数理解析研究所講究録
472巻 1982年 136-142

Discretization of soliton equations

京大 数理研 三輪 哲二
Miwa Tetsuji
神保 道夫
Jimbo Michio
教養 伊達 悦朗
Date Etsuro

ソリトン方程式を，N−ソリトン解を持つという性質を保って，discrete化するという問題は，種々の立場から扱われている．このノートでは，そのうちの一つである広田氏の結果[1]，及びそれに続く，三輪の結果[2]を一般化した，一つの方法について述べる．詳細については，我々のプレプリント（RIMS. 401, 403, 4　, 4　, 4　）にゆずることにして，以下では，その概略について述べる．

我々は，以前の論文[3]において，free fermion の言葉を援用して，（continuous な）ソリトン方程式の解の変換群を考察した。ソリトン方程式を扱う方法として，二つの主要な方法が知られている。一つは，線型化（ソリトン方程式を，線型方程式系の可積分条件に表わすこと）であり，もう一つは，双線型化（従属変数の変換により，方程式を双線型な形に表わすこと）である．我々の（continuous な場合の）

考察の基礎となったのは、線型方程式系の解（wave function）wが、双線型方程式の解（τ-函数，広田の変数）が、クリフォード群の元を時間発展させたものの、真空期待値の形に表わされるということであった。この事実は又、τ-函数同志、あるいはτ-函数と wave function がみたす、bilinear identity と呼ぶ、関係式の帰結であった。我々の discretization は、この bilinear identity を出発点として行われる。free fermion の言葉でいえば、時間発展をとりかえることにあたる（continuous な場合の exponential function $\exp(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k^j)$ を rational function $(1-ak)^{-l}(1-bk)^{-m}\cdots$ ，a.b：パラメーター，$l, m, \cdots, \in \mathbb{Z}$ にする）。従って、解の変換群は不変である。

nonlinear Schrödinger 方程式

$$i q_t + q_{xx} - 2 q^* q^2 = 0$$

$$-i q^*_t + q^*_{xx} - 2 q^{*2} q = 0$$

を例にして、もう少し詳しく述べよう。

この方程式は、2成分 KP hierarchy の reduction の一つである。2成分 KP hierarchy の reduction に対する bilinear identity は次のものがある。

$$0=\oint\frac{dk}{2\pi i k}\Big[(-)^{l_2+l_2'+1}k^{s+l_1-l_1'}e^{\xi(x-x',k)}\tau_{l_1,l_2'+1}(x-y-\epsilon(k^{-1}))\times$$

$$\times\tau_{l_1'+1,l_2'}(x'-y'+\epsilon(k^{-1}))+k^{s+l_2-l_2'}e^{\xi(y-y',k)}\tau_{l_1+1,l_2}(x-y+\epsilon(k^{-1}))\times$$

$$\times\tau_{l_1',l_2'+1}(x'-y'-\epsilon(k^{-1}))\Big],\qquad s\geq 0,\qquad s+l_1+l_2\geq l_1'+l_2',$$

$$p^s w^{(\alpha)}_{l_1+1,l_2+1}(x-y;p)\tau_{l_1',l_2'}(x'-y')e^{\xi(y-y',p)}$$

$$=\oint\frac{dk}{2\pi i k}\Big[(-)^{l_2+l_2'+1}k^{s+l_1-l_1'}e^{\xi(x-x',k)}\tau_{l_1,l_2+1}(x-y-\epsilon(k^{-1}))\times$$

$$\times w^{(\alpha)}_{l_1'+1,l_2'}(x'-y'+\epsilon(k^{-1});p)+\frac{k}{k-p}k^{s+l_2-l_2'}e^{\xi(y-y',k)}\tau_{l_1+1,l_2}(x-y+\epsilon(k^{-1}))\times$$

$$\times w^{(\alpha)}_{l_1',l_2'+1}(x'-y'-\epsilon(k^{-1});p)\Big],\qquad s\geq 0,\qquad s+l_1+l_2\geq -1+l_1'+l_2'.$$

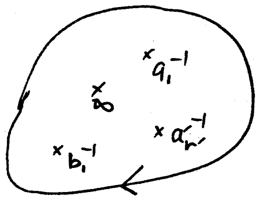
ここで．$\tau_{l_1,l_2}(x)$, $l_1, l_2\in\mathbb{Z}$ は τ－函数，$w^{(\alpha)}_{l_1 l_2}(x;k)$ $\alpha=1,2$, $l_1, l_2\in\mathbb{Z}$ は wave function である．この bilinear identity は任意の x, x', y, y', $x=(x_1,x_2,\cdots)$ について成り立つ．更に．上の積分路は．$\oint\frac{dk}{2\pi i k}=1$ となるような $k=\infty$ のまわりの contour であり．

$\xi(x,k)=\sum_{j=1}^{\infty}x_j k^j$,　　$\epsilon(a)=(a,\frac{1}{2}a^2,\frac{1}{3}a^3,\cdots)$ である．

