数理解析研究所講究録
472巻 1982年 88-108

ヤコビ・ペロンの算法
階直交多項式，一般化された戸田格子

名大・理　青本和彦 Aomoto Kazuhiko
名大・工　加藤芳文 Kato Yoshifumi

§0. 2階の線型差分作用素（ヤコビ行列）は連分展開と関連する．その極限関数をStieltjes表示すれば，密度がヤコビ行列のスペクトル密度を定義し，この密度に関するSchmidtの直交化関数系を用いてヤコビ行列を再現出来る．以上が差分作用素についての逆散乱問題の筋書きである．（これを連続化したものが古典的な小平−Titchmarshの定理であった．）[St] [Sz] [G] [Ko]．これは当然高階に拡張可能なものである．上記は又，関数のPadé近似にも深い関連がある[Cl]．そのためのアルゴリズムがあるはずである．これが前世紀から

知られていた ヤコビ・ペロン算法 によって
なされる[B]. この論稿では これらのいくつか
の概念の関連を示し，さらに この変形
(Lax型で表示される) が 亟度の線型
方程式に他ならぬ事を示す.最後に周期的
な場合の簡単な実例を与える事にする。
なお，広田良吾氏が最初 Soliton 解
を求められた時，Padé 近似の考えを
使われた様ですが，これとの関係は定かで
はない. 氏の方法は多変数の場合も
暗示しているように見える. 今後の問題
であろう([H]参照).

§1. Green 関数

$M, N \geqq 0$ を正整数として 差分系

$$(1)\quad -\lambda u_i + \sum_{j=i-M}^{i+N} a_{ij} u_j = v_i \qquad -\infty < i < \infty, \quad a_{ij} \in \mathbb{C}$$

を考える. ここに 行列 $L = ((a_{ij}))$ は
$M+N$ 階線型差分作用素を定義
する. 形式的に，(1)は

(2) $\quad (\mathbb{L}-z)u = v \qquad \text{on } l^2(-\infty,\infty)$

と書かれ、これが解ければ、形式的に

(3) $\quad u = (\mathbb{L}-z)^{-1} v$

と書かれる。以下、次を仮定する。

(C1) $\quad a_{i,i-M} \neq 0, \quad a_{j,j+N} \neq 0$

$-\infty < i < \infty, \ -\infty < j < \infty$

(C2) $\quad M', N' \geq 0$, 且つ $M'+N' = M+N$ となる組 (M', N') に対して、$\mathbb{C}$ のある領域の点 z に対して、

(4) $\quad (\mathbb{L}-z)u = 0$

を満たす解で、次のような線型独立なものが、各々丁度 M', N' 個存在する：

$$U^{(0)} = \{U_j^{(0)}\}, \cdots, U^{(M'-1)} = \{U_j^{(M'-1)}\} \in l^2[0,\infty)$$

$$U^{(M')} = \{U_j^{(M')}\}, \cdots, U^{(M'+N'-1)} \in l^2(-\infty,0]$$

((C2)の條件は $-\infty, \infty$ における境界條件が極限点となる場合に相当する（[Ko] 参照）。)

この時、

<u>補題1.</u> (3)は Green 関数 $G_{ij}(z)$ を用いて次のように表示される.

$$(5) \qquad u_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_{ij}(z) v_j$$

ここに G_{ij} は,

$$(6) \quad G_{ij}(z) = \frac{\sum_{\sigma=0}^{M-1} (-1)^{\sigma+1} U_i^{(\sigma)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \sigma-1, & \sigma+1, & \cdots, & M+N-1 \\ j-M+1, & j-M+2, & \cdots & & & , & j+N-1 \end{bmatrix}}{a_{j,j-M} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & & M+N-1 \\ j-M, & j-M+1, & \cdots & & & j+N-1 \end{bmatrix}}$$

$$i \geq j$$

$$= \sum_{\sigma=0}^{N-1} \frac{(-1)^{M+\sigma} U_i^{(\sigma+M)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & M+\sigma-1, & M+\sigma+1, & \cdots, & M+N-1 \\ j-M+1, & j-M+2, & \cdots & & & , & j+N-1 \end{bmatrix}}{a_{j,j-M} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & & M+N-1 \\ j-M, & j-M+1, & \cdots & & & j+N-1 \end{bmatrix}}$$

$$i < j$$

で与えられる. 但し

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_p \\ j_1 & \cdots & j_p \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} U_{j_1}^{(\alpha_1)} & \cdots & U_{j_p}^{(\alpha_1)} \\ \vdots & & \\ U_{j_1}^{(\alpha_p)} & \cdots & U_{j_p}^{(\alpha_p)} \end{vmatrix}, \qquad 1 \leqq p \leqq M+N$$

によって定義するものとする.

