数理解析研究所講究録
472巻 1982年 109-127

Yang-Baxter 関係式とその応用

東大教養　物理　和達　三樹
Wadati　Miki
十河　清
Sogo　Kiyoshi
打波　守
Uchinami　Mamoru
阿久津　泰弘
Akutsu　Yasuhiro

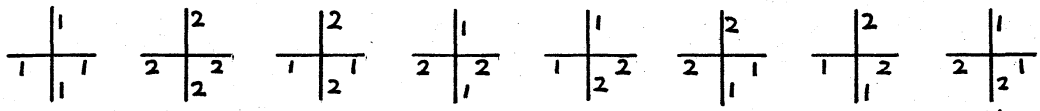
I　はじめに

最近の量子完全積分系の研究により，以前は一見無関係と思われていた２つの分野 —— １次元量子多体系（δ－関数 bose 気体，量子 Sine-Gordon 系など）と２次元古典統計力学（Ising モデル，6-vertex モデル，8-vertex モデルなど）—— が非常に密接に関連していることがわかってきた。その結果，多くの"解けるモデル"（＝完全積分可能系）が共通の見地・手法で扱えるようになってきている。１次元量子系に於ては，完全積分可能性は，系の多体の S 行列が因子化される[1]（factorized ―２体の S 行列の積でかける）ことと同値であると信ぜられている。一方２次元古典統計力学のモデルにとっては，解けるための条件は，そのモデルが互いに交換

する transfer matrix[2] の family をもつことである。Zamolodchikov[3] は，任意の因子化されたS行列が，或る vertex モデルの（互いに交換する）transfer matrix を与えることを指摘した。 その際，S行列が因子化するための条件式 ― 因子化方程式（factorization equation）― が，transfer matrix が交換するための条件式 ― Yang−Baxter 関係式[2),4)] ― そのものに他ならないことも示した。 以後，多くの著者により，成分・状態数の多い（q-成分，$q \geq 3$）解けるモデルを捜す努力が成されてきている。 この方向での発展もこれから更に期待できるのだが，一方で，$q = 2$ の場合でさえもまだ完全に研究しつくされているとは思われない。 例えば，一般の非対称性をもつ 8−vertex モデルが解けるか否かは知られていないし，もっと一般の 16−vertex モデルに関してはさらにわずかなことしか知られていない。 そこで我々は自然に"解ける2成分モデルはいったいいくつ存在するのだろうか"という問いに導びかれる。 本稿の主な目的は，この問いに部分的にではあるが完全な解答を与えることである。 以下のII〜IVではこの目的に相当する最近の我々の仕事[5]の紹介を行なう。 Vではこの目的からは少しはずれるが，統計力学での応用例について述べる。 VIでは，将来の見通しに関して少しふれることにする。

II 2成分モデルに対するYang-Baxter関係式

我々が扱うのは，Baxter[2)], Zamolodchikov[3)] を拡張したモデルで，これを"一般化された8-vertexモデル"と呼ぶことにする（以下，主としてvertexモデルの言葉を用いるが，同時にS行列としても考えていることに注意）。これは基本的なvertexの状態として以下の8つのみを許すものである。



S_1 S_2 S_t $\tilde{S}_t$ S_r $\tilde{S}_r$ S_a $\tilde{S}_a$

ここで各vertexの重み（又は対応するS行列要素）を $S_1 \sim \tilde{S}_a$ とした。この系のlocal transition matrix[6)] $L_n(\lambda)$ （λ: spectral parameter — 解けるfamily中の"位置"を指定するもの）は

$$L_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} w_{ij}(\lambda)\, \sigma^i \otimes \sigma_n^j$$

（具体的には $L_n(\lambda)_{ij,kl} =$ ）

の形に表わされる（σ^i はPauli行列，$\sigma^4 = I$）。M（たて）×N（よこ）の大きさの周期的格子上で考えると，transfer matrix $T(\lambda)$ は，

$$T(\lambda) = \mathrm{Tr}\,(L_N(\lambda) L_{N-1}(\lambda) \cdots\cdots L_2(\lambda) L_1(\lambda)) \qquad (1)$$

で定義され，これを用いて分配関数 Z が $Z = \mathrm{Tr}\, T^M$ とかける。[2),4),6)] ここでYang-Baxter関係式と呼ばれる条件式

$$R(\lambda,\mu)\big(L_n(\lambda)\otimes L_n(\mu)\big) = \big(L_n(\mu)\otimes L_n(\lambda)\big) R(\lambda,\mu) \qquad (2)$$

を満たす非特異行列 R が存在すると

$$[\,T(\lambda),\, T(\mu)\,] = 0 \qquad \text{for } \forall\lambda,\mu \qquad (3)$$

