<u>Remark</u>

特に $\Phi = H$（Hamiltonian 自身）とすると，$\rho = h$ 及び

$\rho=-1$ が $\{c_1,\cdots,c_{2l}\}$ の選択には無関係に exponent として現われることが結論される。実は $\rho=-1$ はすべての相似不変系に共通して現われることが証明できる。

## §4. 例題

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+q_1^2q_2+\frac{\epsilon}{3}q_2^3 \qquad \epsilon:\text{パラメーター} \tag{4.1}$$

を Hamiltonian とする Hamilton 系 (3.2) は、相似変換

$$t\to\alpha^{-1}t\ ,\quad \mathbb{q}\to\alpha^2\mathbb{q}\ ,\quad \mathbb{p}\to\alpha^3\mathbb{p} \tag{4.2}$$

で不変。特殊解 (1.6) は

$$q_1=c_1t^{-2},\quad q_2=c_2t^{-2}\ ,\quad p_1=c_3t^{-3}\ ,\quad p_2=c_4t^{-3} \tag{4.3}$$

で $c_1$, $c_2$ は2通りの選択

$$\text{(i)}\ c_1=\pm\sqrt{9(2-\epsilon)}\ ,\quad c_2=-3 \tag{4.4}$$

$$\text{(ii)}\ c_1=0\ ,\quad c_2=-6/\epsilon \tag{4.5}$$

があり、$c_3$, $c_4$ は $c_3=-2c_1$, $c_4=-2c_2$ で自動的に決められる。

(1.14) なる行列 $K=(K_{ij})$ の特性多項式は

$$\det[\rho I-K]=\begin{cases}(\rho+1)(\rho-6)\{\rho^2-5\rho+6(2-\epsilon)\} & \text{case (i)} \quad (4.6)\\ (\rho+1)(\rho-6)\{\rho^2-5\rho+6(1-2/\epsilon)\} & \text{case (ii)} \quad (4.7)\end{cases}$$

と (i), (ii) の場合計算される。

今、(i) の形の特殊解について考えると $\epsilon<2$ の時

$$\rho^2-5\rho+6(2-\epsilon)=0 \tag{4.8}$$

の2根 $\rho_1$, $\rho_2$ の実部は共に正となる。そして $\rho_1$, $\rho_2$ が共に

無理数，もしくは虚数となる場合には $K=(K_{ij})$ は対角化可能（＝Jordan標準形が対角行列）であり，$P_1, P_2$, および $P_3=6$ の間に(1.16)なる有理関係は存在し得ない。よって(1.19)の展開

$$q_i = t^{-2}\{C_i + P_i( I_{P_1}t^{P_1},\ I_{P_2}t^{P_2},\ I_6 t^6)\} \tag{4.9}$$

が可能である。今までの議論で $t\to(t-t_0)$ ［$t_0$：任意定数］と置きかえても全く変更を要しないことから，(4.9)は一般解すなわち 4つの任意定数を含む解の特異点での展開であると言える。

この系の Hamiltonianは重みつき次数 6 の重みつき同次多項式であるから，§3. 定理 2 の remark より $P=-1$ および $P=6$ が常に exponent に現われる。またパラメーター $\epsilon$ の特殊な値で次の H と独立な重みつき同次多項式積分が存在する：

$\epsilon=1$ : $\Phi = P_1P_2 + \frac{1}{3}q_1^3 + q_1q_2^2$ ，　重みつき次数＝6

$\epsilon=6$ : $\Phi = 4P_1(P_1q_2-P_2q_1)+4q_1^2q_2^2+q_1^4$ ，　〃 ＝8

$\epsilon=16$ : $\Phi = \frac{1}{4}P_1^4+q_1^2q_2P_1^2-\frac{1}{3}q_1^3P_1P_2-\frac{1}{18}q_1^6-\frac{1}{3}q_1^4q_2^2$ ，　〃 ＝12

これらの積分に対して grad$\Phi(C)$ を non-zero とする $\{C_1, C_2\}$ の選択(i)(ii) [(4.4), (4.5)] に対して定理2より $P=M$, $P=6-M$ が Kowalevski の exponent に現われる。実際(4.6), (4.7) から

$\epsilon=1$ : $\det(PI-K) = (P+1)^2(P-6)^2$　　case (ii)

$\epsilon=6$ : $\det(PI-K) = (P+3)(P+1)(P-6)(P-8)$　　case (i)

$\epsilon=16$ : $\det(PI-K) = (P+7)(P+1)(P-6)(P-12)$　　case (i)