以下簡単のために $M=M'=1, N=N'=2$ の場合に話を限る. (6) は次の形となる.

$$(6)' \quad G_{ij}(z) = \frac{-U_i^{(0)}\left[\begin{smallmatrix}1 & 2\\ j & j+1\end{smallmatrix}\right]}{a_{jj-1}\left[\begin{smallmatrix}0 & 1 & 2\\ j-1 & j & j+1\end{smallmatrix}\right]} \quad i \geqq j,$$

$$= \frac{-U_i^{(1)}\left[\begin{smallmatrix}0 & 2\\ j & j+1\end{smallmatrix}\right] + U_i^{(2)}\left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\ j & j+1\end{smallmatrix}\right]}{a_{jj-1}\left[\begin{smallmatrix}0 & 1 & 2\\ j-1 & j & j+1\end{smallmatrix}\right]} \quad i<j$$

次節で $l^2[0,\infty)$ 上, 左端が Dirichlet 条件を取り扱う.

§2. $\mathbb{C}$ の閉集合 Γ 上に線型独立な2個の測度 $d\mu_0, d\mu_1$ が与えられているとする. これらの Stieltjes 変換

$$(1) \qquad \omega_0(z) = \int_\Gamma \frac{d\mu_0(\zeta)}{z-\zeta}, \quad \omega_1(z) = \int_\Gamma \frac{d\mu_1(\zeta)}{z-\zeta}$$

ω_0, ω_1 は $z=\infty$ において次のような Laurent 展開を持つものとする.

$$(2) \qquad \omega_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{0,\nu}\, z^{-\nu-1}, \quad \omega_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{1,\nu}\, z^{-\nu-1}$$

但し

(3) $$c_{\nu,0}=\int_\Gamma \zeta^\nu \mu_0(d\zeta),\quad c_{\nu,1}=\int_\Gamma \zeta^\nu \mu_1(d\zeta)$$

これに対して次の条件をおく。

(C 3)

$$\begin{vmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{2k-1,0} \\ \vdots & & \\ c_{k-1,0} & \cdots & c_{3k-2,0} \\ c_{0,1} & & c_{2k-1,1} \\ \vdots & & \\ c_{k-1,1} & \cdots & c_{3k-2,1} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{2k,0} \\ \vdots & & \\ c_{k,0} & \cdots & c_{3k,0} \\ c_{0,1} & \cdots & c_{2k,1} \\ \vdots & & \\ c_{k-1,1} & \cdots & c_{3k-1,1} \end{vmatrix} \neq 0$$

(以下この条件を満たすとき $\mu_0(d\zeta)$, $\mu_1(d\zeta)$ は<u>正則性をみたす</u>と云う)

(4) $$\omega_0=\frac{u_1}{w_1},\quad \omega_1=\frac{v_1}{w_1}$$

(但し $u_1=1$ とする)

とおくときは

$$(5)_0 \quad \begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = a_0 + \dfrac{a_1}{z} + \dfrac{a_2}{z^2} + \cdots \\ w_1 = b_{-1}z + b_0 z + \dfrac{b_1}{z} + \dfrac{b_2}{z^2} + \cdots \end{cases}$$

の形に書けるが　これに対して　$\alpha_2, \beta_2, \beta_2'$
が 存在して

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{v_1}{u_1} = \alpha_2 + \dfrac{u_2}{v_2} \\ \dfrac{w_1}{u_1} = \beta_2 z + \beta_2' + \dfrac{v_2}{w_2} \end{cases}$$

$$\frac{u_2}{v_2} = O(z^{-1}), \quad \frac{v_2}{w_2} = O(z^{-1})$$

と書ける．これを matrix 表示すれば

$$(7) \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \alpha_2 \\ & 1 & \beta_2 z + \beta_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