，つまり互いに交換するtransfer matrixのfamilyが得られ，系の完全積分性が保証される。よって，(2)式が，2次元古典統計力学の解けるモデルにとって，最も基本的で重要な関係式である。一方，1次元量子系においては，系の完全積分性はS行列の因子化と等価であると考えられており，そのための条件式（くり返し用いた添字は和を意味する）

$$S_{jp}^{ig}(\theta_{12})\, S_{kr}^{gn}(\theta_{13})\, S_{rl}^{pm}(\theta_{23}) = S_{kp}^{jg}(\theta_{23})\, S_{pl}^{ir}(\theta_{13})\, S_{gm}^{rn}(\theta_{12}) \qquad (4)$$

は因子化方程式[1]（factorization equation）又は3角方程式（triangle equation）と呼ばれている。ここで$S_{jl}^{ik}(\theta_{12})$は，散乱過程$(ij) \to (kl)$に対する2体のS行列要素で，$\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$（= rapidityの差）である。Zamolodchikov[3]は一般的に

$$L_{\gamma\alpha,\gamma'\alpha'}(\lambda) = S_{\gamma\gamma'}^{\alpha\alpha'}(\lambda), \quad R_{\alpha\gamma,\gamma'\alpha'}(\lambda,\mu) = S_{\gamma\gamma'}^{\alpha\alpha'}(\lambda-\mu) \qquad (5)$$

とおくと，(4)式は(2)式と等価であることを指摘した。このようにLとRとが同一の関数形で表わされるとすると，(2)の解を求める（L_nを求める）ことが著しく簡単化される。我々もはじめにこの"同一化"を行なう。ただし，もちろんすでに解けることが知られているもので，因子化方程式の解としては再現できないモデルも存在する。これに関しては後で（Ⅳ）述べることにする。

一般化された8－vertexモデルの各vertexのweight，若くは対応するS行列要素を，Zamolodchikovのsymbolic algebra[1),3)]

の交換関係として表わしておくと

$$A_1(\theta_1)A_1(\theta_2)=S_1(\theta_{12})A_1(\theta_2)A_1(\theta_1)+S_a(\theta_{12})A_2(\theta_2)A_2(\theta_1)$$

$$A_2(\theta_1)A_2(\theta_2)=S_2(\theta_{12})A_2(\theta_2)A_2(\theta_1)+\widetilde{S}_a(\theta_{12})A_1(\theta_2)A_1(\theta_1)$$

$$A_1(\theta_1)A_2(\theta_2)=S_t(\theta_{12})A_2(\theta_2)A_1(\theta_1)+S_r(\theta_{12})A_1(\theta_2)A_2(\theta_1)$$

$$A_2(\theta_1)A_1(\theta_2)=\widetilde{S}_t(\theta_{12})A_1(\theta_2)A_2(\theta_1)+\widetilde{S}_r(\theta_{12})A_2(\theta_2)A_1(\theta_1) \qquad (6)$$

因子化方程式 (4) は，具体的には以下の 28 個の関数方程式となる。

$$S_r\widetilde{S}_rS_r=\widetilde{S}_rS_r\widetilde{S}_r$$

$$S_a\widetilde{S}_r\widetilde{S}_a=\widetilde{S}_aS_rS_a,\quad S_a\widetilde{S}_a\widetilde{S}_r=\widetilde{S}_aS_aS_r,\quad \widetilde{S}_rS_a\widetilde{S}_a=S_r\widetilde{S}_aS_a$$

$$S_1S_1S_a+S_a\widetilde{S}_rS_2=\widetilde{S}_rS_aS_1+S_tS_tS_a$$

$$S_1S_aS_r+S_a\widetilde{S}_t\widetilde{S}_t=S_aS_1S_1+S_2S_rS_a$$

$$S_2S_2\widetilde{S}_a+\widetilde{S}_aS_rS_1=S_r\widetilde{S}_aS_2+\widetilde{S}_t\widetilde{S}_t\widetilde{S}_a$$

$$S_2\widetilde{S}_a\widetilde{S}_r+\widetilde{S}_aS_tS_t=\widetilde{S}_aS_2S_2+S_1\widetilde{S}_r\widetilde{S}_a$$

$$S_r\widetilde{S}_aS_1+S_tS_t\widetilde{S}_a=\widetilde{S}_aS_rS_2+S_1S_1\widetilde{S}_a$$

$$S_2\widetilde{S}_r\widetilde{S}_a+\widetilde{S}_aS_1S_1=\widetilde{S}_a\widetilde{S}_t\widetilde{S}_t+S_1\widetilde{S}_a\widetilde{S}_r$$

$$\widetilde{S}_rS_aS_2+\widetilde{S}_t\widetilde{S}_tS_a=S_a\widetilde{S}_rS_1+S_2S_2S_a$$