なることが確められる。

## §5. 完全積分可能なHamilton系

一般に必ずしも相似不変系とは限らない自励系(1.1)が積分可能である、ということを定義するには若干の困難が伴う。$(n-1)$個の独立な$t$を含まない一価(≒無限多価でない)の第一積分が存在すれば積分可能であるといってさしつかえない。(十分条件) しかしJacobiの最終乗式を許すような系や、一般のHamilton系の場合、積分可能といえども$(n-1)$個の独立な一価の積分が存在するような系は極めて稀である。(そのような系は完全縮退した系と呼ばれる。例:Keplerの二体問題,等方調和振動子) 一般論はさておき,自由度$l$のHamilton系に話を限るならば,次の定義は最も多くの状況をcoverしている。($n=2l$)

| |
|---|
| <u>定義</u> 自由度$l$のHamilton系(自励)が積分可能<br>$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 互いに包合系をなす$l$個の一価の$t$を含まない独立な第一積分が存在する。 |

Liouvilleは$l$個の一価,包合系積分$\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_l(=H)$の存在のもとに,さらに$(l-1)$個の一般には多価(無限多価)の第一積分が導かれることを次の様に示した。

今,母函数$S=S(q_1,\cdots,q_l,P_1^*,\cdots,P_l^*)$によって正準変換

$(q, p) \longrightarrow (q^*, p^*)$ を

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad q_i^* = \frac{\partial S}{\partial p_i^*} \qquad i = 1, \cdots, l \tag{5.1}$$

によって定義し、新しい運動量 $p_i^*$ 達が $\Phi_i(q, p)$ 達に等しくなる様にする。その様な母函数 $S$ は実際に存在し、次の様に求められる。今

$$\Phi_i(q, p) = p_i^* \tag{5.2}$$

を $p_i$ について解いた表式を

$$p_i = p_i(q, p^*) \tag{5.3}$$

とするとき、$\Phi_i$ 達が包合系をなすことから微分形式

$$\sum_{i=1}^{l} p_i(q, p^*) dq_i \tag{5.4}$$

は $q$ の函数として全微分 (closed 1-form) なることを示すことができる。そこで $S$ として (5.4) の積分

$$S = \int \sum_{i=1}^{l} p_i(q, p^*) dq_i \tag{5.5}$$

をとればよい。(山内：一般力学)　正準変数 $(q^*, p^*)$ で書いた Hamilton 方程式

$$\frac{d}{dt} q_i^* = \frac{\partial H^*}{\partial p_i^*}, \quad \frac{d}{dt} p_i^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i^*} \tag{5.6}$$

の解は、変換された Hamiltonian $H^*$ が

$$H^*(q^*, p^*) = H(p(q^*, p^*), q(q^*, p^*)) = p_l^* \tag{5.7}$$

なることから

$$p_i^* = \text{const.} = \alpha_i \qquad (i = 1, \cdots, l)$$

$$q_i^* = \text{const.} = \beta_i \quad (i = 1, \cdots, l-1) \quad q_l^* = t + \text{const.} = t + \beta_l \tag{5.8}$$

と書ける。つまり旧変数$(q,p)$で書けば，$l$個の積分

$$\Phi_i(q,p) = \text{const.} = \alpha_i \qquad (i=1,\cdots,l) \tag{5.9}$$

に加えて$(l-1)$個のさらに独立な第一積分

$$q_i^* = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \int \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial P_k(q,\alpha)}{\partial \alpha_i} dq_k = \text{const.} = \beta_i \quad (i=1,\cdots l-1) \tag{5.10}$$

が導かれたことになる。この$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \text{const.}$なる第一積分は一般には$(q,p)$の函数として無限多価となる。

今、特に相似不変なHamilton系が$\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_l(=H)$なる重みつき同次有理式からなる第一積分を有したとする。(5.9)の分母を払った

$$\Psi_i(q,p) = 0 \qquad i=1,\cdots,l$$

は，$2l$次元の複素phase space内の$l$次元の代数多様体を定める。そして(5.10)は(5.9)を各$\alpha_k$で微分して得られる

$$\frac{\partial P_k(q,\alpha)}{\partial \alpha_i} = (-1)^{k+i} \frac{\partial(\Phi_1,\cdots,\Phi_{i-1},\Phi_{i+1},\cdots,\Phi_l)}{\partial(P_1,\cdots,P_{k-1},P_{k+1},\cdots,P_l)} \Big/ \frac{\partial(\Phi_1,\cdots,\Phi_l)}{\partial(P_1,\cdots,P_l)}$$