しかも　u_2, v_2, w_2　は　(5) と 同じ 形 で
書ける．　以下 これが <u>続行 可能 とすれば</u>

$$(8) \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \alpha_{n+1} \\ & 1 & \beta_{n+1} z + \beta_{n+1}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$$

従て　$\omega_0 = v_0/u_0$, $\omega_1 = w_0/u_0$ とおけば,

$$(9)\quad \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n(z) & p_{n+1}(z) & p_{n+2}(z) \\ p'_n(z) & p'_{n+1}(z) & p'_{n+2}(z) \\ p''_n(z) & p''_{n+1}(z) & p'_{n+2}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

と表示される. 但し $p_n(z)$, $p'_n(z)$, $p''_n(z)$ は次数が各々 $n-3$, $n-3$, $n-4$ 次の多項式であり, 右辺の行列式は 1 である.

$$(10)\quad A_n(z) = \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} & p_{n+2} \\ p'_n & p'_{n+1} & p'_{n+2} \\ p''_n & p''_{n+1} & p''_{n+2} \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{C}[z])$$

よって

$$(11)\quad {}^t A_n(z)^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_n(z) & \tilde{q}_n(z) & \tilde{r}_n(z) \\ \tilde{p}'_n(z) & \tilde{q}'_n(z) & \tilde{r}'_n(z) \\ \tilde{p}''_n(z) & \tilde{q}''_n(z) & \tilde{r}''_n(z) \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{C}[z])$$

とおけば　$\tilde{p}_n$, $\tilde{q}_n$, $\tilde{r}_n$, $\tilde{p}'_n$, $\tilde{q}'_n$, $\tilde{r}'_n$, $\tilde{p}''_n$, $\tilde{q}''_n$, $\tilde{r}''_n$ は多項式であり,

$$\deg \tilde{p}_{2k} = k-2,\ \deg \tilde{p}'_{2k} = k-1,\ \deg \tilde{p}''_{2k} = k-1,$$
$$\deg \tilde{p}_{2k+1} = k-1,\ \deg \tilde{p}'_{2k+1} = k,\ \deg \tilde{p}''_{2k+1} = k-1$$

以上の算法は<u>ヤコビ・ペロンの算法</u>に他ならない[B].

命題2.　条件(C3)の下で,

ヤコビ・ペロンの算法はどこまでも続行可能であり，次の Padé 近似が成り立つ．

(i)

$$(12)\quad \begin{cases} \omega_0 - \dfrac{P'_{2k}}{P_{2k}} = O(z^{-3k+3}) \\ \omega_1 - \dfrac{P''_{2k}}{P_{2k}} = O(z^{-3k+4}) \end{cases} \qquad k \geqq 1$$

$$(13)\quad \begin{cases} \omega_0 - \dfrac{P'_{2k+1}}{P_{2k+1}} = O(z^{-3k+2}) \\ \omega_1 - \dfrac{P''_{2k+1}}{P_{2k+1}} = O(z^{-3k+2}) \end{cases} \qquad k \geqq 1$$

(ii) $V_n = \tilde{p}_n + \tilde{p}'_n \omega_0 + \tilde{p}''_n \omega_1$ と

おけば

$$(14)\qquad V_{2k} = O(z^{-2k}),\quad V_{2k+1} = O(z^{-2k-1})$$

しかも degree を指定された多項式の組 (P_n, P'_n, P''_n) 又は $(\tilde{p}_n, \tilde{p}'_n, \tilde{p}''_n)$ に対して (13),(13),(14) を満たすものはスカラー倍を除いて一意である．この意味で関数の組 $(1, \omega_0, \omega_1)$ は K. Mahler の意味で完全 (perfect) になっている ([Ma] 参照).

しかも $\beta_n \neq 0$.