$$S_1S_rS_a+S_aS_2S_2=S_aS_tS_t+S_2S_aS_r$$

$$S_1S_aS_t+S_a\widetilde{S}_t\widetilde{S}_r=\widetilde{S}_tS_aS_1+S_rS_tS_a$$

$$S_2\widetilde{S}_a\widetilde{S}_t+\widetilde{S}_aS_tS_r=S_t\widetilde{S}_aS_2+\widetilde{S}_r\widetilde{S}_t\widetilde{S}_a$$

$$\widetilde{S}_t\widetilde{S}_aS_1+\widetilde{S}_rS_t\widetilde{S}_a=\widetilde{S}_a\widetilde{S}_tS_r+S_1\widetilde{S}_aS_t$$

$$S_tS_aS_2+S_r\widetilde{S}_tS_a=S_aS_t\widetilde{S}_r+S_2S_a\widetilde{S}_t$$

$$S_1S_tS_r+S_a\widetilde{S}_a\widetilde{S}_t=\widetilde{S}_rS_rS_t+S_tS_1S_r$$

$$S_2\,\tilde{S}_t\,\tilde{S}_r + \tilde{S}_a\,S_a\,S_t = S_r\,\tilde{S}_r\,\tilde{S}_t + \tilde{S}_t\,S_2\,\tilde{S}_r$$

$$S_t\,S_a\,\tilde{S}_a + S_r\,\tilde{S}_t\,S_1 = \tilde{S}_t\,S_r\,\tilde{S}_r + S_r\,S_1\,\tilde{S}_t$$

$$\tilde{S}_t\,\tilde{S}_a\,S_a + \tilde{S}_r\,S_t\,S_2 = S_t\,\tilde{S}_r\,S_r + \tilde{S}_r\,S_2\,S_t$$

$$S_t\,S_1\,\tilde{S}_r + S_r\,\tilde{S}_r\,S_t = S_1\,S_t\,\tilde{S}_r + \tilde{S}_a\,S_a\,\tilde{S}_t$$

$$\hat{S}_t\,S_2\,S_r + \tilde{S}_r\,S_r\,\hat{S}_t = S_2\,\tilde{S}_t\,S_r + S_a\,\hat{S}_a\,S_t$$

$$\tilde{S}_r\,S_1\,\tilde{S}_t + \tilde{S}_t\,\tilde{S}_r\,S_r = \tilde{S}_r\,\tilde{S}_t\,S_1 + S_t\,\tilde{S}_a\,S_a$$

$$S_r\,S_2\,S_t + S_t\,S_r\,\tilde{S}_r = S_r\,S_t\,S_2 + \tilde{S}_t\,S_a\,\tilde{S}_a$$

$$S_1\,S_r\,S_1 + S_a\,S_2\,\tilde{S}_a = \tilde{S}_t\,S_r\,S_t + S_r\,S_1\,S_r$$

$$S_2\,\tilde{S}_r\,S_2 + \tilde{S}_a\,S_1\,S_a = S_t\,\tilde{S}_r\,\tilde{S}_t + \tilde{S}_r\,S_2\,\tilde{S}_r$$

$$\tilde{S}_r\,S_1\,\tilde{S}_r + \tilde{S}_t\,\tilde{S}_r\,S_t = S_1\,\tilde{S}_r\,S_1 + \tilde{S}_a\,S_2\,S_a$$

$$S_r\,S_2\,S_r + S_t\,S_r\,\tilde{S}_t = S_2\,S_r\,S_2 + S_a\,S_1\,\tilde{S}_a \qquad (7)$$

，ただし各式の各項の各函数の引数は，左から θ, $\theta+\theta'$, θ' である。 Zamolodchikov algebra の consistency 条件としての unitarity 条件式は

$$S_1(\theta)\,S_1(-\theta) + S_a(\theta)\,\tilde{S}_a(-\theta) = S_2(\theta)\,S_2(-\theta) + \tilde{S}_a(\theta)\,S_a(-\theta) = 1$$

$$S_1(\theta)\,S_a(-\theta) + S_a(\theta)\,S_2(-\theta) = S_2(\theta)\,\tilde{S}_a(-\theta) + \tilde{S}_a(\theta)\,S_1(-\theta) = 0$$

$$S_r(\theta)\,S_r(-\theta) + S_t(\theta)\,\tilde{S}_t(-\theta) = \tilde{S}_r(\theta)\,\tilde{S}_r(-\theta) + \tilde{S}_t(\theta)\,S_t(-\theta) = 1$$

$$S_r(\theta)\,S_t(-\theta) + S_t(\theta)\,\tilde{S}_r(-\theta) = \tilde{S}_r(\theta)\,\tilde{S}_t(-\theta) + \tilde{S}_t(\theta)\,S_r(-\theta) = 0 \qquad (8)$$

となるが，vertex モデル（2次元統計力学）としてはこの条件は必ずしも必要ではない。 (7)式では，式の数が未知関数の数より圧倒的に多くなっているが，実際に解いてみると，その