に注意すれば，integrandが$(q,p)$の有理式からなるclosed 1-formの積分となる。この様な積分は今日、特にPicard積分と呼ばれ，代数曲線上で定義されるAbel積分の自然な一般化となっている。そして特に(5.10)の積分の始点を各$q_k$について0または$\infty$とすれば，$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \text{const.}$は再び$q, p$の重みつき同次函数となり，$\Phi_i$の重みつき次数を$m_i$とすれば$(m_l = h$とする$)$，

$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ は $h-1-m_i$ をその重みつき次数として持つことがわかる。

## §6 代数的第一積分存在のための必要条件

一般性を失うことなく、§4の例題の系について主張を述べる。主張することは Hamiltonian (4.1) と独立な第一積分の存在と、無理数 or 虚数の Kowalevski の exponent の存在は矛盾する、すなわち

**主定理**

$H=\text{const.}$ と独立な $\Phi=\text{const.}$ なる代数的第一積分が存在するためには、可能な Kowalevski の exponent はすべて有理数でなければならない。

(証明の outline)

§5で述べたことから $\Phi(q,p)=\text{const.}$ なる重みつき同次有理式の第一積分が存在したとすると

$$\Phi(q,p)=\alpha_1 \quad , \quad H(q,p)=\alpha_2 \tag{6.1}$$

で決められる2次元代数多様体(代数曲面)上の Picard 積分で与えられる第一積分

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=\int^{(q_1,q_2)}\frac{p_2dq_1-p_1dq_2}{\frac{\partial(\Phi,H)}{\partial(p_1,p_2)}}=\text{const.}=\beta_1 \tag{6.2}$$

を導く。ここで $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ は独立に与えることの出来る3つの

任意定数である。$\Phi$の重みつき次数(必然的に整数となる)を$m$とすれば，Hの重みつき次数が6なることから，$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$は$5-m$(整数)を重みつき次数としてもつ。一方，このHamilton系は，$\rho_1, \rho_2$がともに無理数or虚数とした時，(4.9)なる解の展開表式をを持っている。($\rho_i$の展開式は$q_i$をtで微分する。)

(4.9)を$I_{\rho_i} t^{\rho_i}$ $(i=1,2,3)$について逆にとけば(Taylor級数の反転) $I_{\rho_i} t^{\rho_i}$は$q, p, t$の函数として重みつき次数が0の同次式となる。よって$I_{\rho_i}$を$q, p, t$の函数として見たとき，$I_{\rho_i}$は$\rho_i$をその重みつき次数として持つ。

Hamilton系(4.1)に対する3つの任意定数の組$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$と$I_{\rho_1}, I_{\rho_2}, I_6$の間には函数関係があるはずである。実際，H，$\Phi$，及び$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$に解の展開表式(4.9)を代入した時，第一積分なることからtを含み得ず，$I_{\rho_1}, I_{\rho_2}, I_6$のみの函数となるべきである。特にH，$\Phi$は$q, p$の有理式であるから，簡単な考察から，(4.9)を代入した時，$I_{\rho_1}, I_{\rho_2}, I_6$の有理式なるべきことが言える。

今，$\rho_1, \rho_2$は共に無理数or虚数とすると，重みつき次数を比較することによって，$I_{\rho_1}, I_{\rho_2}$はH，$\Phi$の表式に寄与できるとしても，$(I_{\rho_1} \cdot I_{\rho_2})$なる積の形でのみしか寄与できないことが容易に言える。実は$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$においても$I_{\rho_1}, I_{\rho_2}$はその積$(I_{\rho_1} \cdot I_{\rho_2})$でしか寄与できないことが言える(*)。よってH，$\Phi$，$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$は

2つの任意定数 $I_6$ 及び $(I_{\rho_1} \cdot I_{\rho_2})$ のみの函数となり、H. $\Phi$ $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ の独立性がくずれる。つまり $\Phi = \mathrm{const.}$ の存在の仮定は誤りであることが結論される。

(*)の理由

$\rho_1, \rho_2$ は $\Phi(p, q) = \alpha_1$, $H(p, q) = \alpha_2$ の終結式を考えることによって $q_1, q_2$ の代数函数となる。よって $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ の integrand を $q_1, q_2$ の函数としてみた時その 0 or ∞ 近傍の展開において $q$ の無理数 or 虚数べきを含みえない(特異点は代数的特異点に限られる)。さて $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ の表式に $I_{\rho_1}$、$I_{\rho_2}$ がその積以外で寄与できるとすれば、$q$ の無理数 or 虚数べきが $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ の展開に現われるべきであることがわかるが、上に述べたことからその様なことはない。($\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ が第3種の Picard 積分となり log を必要とする場合も同じ。log の引数は重みつき次数が 0 とならなければならない。) よって $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ は $I_6$, 及び $(I_{\rho_1} \cdot I_{\rho_2})$ の函数なることが言えた。 (*)の理由 end