命題3. p_n, p_n', p_n'' は 次の漸化式（差分系）をみたす：

$$
(15)\quad \begin{cases}
p_{n+3} = p_n + \alpha_{n+1} p_{n+1} + (\beta_{n+1} z + \beta'_{n+1}) p_{n+2} \\
p'_{n+3} = p'_n + \alpha_{n+1} p'_{n+1} + (\beta_{n+1} z + \beta'_{n+1}) p'_{n+2} \\
p''_{n+3} = p''_n + \alpha_{n+1} p''_{n+1} + (\beta_{n+1} z + \beta'_{n+1}) p''_{n+2}
\end{cases}
$$

或いは

$$
z p_{n+2} = -\frac{p_n}{\beta_{n+1}} - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} p_{n+1} - \frac{\beta'_{n+1}}{\beta_{n+1}} p_{n+2} + \frac{p_{n+3}}{\beta_{n+1}}
$$

すなわち z倍作用素 は 次の行列表示を与える：

(16)

$$
z(p_3, p_4, p_5, p_6, \cdots) = (p_3, p_4, p_5, p_6, \cdots) \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix}
-\frac{\beta'_2}{\beta_2} & -\frac{\alpha_3}{\beta_3} & -\frac{1}{\beta_4} & 0 & & \\
\frac{1}{\beta_2} & -\frac{\beta'_3}{\beta_3} & -\frac{\alpha_4}{\beta_4} & -\frac{1}{\beta_5} & 0 & \ddots \\
0 & \frac{1}{\beta_3} & -\frac{\beta'_4}{\beta_4} & -\frac{\alpha_5}{\beta_5} & \ddots & \ddots \\
 & 0 & \frac{1}{\beta_4} & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & &
\end{bmatrix}
$$

以下 右辺の行列をJとおく．一方，

— $\tilde{p}_n, \tilde{p}'_n, \tilde{p}''_n$ は 双対

の漸化式を満たす：

(17)
$$z\begin{bmatrix}(\tilde{p}_1' & \tilde{p}_1'')\\(\tilde{p}_2' & \tilde{p}_2'')\\(\tilde{p}_3' & \tilde{p}_3'')\\(\tilde{p}_4' & \tilde{p}_4'')\\ & \vdots\end{bmatrix} = J\begin{bmatrix}(\tilde{p}_1' & \tilde{p}_1'')\\(\tilde{p}_2' & \tilde{p}_2'')\\(\tilde{p}_3' & \tilde{p}_3'')\\(\tilde{p}_4' & \tilde{p}_4'')\\ & \vdots\end{bmatrix}$$

すなわち，$e_{n-3}=p_n$ $(n\geqq 3)$ と $e^*_{n-1}=(\tilde{p}_n',\ \tilde{p}_n'')$ $(n\geqq 1)$ とは双対基底を与える．実際次が成り立つ：

<u>命題4.</u> $n\geqq 1$ において，

(18)
$$\tilde{p}_n(z)=\int_\Gamma\frac{\tilde{p}_n'(\zeta)-\tilde{p}_n'(z)}{\zeta-z}\mu_0(d\zeta)+\int_\Gamma\frac{\tilde{p}_n''(\zeta)-\tilde{p}_n''(z)}{\zeta-z}\mu_1(d\zeta)$$

(19)
$$V_n(z)=\int_\Gamma\frac{\tilde{p}_n'(\zeta)\,\mu_0(d\zeta)}{\zeta-z}+\int_\Gamma\frac{\tilde{p}_n''(\zeta)\,\mu_1(d\zeta)}{\zeta-z}$$

且つ　<u>陪直交関係</u>

(20)
$$\int_\Gamma p_n(\zeta)\left\{\tilde{p}_m'(\zeta)\,\mu_0(d\zeta)+\tilde{p}_m''(\zeta)\,\mu_1(d\zeta)\right\}=\delta_{n,m+2}$$
$$n\geqq 3,\quad m\geqq 1$$

従って

(21) $\left(e_m, (J-z)^{-1} e_n^*\right) =$

$$= \int_\Gamma \frac{p_{m+3}(\zeta)\left(\tilde{p}'_{n+1}(\zeta)\mu_0(d\zeta) + \tilde{p}''_{n+1}(\zeta)\mu_1(d\zeta)\right)}{\zeta - z}$$

と与えられる，$m, n \geqq 0$．或いは，

(22) $$\begin{cases} p_{n+3}({}^tJ)e_0 = e_n, \\ \tilde{p}'_{n+1}(J)e_0^* + \tilde{p}''_{n+1}(J)e_1^* = e_n^* \end{cases}$$