全てを満たす解は確かに存在している。

III 因子化方程式の解とその分類

(7)式は，各S行列要素間の比を与えるのみであるから，次のような"規格化された"関数を求めることにする。

$$h_1(\theta) = S_1(\theta)/S_r(\theta),\quad h_2(\theta) = S_2(\theta)/S_r(\theta)$$
$$h_t(\theta) = S_t(\theta)/S_r(\theta),\quad \tilde{h}_t(\theta) = \tilde{S}_t(\theta)/S_r(\theta)$$
$$h_a(\theta) = S_a(\theta)/S_r(\theta),\quad \tilde{h}_a(\theta) = \tilde{S}_a(\theta)/S_r(\theta) \tag{9}$$

解を得る手続は standard ではあるが煩雑である。詳細は文献5を参照されたい。

自明でない解は主に3つの場合（8V，7V，6V）に分類される。8V（eight-vertex）は $S_1 \sim \tilde{S}_a$ のすべての weight がゼロでない場合，7V（seven-vertex）は S_a，$\tilde{S}_a$ のいずれかがゼロの場合，6V（six-vertex）は $S_a = \tilde{S}_a = 0$ の場合である。各々はさらに subcase に分類され，8V，7V は3つ，6V は2つの subcase から成る（表1～表3）。表中のパラメーター $\alpha_1 \sim \tilde{\alpha}_a$ はそれぞれ h_1 etc の $\theta=0$ における微分係数（$dh_1/d\theta|_{\theta=0}$ など）である。8V(I)は Baxter-Zamolodchikov のわずかな拡張である。8V(II)，8V(III)，7V(II)，7V(III)，6V(II)は"free fermion モデル"[7]と呼ばれるものに属し，次の関係式を満たしている

$$S_1 S_2 + S_t \tilde{S}_t = S_r \tilde{S}_r + S_a \tilde{S}_a \tag{10}$$

表 1

	8V(I)	8V(II)	8V(III)
$h_1(\theta)$	$\dfrac{\mathrm{sn}(\lambda\theta+2\eta)}{\mathrm{sn}(2\eta)}$	$\dfrac{\mathrm{cn}(\lambda\theta)}{\mathrm{dn}(\lambda\theta)}+\dfrac{\gamma\epsilon\,\mathrm{sn}(\lambda\theta)}{\sqrt{1-\gamma^2}}$	$\dfrac{\cosh(\alpha_t\theta)}{\cos(\sqrt{c}\,\alpha_a\theta)}$
$h_2(\theta)$	$h_1(\theta)$	$\dfrac{\mathrm{cn}(\lambda\theta)}{\mathrm{dn}(\lambda\theta)}-\dfrac{\gamma\epsilon\,\mathrm{sn}(\lambda\theta)}{\sqrt{1-\gamma^2}}$	$h_1(\theta)$
$h_t(\theta)$	$\epsilon\,\dfrac{\mathrm{sn}(\lambda\theta)}{\mathrm{sn}(2\eta)}$	$\dfrac{\epsilon\,\mathrm{sn}(\lambda\theta)}{\sqrt{1-\gamma^2}}$	$\dfrac{\sinh(\alpha_t\theta)}{\cos(\sqrt{c}\,\alpha_a\theta)}$
$\tilde{h}_t(\theta)$	$h_t(\theta)$	$h_t(\theta)$	$-h_t(\theta)$
$h_a(\theta)$	$\dfrac{\delta k}{\sqrt{c}}\,\mathrm{sn}(\lambda\theta)\,\mathrm{sn}(\lambda\theta+2\eta)$	$\dfrac{\delta k}{\sqrt{c}}\,\mathrm{sn}(\lambda\theta)\cdot\dfrac{\mathrm{cn}(\lambda\theta)}{\mathrm{dn}(\lambda\theta)}$	$\dfrac{1}{\sqrt{c}}\tan(\sqrt{c}\,\alpha_a\theta)$
$\tilde{h}_a(\theta)$	$c\,h_a(\theta)$	$c\,h_a(\theta)$	$c\,h_a(\theta)$
Unitarity condition $S_r(\theta)S_r(-\theta)$	$\dfrac{\mathrm{sn}^2(2\eta)}{\mathrm{sn}^2(2\eta)-\mathrm{sn}^2(\lambda\theta)}$	$\dfrac{1-\gamma^2}{1-\gamma^2-\mathrm{sn}^2(\lambda\theta)}$	$\dfrac{\cos^2(\sqrt{c}\,\alpha_a\theta)}{\cos^2(\sqrt{c}\,\alpha_a\theta)+\sinh^2(\alpha_t\theta)}$
Parameters	$\alpha_1=\dfrac{\lambda\,\mathrm{cn}(2\eta)\,\mathrm{dn}(2\eta)}{\mathrm{sn}(2\eta)}$ $\alpha_t=\dfrac{\epsilon\lambda}{\mathrm{sn}(2\eta)}$ $\sqrt{c}\,\alpha_a=\delta k\,\mathrm{sn}(2\eta)$	$\alpha_t^2=\dfrac{\lambda^2}{1-\gamma^2}$ $c\,\alpha_a^2=k^2\lambda^2$	