以上の考察は $\mathrm{Re}(\rho_1)$, $\mathrm{Re}(\rho_2)$ ともに正という仮定のもとになされた。今 $\mathrm{Re}(\rho_2) \leqq 0$ であり $\rho_1$ が正の無理数となる時を考える。この時は(4.9)の代わりに

$$q_i = t^{-2}\{ c_i + P_i^*(I_{\rho_1} t^{\rho_1}, I_6 t^6)\} \tag{6.3}$$

となる。この様に $I_6$, $I_{\rho_1}$ (及び $t_0$) と解の展開に含まれる任意定数の数が、一般解のそれに対して1つ減少しているという

事は，一般解，すなわち$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$が全く任意独立となる解は(6.3)の様な解の展開を有しない事を意味している。つまり，$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$のうち１つに特殊な値を与えるか(例えば$\beta_1=0$)あるいは$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$の間に１つの函数関係があることになる。そこで展開(6.3)を$H, \Phi, \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$に代入すれば，先程と同じ議論で$I_6$のみの函数となってしまう。つまり$H, \Phi, \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$で１つのみが独立であることを意味する。よって$\rho_1$＝無理数，は$H$と独立な$\Phi$の存在を否定する。

(証明の outline END)

<u>Remark</u>

$\rho_1, \rho_2$が共に有理数となる場合でも，解の展開に$\log t$が必要となる場合には$H$と独立な$\Phi=\mathrm{const.}$の存在が否定される事が予想される。現に，現存する(≒筆者が知っている)すべての積分可能系について，解の特異点での展開は，高々七の puiseux 級数となっている。しかし$\log t$が現われる場合，同様に導入される$I_{\rho_1}, I_{\rho_2}$の一方は重みつき次数が定義できなくなるので，§1のより一般的な考察が必要であろうと思われる。

## §7 古典的な三体問題

古典的な３質点(質量を$m_1, m_2, m_3$とする)のニュートンの方

有引力による運動は Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\mathbb{p}_i^2}{m_i} - \frac{m_1 \cdot m_2}{|\mathbb{q}_1-\mathbb{q}_2|} - \frac{m_2 \cdot m_3}{|\mathbb{q}_2-\mathbb{q}_3|} - \frac{m_3 \cdot m_1}{|\mathbb{q}_3-\mathbb{q}_1|} \qquad (7.1)$$

で与えられる。簡単のため運動は一平面内で起こるとし，補助従属変数 $S_{12}, S_{23}, S_{31}$ を

$$S_{ij} = 1/|\mathbb{q}_i-\mathbb{q}_j| \qquad (7.2)$$

で定義すれば，運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\mathbb{q}_i = \frac{\mathbb{p}_i}{m_i} \quad , \quad \frac{d}{dt}\mathbb{p}_i = -\sum_{j\neq i} m_i m_j S_{ij}^3(\mathbb{q}_i-\mathbb{q}_j)$$

$$\frac{d}{dt}S_{ij} = -S_{ij}^3\cdot(\mathbb{q}_i-\mathbb{q}_j)\cdot\left(\frac{\mathbb{p}_i}{m_i}-\frac{\mathbb{p}_j}{m_j}\right) \qquad (7.3)$$

と書ける。

(7.3)は右辺がすべて多項式で，かつ

$$t \to \alpha^{-1}t \ , \quad \mathbb{q}_i \to \alpha^{-\frac{2}{3}}\mathbb{q}_i, \quad \mathbb{p}_i \to \alpha^{\frac{1}{3}}\mathbb{p}_i, \quad S_{ij} \to \alpha^{-\frac{2}{3}}S_{ij} \qquad (7.4)$$

によって不変な相似不変系である。

特殊解(1.6)は

$$\mathbb{q}_i = t^{\frac{2}{3}}\mathbb{C}_i \quad , \quad \mathbb{p}_i = t^{-\frac{2}{3}}\mathbb{C}_i' \qquad (7.5)$$

で定数ベクトル $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3$ の選択は2通りあり，

(i) $|\mathbb{C}_1-\mathbb{C}_2| = |\mathbb{C}_2-\mathbb{C}_3| = |\mathbb{C}_3-\mathbb{C}_1|$ （Lagrangeの正三角形解）