が成立する．すなわち 行列 J は $\omega_0 = (e_0, (J-z)^{-1}e_0^*)$，$\omega_1 = (e_0, (J-z)^{-1}e_1^*)$ のみによって一意に決定されている．又逆に これから スペクトル密度 $\mu_0(d\zeta)$，$\mu_1(d\zeta)$ が公式 (1) によって決まる．これが今の場合の逆散乱問題及びスペクトル分解を与える道筋である．

問題A． (12)，(13) によって p_n, p'_n, p''_n を求めた場合，いかなる $z \in \mathbb{C}$ に対して

(23) $$\omega_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{p'_n}{p_n}, \quad \omega_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{p''_n}{p_n}$$

が存在するか？ この収束域と J のレゾル

ベント集合とはいかなる関係にあるか？後にひとつの実例を与える事にする([Mo]参照).

§3. 周期的な行列の場合

以下, §1の行列 L は n-周期条件を満たすものとする ($M=1$; $N=2$ は仮定する)

(1) $$a_{i,j} = a_{i+n,j+n}, \quad -\infty < i, j < \infty$$

標準的な方法により, n次行列 L_h を

(2) $$L_h = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & 0 & \cdots & a_{0\,n-1}h^{-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \\ a_{n-2,n}h & & & & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} \\ a_{n-1\,n}h, & a_{n-1,n+1}h & 0 & 0 & a_{n-1\,n-2}, & a_{n-1\,n-1} \end{bmatrix}$$

とおいて([Mo and Mu]参照),

(3) $$\det(-x + L_h) = 0$$

の根を h, h', h'' とおく.

今 $|h|<1$, $|h'|>1$, $|h''|>1$ とする.

このとき §1,(4)の解で次の条件をみたす

ものが存在する：

$$(4)\quad \begin{cases} U^{(0)}=\{U_j^{(0)}\} & U_{j+n}^{(0)}=h\,U_j^{(0)}, \\ U^{(1)}=\{U_j^{(1)}\} & U_{j+n}^{(1)}=h'\,U_j^{(1)}, \\ U_j^{(2)}=\{U_j^{(2)}\} & U_{j+n}^{(2)}=h''\,U_j^{(2)} \end{cases}$$

すなわち　$U^{(0)}\in l^2[0,\infty)$; $U^{(1)}, U^{(2)}\in l^2(-\infty,0]$

これより　§1，公式(6)′によって　$G_{ij}(z)$ が得られる.

次に　$|h|<1$, $|h'|<1$, $|h''|>1$ の場合を考える．このとき　$U^{(0)}, U^{(1)}\in l^2[0,\infty)$，$U^{(2)}\in l^2(-\infty,0]$ だから　§1，公式(6)により

$$(5)\qquad G_{ij}(z)=\frac{-U_i^{(0)}\begin{bmatrix}1&2\\j&j+1\end{bmatrix}+U_i^{(1)}\begin{bmatrix}0&2\\j&j+1\end{bmatrix}}{a_{j,j-1}\begin{bmatrix}0&1&2\\j-1&j&j+1\end{bmatrix}}\qquad i\geqq j$$

$$=\frac{U_i^{(2)}\begin{bmatrix}0&1\\j&j+1\end{bmatrix}}{a_{j,j-1}\begin{bmatrix}0&1&2\\j-1&j&j+1\end{bmatrix}}\qquad i<j$$

$hh'h''=1$ だから　これ以外の可能性はない.

(4)の公式を使って　$G_{ij}(z)$ は簡単になる.

$G_{ij}(z)$ は z の代数関数である．実際，

$|h|=1$ のとき

$$(6)\qquad \tilde{u}_i(h) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} u_{i+n\nu}\, h^{\nu} \qquad 0 \leqq i \leqq n-1$$

と定義すれば，$|h|=1$ 上の n 個の関数系が得られ，行列 L は これらについて，掛け算の行列作用素

$$(7)\qquad \begin{pmatrix} \tilde{u}_0(h) \\ \tilde{u}_1(h) \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n-1}(h) \end{pmatrix} \longrightarrow L_h \begin{pmatrix} \tilde{u}_0(h) \\ \tilde{u}_1(h) \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n-1}(h) \end{pmatrix}$$