表 2 (7V(Ⅲ)では $\tilde{S}_r(\theta)=e^{\mu\theta}S_r(\theta)$)

	7V(I)	7V(II)	7V(III)
$h_1(\theta)$	$\frac{\sin(\lambda\theta+2\eta)}{\sin(2\eta)}$	$\frac{\sin(\lambda\theta+2\eta)}{\sin(2\eta)}$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta}\cosh(\lambda\theta)$
$h_2(\theta)$	$h_1(\theta)$	$\frac{\sin(-\lambda\theta+2\eta)}{\sin(2\eta)}$	$h_1(\theta)$
$h_t(\theta)$	$\frac{\epsilon\sin(\lambda\theta)}{\sin(2\eta)}$	$\frac{\epsilon\sin(\lambda\theta)}{\sin(2\eta)}$	$\epsilon\, e^{\frac{\mu}{2}\theta}\sinh(\lambda\theta)$
$\tilde{h}_t(\theta)$	$h_t(\theta)$	$h_t(\theta)$	$-h_t(\theta)$
$h_a(\theta)$	$\frac{\alpha_a\sin(\lambda\theta)\sin(\lambda\theta+2\eta)}{\sin(2\eta)}$	$\delta\sin(\lambda\theta)\cos(\lambda\theta)$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta}\frac{2\alpha_a\sinh(\frac{\mu}{2}\theta)}{\mu}$
Unitarity condition $S_r(\theta)S_r(-\theta)$	$\frac{1}{\sin^2(2\eta)-\sin^2(\lambda\theta)}$	$\frac{1}{\sin^2(2\eta)-\sin^2(\lambda\theta)}$	$\frac{1}{\cosh^2(\lambda\theta)}$
Parameters	$\alpha_1=\lambda\cot(2\eta)$ $\alpha_t=\frac{\epsilon\lambda}{\sin(2\eta)}$	$\alpha_1=\lambda\cot(2\eta)$ $\alpha_t=\frac{\epsilon\lambda}{\sin(2\eta)}$	$\alpha_1=\mu/2$ $\alpha_t=\epsilon\lambda$

表 3 $\left(\tilde{S}_r(\theta) = e^{\mu\theta} S_r(\theta) \right)$

	6V(I)	6V(II)
$h_1(\theta)$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta} \dfrac{\sin(\lambda\theta+2\eta)}{\sin(2\eta)}$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta} \dfrac{\sin(\lambda\theta+2\eta)}{\sin(2\eta)}$
$h_2(\theta)$	$h_1(\theta)$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta} \dfrac{\sin(-\lambda\theta+2\eta)}{\sin(2\eta)}$
$h_t(\theta)$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta} \dfrac{\alpha_t \sin(\lambda\theta)}{\lambda}$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta} \dfrac{\alpha_t \sin(\lambda\theta)}{\lambda}$
$\tilde{h}_t(\theta)$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta} \dfrac{\tilde{\alpha}_t \sin(\lambda\theta)}{\lambda}$	$e^{\frac{\mu}{2}\theta} \dfrac{\tilde{\alpha}_t \sin(\lambda\theta)}{\lambda}$
Unitarity condition $S_r(\theta)S_r(-\theta)$	$\dfrac{\sin^2(2\eta)}{\sin^2(2\eta)-\sin^2(\lambda\theta)}$	$\dfrac{\sin^2(2\eta)}{\sin^2(2\eta)-\sin^2(\lambda\theta)}$
Parameters	$\alpha_t\tilde{\alpha}_t - (\alpha_1 - \frac{\mu}{2})^2 = \lambda^2$ $\alpha_1 - \frac{\mu}{2} = \lambda \cot(2\eta)$	$\alpha_t\hat{\alpha}_t - (\alpha_1 - \frac{\mu}{2})^2 = \lambda^2$ $\alpha_1 - \frac{\mu}{2} = \lambda \cot(2\eta)$