(ii) $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3$ が一直線上にある （Eulerの直線解）

である。特殊解(7.5)は $t\to 0$ ですべての $\mathbb{q}_i \to \mathbb{0}$，すなわち3質点が相似的に同時衝突（Triple collision）する解を表わしている。

これらの特殊解について Kowalevski の exponent を計算することは、Block (1908) によって、本稿とは全く無関係な目的によって行なわれた計算をくり返すことに本質的に同じである。結果を記すと、(i) の形の特殊解について、無理数となりうる exponent は

$$p_{1,2} = \frac{1}{6}\left\{-1+\sqrt{13 \pm 12K(m)}\right\} \tag{7.6}$$

但し

$$K(m) = \frac{1}{4M}\sqrt{(m_1-m_2)^2+(m_2-m_3)^2+(m_3-m_1)^2}, \quad M = m_1+m_2+m_3 .$$

(iii) の形の特殊解については（$\mathbb{C}_3$ が $\mathbb{C}_1$ と $\mathbb{C}_2$ の間にある時）

$$p_1 = \frac{1}{6}\left\{-1+\sqrt{9+16K'(m)}\right\} \tag{7.7}$$

但し

$$K'(m) = \frac{M(m_1u^{-3}+m_2v^{-3}+m_3u^{-3}v^{-3})}{[m_1+m_2+m_3(u^{-2}+v^{-2})]^2}$$

ここで $u, v$ は

$$u+v=1 \quad \text{かつ} \quad m_1v^2(u^3-1)+m_2u^2(1-v^3)+m_3(u^3-v^3)=0$$

をみたす正数の解.

と求められる。

3体の質量 $m_1, m_2, m_3$ を与えた時 (7.6) or (7.7) の1つが無理数となる時、前節の結果（を拡張したもの）を使って、十分な数の代数的第一積分が存在しないことが主張でき、Bruns (1887) の結果に対する、全く独立なアプローチを与えることになる。(7.6) 及び (7.7) の exponent をすべて有理数とするような質量比

$m_1, m_2, m_3$ が実際に存在するかどうかは不明である。((7.7) は $m_1, m_2, m_3$ の互換によって値を変えることに注意。)

他にも代数的第一積分の存在を否定できる興味ある力学系の例は豊富であるが(例. Toda lattice の一般化)別の機会に譲りたい。

また無限自由度の Hamilton 系と見られる偏微分方程式系で特に相似変換に対する不変性をもつ KdV 型の方程式に対しても Kowalevski の exponent を定義することが出来る。それから一体何が主張できるかは現在検討中である。

<u>参考文献</u>

§1 の Kowalevski の exponent の命名の由来は S. Kowalevski の

- Acta Math. <u>12</u>, 177-232 (1889), Acta Math. <u>14</u>, 81-93 (1890)

及びその結果の Lyapunov による解釈

- Lyapunov : "Collected Papers" tom. 1, 402-417 (1896) in Russian

による。(1.13) に対する解の展開定理は Picard の名著

- "Traité d'Analyse" tom. 3, chap 1

に述べられている。log t を含むより一般の展開は Siegel の

- "Lectures on the singularities of the three-body problem" (1967) TATA Institute of fundamental research, Bombay

が最も詳しい。§2 で主張したことは、すべて

• Forsyth : "Theory of Differential Equations", part 2, chap 17

• Whittaker : "Analytical Dynamics", chap 14

に述べられている。 §3 の定理1, 2 の証明は、1982年2月名古屋大学数学教室で行われた"春の総合研究集会"集録中の

• "有限自由度の非線形力学系における代数的第一積分の存在について"

でなされている。§4 の例題、及び積分可能な $\epsilon$ の値は

• Bountis, Segur and Vivaldi : Phys. Rev. A25, 1257–1264 (1982)

を参考にした。§5 に登場する Picard 積分の名の出生は

• Picard et Simart : "Fonction algébriques de deux variables" I, II

によると思われる。 §7 で引用した Block の論文は

• Arkiv för Mat. Astron. Fys., 5, no9, 1–32 (1908)

にあるが、この論文も含めて、その後の発展を知るには

• Hagihara "Celestial Mechanics" vol.5, part1, chap22

が最も便利で包括的である。三体問題の exponent の一覧表は

• Waldvogel : Celes. Mech. 14, 287–300 (1976)

にコンサイスにまとめられている。三体問題の代数的積分不可能性を論じた Bruns の定理は、既出の Forsyth または Whittaker を参照せよ。