この identity で

$$x - x' = \sum_{i=1}^{r} \epsilon(a_i) - \sum_{j=1}^{r'} \epsilon(a'_j), \quad y - y' = \sum_{i=1}^{t} \epsilon(b_i) - \sum_{j=1}^{t'} \epsilon(b'_j),$$

a_i, a'_j, b_i, b'_j は、その逆数が、上の積分路の内部にあるような数、とおけば、



$$e^{\xi(\epsilon(a), k)} = (1 - ak)^{-1}$$

に注意して、

$$\tau_{l_1 l_2}(n_1, n_2, \cdots, n'_1, n'_2, \cdots, m_1, m_2, \cdots, m'_1, m'_2 \cdots)$$

$$= \tau_{l_1 l_2}(x - y + n_1 \epsilon(a_1) + n_2 \epsilon(a_2) + \cdots + n'_1 \epsilon(a'_1) + n_2 \epsilon(a'_2) + \cdots)$$

$$w^{(\alpha)}_{l_1 l_2}(n_1, n_2, \cdots, n'_1, n'_2, \cdots, m_1, m_2, \cdots, m'_1, m'_2, \cdots)$$

$$= w^{(\alpha)}_{l_1 l_2}(x - y + n_1 \epsilon(a_1) + n_2 \epsilon(a_2) + \cdots ; k)$$

に対する方程式が得られる。

この操作は、KP hierarchy を扱う際に用いる free fermion $\psi(k)$ $\psi^*(k)$ の時間発展を、continuous な場合には、

$$\psi(k) \longmapsto e^{\xi(x,k)} \psi(k), \quad \psi^*(k) \mapsto e^{-\xi(x,k)} \psi^*(k)$$

であったものを

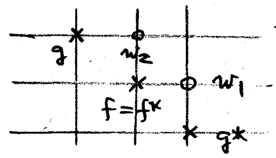
$$\psi(k) \longmapsto \frac{(1 - a'_1 k)^{n'_1} \cdots}{(1 - a_1 k)^{n_1} \cdots} \; \frac{(1 - b'_1 k)^{m'_1} \cdots}{(1 - b_1 k)^{m_1} \cdots} \psi(k)$$

$$\psi^*(k) \longmapsto \frac{(1 - a_1 k)^{n_1} \cdots}{(1 - a'_1 k)^{n'_1} \cdots} \; \frac{(1 - b_1 k)^{m_1}}{(1 - b'_1 k)^{m'_1}} \psi^*(k)$$

としたことにあたる。（r, r', t, t', a_i, a_j', b_i, b_j' を任意に動かすことにより、得られる方程式全体は、元の bilinear identity と同値になる）

$$f^* = f = \tau_{\ell_1 \ell_2}\ ,\quad g^* = \tau_{\ell_1+1, \ell_2-1}\ ,\quad g = \tau_{\ell_1-1, \ell_2+1}$$

$$w_1 = w^{(\alpha)}_{\ell_1+1, \ell_2}\ ,\quad w_2 = w^{(\alpha)}_{\ell_1, \ell_2+1}$$



なる組み合わせで、パラメーターを高々2個 (a, b) 含む方程式を、とり出せば、例えば、次の式が得られる。

$$f(1,0)f(0,1) - f(1\,1)f(0\,0) - ab\,g^*(1\,1)g(0\,0) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} v_1(-1) \\ v_2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2\mathfrak{g}^*(0)\,\mathfrak{g}(-1) - ak + 1 & a\,\mathfrak{g}^*(0) \\ a\,\mathfrak{g}(-1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix},$$

$$f(n,m) = f(x - y + n\epsilon(a) + m\epsilon(b)),\ \text{etc.}$$

$$v_i = \frac{w_i}{f}\ ,\qquad \mathfrak{g} = \frac{g}{f}\ ,\qquad \mathfrak{g}^* = \frac{g^*}{f}\ .$$

前者の式が、nonlinear Schrödinger 方程式の、双線型化の形での discretization で、後者が、線型方程式の discretization である。従属変数 $\mathfrak{g}$ での nonlinear Schrödinger 方程式の discretization は、後者の可積分条件として与えられ、

$$(1+ab\,g^*(1,1)\,g(0,0))\,(a\,g(0,1)-b\,g(1,0))=(a-b)\,g(0,0)$$

$$(1+ab\,g^*(1,1)\,g(0,0))\,(a\,g^*(1,0)-b\,g^*(0,1))=(a-b)\,g^*(1,1)$$

となる。

$a, b \to 0$ とすることにより、continuous な双線型方程式、線型方程式、非線型方程式が回復される。

$$D_1^2 f\cdot f + 2g^*\cdot g = 0,$$

$$\partial_1\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -g^* \\ -g & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\partial_2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 - g^*g & -k g^* - \partial_1 g^* \\ -k g + \partial_1 g & g^* g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\partial_2 g + \partial_1^2 g - 2g^* g^2 = 0$$

$$-\partial_2 g^* + \partial_1^2 g^* - 2g^{*2} g = 0 \qquad x_2 = -it.$$

discrete 化した nonlinear Schrödinger 方程式のソリトン解は、上に述べた時間発展の取り扱いを考慮すれば、continuous な場合の式から容易に得られる。

ここであげた以外の $\tau_{l_1 l_2}$ の組みあわせら得られるソリトン方程式、KP 以外の hierarchy のソリトン方程式については、プレプリントを参照して下さい。

References

1. R. Hirota, J. Phys. Soc. Japan **50** (1981), 3785
2. T. Miwa, Proc. Japan Acad. **58** A (1982). 9.
3. E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa,
   J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 3806, 3813
   Physica **4** D (1982) 343
   RIMS preprint 394.