また，7V(III)，6V(I)，6V(II) を除いては $\hat{S}_r(\theta)=S_r(\theta)$ である。注意として，7V の場合は vertex モデルとしては，たて方向に自由境界条件をとったならば意味がある，ということを述べておく。

vertex モデルからは次の公式[8]により1次元量子スピン系の Hamiltonian が得られる。

$$H = d\log T(\theta)/d\theta\,|_{\theta=0} \qquad (11)$$

，ただし $T(\theta)$ は vertex モデルの transfer matrix である。表4に，各々の解に相当するスピン系の Hamiltonian をまとめておく。ただし $H=\sum_m H_{m,m+1}$ とおき，さらに

$$\begin{aligned} H_{m,m+1} &= J_1\sigma_m^1\sigma_{m+1}^1 + J_2\sigma_m^2\sigma_{m+1}^2 + J_3\sigma_m^3\sigma_{m+1}^3 \\ &+ \tfrac{1}{2}h(\sigma_m^3+\sigma_{m+1}^3) + C(\text{定数}) \\ &+ A(\sigma_m^+\sigma_{m+1}^- - \sigma_m^-\sigma_{m+1}^+) + B(\sigma_m^+\sigma_{m+1}^+ - \sigma_m^-\sigma_{m+1}^-) \end{aligned} \qquad (12)$$

とおいた。ここで $\sigma^1\sim\sigma^3$ は pauli 行列，また $\sigma^\pm=\sigma^1\pm i\sigma^2$ とした。

IV 6-vertex モデル

III で得られた解の中には，Yang，Sutherland[9] らによって解かれた，"一般化された 6-vertex モデル"（$S_1\sim\hat{S}_r$ のすべての要素が異なるもの）が含まれていない。これは (5) 式の同一化に起因する。事実，(2) 式にたちもどって R を消去すると，結局次の解を得る（簡単のため $\hat{S}_r=S_r$ とした）。

	J_1	J_2	J_3	h	A	B
$8V(\mathrm{I})$	$1+\frac{\epsilon\delta k}{2\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}+\sqrt{c}\right)\mathrm{sn}^2(2\eta)$	$1-\frac{\epsilon\delta k}{2\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}+\sqrt{c}\right)\mathrm{sn}^2(2\eta)$	$\epsilon\,\mathrm{cn}(2\eta)\,\mathrm{dn}(2\eta)$	0	0	$\frac{\epsilon\delta k}{4\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\sqrt{c}\right)\mathrm{sn}^2(2\eta)$
$8V(\mathrm{II})$	$1+\frac{\epsilon\delta k}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}+\sqrt{c}\right)\sqrt{1-\gamma^2}$	$1-\frac{\epsilon\delta k}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}+\sqrt{c}\right)\sqrt{1-\gamma^2}$	0	$2\epsilon\gamma$	0	$\frac{\epsilon\delta k}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\sqrt{c}\right)\sqrt{1-\gamma^2}$
$8V(\mathrm{III})$	$(1+c)\alpha_a$	$-(1+c)\alpha_a$	0	0	α_t	$\frac{1}{2}(1-c)\alpha_a$
$7V(\mathrm{I})$	$1+\frac{\epsilon\alpha_a}{2\lambda}\sin(2\eta)$	$1-\frac{\epsilon\alpha_a}{2\lambda}\sin(2\eta)$	$\epsilon\cos(2\eta)$	0	0	$\frac{\epsilon\alpha_a}{4\lambda}\sin(2\eta)$
$7V(\mathrm{II})$	$1+\frac{\epsilon\delta}{2}\sin(2\eta)$	$1-\frac{\epsilon\delta}{2}\sin(2\eta)$	0	$2\epsilon\cos(2\eta)$	0	$\frac{\epsilon\delta}{4}\sin(2\eta)$
$7V(\mathrm{III})$	α_a	$-\alpha_a$	0	0	α_t	$\frac{1}{2}\alpha_a$
$6V(\mathrm{I})$	$\frac{1}{2}(\alpha_t+\tilde{\alpha}_t)$	$\frac{1}{2}(\alpha_t+\tilde{\alpha}_t)$	$\lambda\cot(2\eta)$	0	$\frac{1}{4}(\alpha_t-\tilde{\alpha}_t)$	0
$6V(\mathrm{II})$	$\frac{1}{2}(\alpha_t+\tilde{\alpha}_t)$	$\frac{1}{2}(\alpha_t+\tilde{\alpha}_t)$	0	$2\lambda\cot(2\eta)$	$\frac{1}{4}(\alpha_t-\tilde{\alpha}_t)$	0

表4

$$S_1(\lambda) = \rho_1 \sin(\lambda + 2\eta), \quad S_2(\lambda) = \rho_2 \sin(\lambda + 2\eta)$$
$$S_t(\lambda) = \rho_3 \sin\lambda, \quad \tilde{S}_t(\lambda) = \rho_4 \sin\lambda$$
$$S_r = \tilde{S}_r = \rho \sin 2\eta \tag{13}$$

，ただし $\rho_1\rho_2 = \rho_3\rho_4 = \rho^2$ が要求される。このときの R は,

$$R(\lambda-\lambda') = \begin{pmatrix} \rho^2 \sin(\lambda-\lambda'+2\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 \sin 2\eta & \rho_1\rho_4 \sin(\lambda-\lambda') & 0 \\ 0 & \rho_2\rho_3 \sin(\lambda-\lambda') & \rho^2 \sin 2\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^2 \sin(\lambda-\lambda'+2\eta) \end{pmatrix} \tag{14}$$

となる。ここでこの解が，因子化方程式の解 $S^{\alpha\alpha'}_{\gamma\gamma'}$ から,

成分の index に依存する定数倍の変換

$$L_{\gamma\alpha,\gamma'\alpha'}(\lambda) = a_{\gamma\alpha,\gamma'\alpha'} S^{\alpha\alpha'}_{\gamma\gamma'}(\lambda)$$
$$R_{\alpha\gamma,\gamma'\alpha'}(\lambda) = b_{\gamma\alpha,\gamma'\alpha'} S^{\alpha\alpha'}_{\gamma\gamma'}(\lambda) \tag{15}$$

によって得られていることに注意したい。そしてこの変換は Yang-Baxter 関係式を不変にする変換となっている。このような"対称性を破る変換"が3成分以上のモデルにも，ある場合には,存在することがわかっている。

この"一般化された6-vertexモデル"の transfer matrix と交換する spin Hamiltonian は次のような形のものである。[10]

$$H = \sum_{n=1}^{N} \{ (\Delta/2)\sigma^3_n \sigma^3_{n-1} + \gamma(\sigma^+_n \sigma^-_{n-1} + \sigma^-_n \sigma^+_{n-1}) + c(\sigma^+_n \sigma^-_{n-1} - \sigma^-_n \sigma^+_{n-1}) + (D/2)\sigma^3_n \} \tag{16}$$

以上（II～IV）までで得られた結果を要約すると,

① 一般化された 8-vertex モデルに対する因子化方程式の解は完全に分類された。

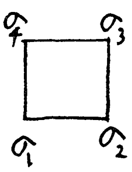
② 一般化された 6-vertex モデルは因子化方程式の解には含まれないが，もともとの Yang-Baxter 関係式の解になっている。よって Yang-Baxter 関係式のほうが基本的・一般的であることが示された。

V 物理的応用例

ここでは以上で述べたもの以外の，統計力学上の応用例について述べる。

1) duality と因子化された S 行列[11]

Baxter の symmetric 8-vertex モデルは，4体相互作用をもった2次元 Ising モデルと等価であることが知られている[12]（Kadanoff-Wegner 変換）。さらにこの Ising モデルにも duality 変換が存在する。この変換が S 行列の立場からみるとどうなるかを考える。問題にする4体 Ising 系は，2次元正方格子の各 plaquette 毎に次のような weight が与えられているものである。



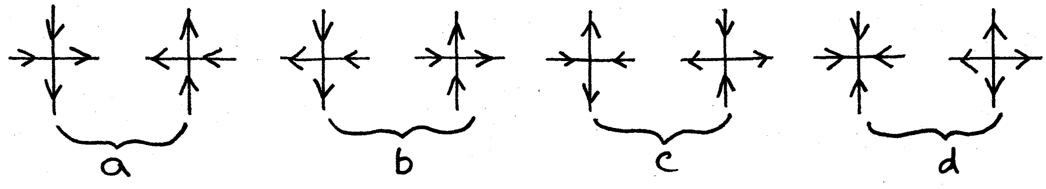
$\sigma_i = \pm 1$ 　　 weight = 定数 $\times \exp(K\sigma_1\sigma_3 + L\sigma_2\sigma_4 + M\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$

対応する 8-vertex モデルの weight とは

$$K = (1/4)\ln(ac/bd)\,, \quad L = (1/4)\ln(ad/bc)$$

$$M = (1/4)\ln(ab/cd) \tag{17}$$

の関係がある。 ここで次のような定義を用いた。



4体Ising系のduality変換は次式で与えられる。

$$\Delta^* = 1/\Delta\ ,\ K^* = f(K,L,M)\ ,\ L^* = f(L,K,M),\ M^* = f(M,K,L) \tag{18}$$

，ただし，$\Delta(K,L,M)$，$f(K,L,M)$ は次のようなものである。

$$\Delta(K,L,M) = \mathrm{sh}2K\,\mathrm{sh}2L + \mathrm{th}2M\,\mathrm{ch}2K\,\mathrm{ch}2L$$

$$f(K,L,M) = -\frac{1}{4}\ln\left\{\frac{e^{-4K}(e^{-2L}-e^{-2M})^2-(1-e^{-2L-2M})^2}{e^{-4K}(e^{-2L}+e^{-2M})-(1+e^{-2L-2M})^2}\right\} \tag{19}$$

一方，vertexモデルに翻訳すると

$$2a^* = a+b+c+d\ ,\ 2b^* = a+b-c-d$$

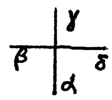
$$2c^* = a-b+c-d\ ,\ 2d^* = a-b-c+d \tag{20}$$

Zamolodchikov algebraの立場でみると，これら($a^*\sim d^*$)は

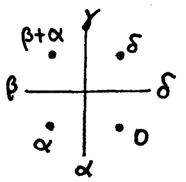
$$B_1 = (1/\sqrt{2})(A_1+A_2)\ ,\ B_2 = (1/\sqrt{2})(A_1-A_2) \tag{21}$$

に対するS行列要素となっている。 このように，duality変換は，S行列の立場でみると"粒子の変換"となっている。このような見方でdualityをとらえることにより，その，より深い物理的意味，別の側面を知り，同時にduality変換自体の導出にも役立つ可能性が大きいものと思われる。

2) roughening モデルへの応用[13)]

結晶表面などのroughening[14)]の問題は，結晶成長の機構との関連から，かなり以前から存在する問題であるが，最近いわゆるKosterlitz-Thouless型の相転移との関係が指摘されてから新たな関心をひき，多くの仕事がなされてきている。厳密に解けるモデルとしてはvan Beijeren[15)]による，6-vertexモデル（状態数 $q=2$）――特にF-モデル――を用いたものが存在する。ここでは $q \geq 3$ のある種のvertexモデルがrougheningのモデルになることを示す。これらのvertexモデルを仮に"電荷保存モデル"と呼ぶことにする。これは，vertex 

（$\alpha \sim \delta$ は"電荷"）のweightが $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ のときに限ってゼロでない，という条件を満たすものとして定義される。vertexと界面のprofileとの対応は次図のようにつける。



•：結晶界面の格子点（0, α, β+α, などはその点における界面の相対的高さ）

これにより，界面上のplaquetteでの高さの配置が，vertexの状態と1対1に対応する。そしてそのときのplaquetteのBoltzmann weightをvertexのweightとすればよい。$q=3$ の場合に相当するのがZamolodchikov-Fateev[16)]の19-vertexモデルである。彼らのモデルのfree energyを実際に計算してみると，実は2種類の6-vertexモデルの和で表わされ

ることがわかった（$f_{Z\cdot F} = f_{6v}^{(1)} + f_{6v}^{(2)}$）。特に，たて方向と横方向を等しくする極限（等方極限）ではF－モデルの相転移を生ずることがわかっている。このような相転移の性質が，δの変化（増大）とともにどう変化するかは大変興味がもたれるところである。

VI おわりに

すでにII〜IVでみたように，残念ながら，本来の意味での"一般化された8－vertexモデル"——すべてのweightが異なる8－vertexモデル——は我々の得た解の中には含まれてはいなかった。一方，Wu[17]により，このモデルは"対称的な"16－vertexモデルに等価であることが証明されている。この意味でも，16－vertexモデルの研究は，今後の問題として重要であろう。また，新しい"解けるモデル"がぞくぞく出てくる一方で，現状では，その"使いみち"がいささか乏しく思われるのは気のせいであろうか。この方面の発展も今後の問題であろう。

参考文献

1) A.B. Zamolodchikov and A.B. Zamolodchikov, Ann. Phys. <u>120</u> (1979), 253

K. Sogo, M. Uchinami, A. Nakamura and M. Wadati, Prog. Theor. Phys. 66 (1981), 1284

2) R. J. Baxter, Ann. Phys. 70 (1972), 193

3) A. B. Zamolodchikov, Comm. Math. Phys. 69 (1979), 165

4) C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 1312

5) K. Sogo, M. Uchinami, Y. Akutsu and M. Wadati, Prog. Theor. Phys., to appear.

6) L. A. Takhtadyan and L. D. Faddeev, Russian Math. Surveys 34 (1979), 11

7) E. H. Lieb, T. D. Schultz and D. C. Mattis, Ann. Phys 16 (1961), 941

C. Fan and F. Y. Wu, Phys. Rev. B2 (1970), 723

8) R. J. Baxter, Ann. Phys. 70 (1972), 323

9) C. P. Yang, Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 586

B. Sutherland, C. P. Yang and C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 588

10) E. Barouch, in "Phase Transitions and Critical Phenomena" (C. Domb and M. S. Green, eds) vol. I, pp 366–393

11) K. Sogo, unpublished

12) F. Y. Wu, Phys. Rev. B4 (1971), 2312

L. P. Kadanoff and F. J. Wegner, ibid., 3989

13) K. Sogo and Y. Akutsu, unpublished

14) 例えば J. D. Weeks in "Ordering in Strongly Fluctuating Condensed Matter Systems" (T. Riste ed.), Plenum (1980) pp 293

15) H. van Beijeren, Phys. Rev. Lett. 38 (1977), 993

16) A. B. Zamolodchikov and V. A. Fateev, Sov. J. Nucl. Phys. 32 (1980), 293

17) F. Y. Wu, Solid Stat. Commun. 10 (1972), 115