とも見做せる．従って Green 関数は $(-z+L_h)^{-1}$ に等しい．これを用いてスペクトル（密度）が計算される．その結果，L のスペクトルは Riemann 面（(3)によって定義された）$\mathcal{L}$ の中で

$$(8)\qquad \Gamma : |h| = 1$$

と一致する事が証明される．その詳細は省く．h は z の代数関数であるが，$\mathcal{L}$ が さらに Galois 被覆であるとする．n が偶数ならば，h は次の形に表示される：

(9) $$h = -\varphi(z) + \sqrt[3]{1-\varphi(z)^3}$$ (戸田曲線)

(ここに φ は $\frac{n}{2}$ 次多項式) 特に $n=2$ ならば、

(10) $$h = -z + \sqrt[3]{1-z^3}$$

$|h|<1$ なる範囲では

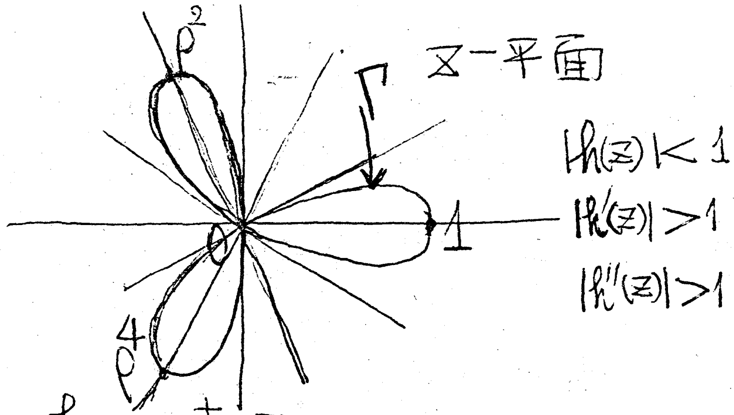
(11) $$\begin{cases} U_j^{(0)} = O(z^{-j-1}) \\ U_j^{(0)} = V_{j+1} = \tilde{P}_{j+1}(z) + U_0^{(0)}\tilde{P}'_{j+1}(z) + U_1^{(0)}\tilde{P}''_{j+1}(z) \end{cases}$$

となっており、対応するヤコビ行列 J は

(12)
$$(\rho^2-1)\cdot J = \begin{bmatrix} h'(w), & \rho^2 h'(w)h''(w), & -1 & 0 & \\ 1 & -h'(w) & , -\rho^2 h'(w)h(w), & \rho^2 & \ddots \\ 0 & -\rho^2 & , & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\rho = e^{\frac{\pi i}{3}}, \quad w \in \mathbb{C}$$

なお $|h|=1$ なる軌跡を z-平面で表示すれば下図のような概略となる。



§4. Lax 表示

§2において 陪直交基底 $\{e_n\}$, $\{e_m^*\}$ を定義した。これに順序を導入する：

$$(1)\quad \begin{array}{l} e_0 < e_1 < e_2 < e_3 < \cdots \\ e_0^* < e_1^* < e_2^* < e_3^* < \cdots \end{array}$$

すると、作用素 A に対して $A^{(+)}, A^{(-)}$ が次のように定義出来る

$$(2)\quad (e_n, A^{(+)} e_m^*) = \begin{cases} (e_n, A e_m^*) & m > n \\ \frac{1}{2}(e_n, A e_n^*) & m = n \\ 0 & m < n \end{cases}$$

$$(3)\quad A^{(-)} = A - A^{(+)},$$

この時 次の一般的事実が成り立つ。

命題5. J が時間 t に依存しているものとし、

(4) $$\dot{J} = [J,\ f(t,J)^{(+)} - f(t,J)^{(-)}]$$

を満たすとする. この時 J のスペクトル密度 $\mu_0(d\zeta)$, $\mu_1(d\zeta)$ は 線型方程式

(5) $$\frac{d}{dt}(\mu_0(d\zeta), \mu_1(d\zeta)) = f(t,\zeta)\,(\mu_0(d\zeta), \mu_1(d\zeta))$$

を満たす. 又 逆も成り立つ.

この命題は(作用素の) Lax 表式化の普遍的特徴を表わしている([A], [Ka] 参照). これがいかなる意味で一般化出来るかは又別の機会にゆずりたい.

文献

[St] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, A.M.S., 1932.

[Sz] G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, A.M.S. 1959.

[G] F. R. Gantmacher and M. G. Kreĭn *Oscillation matrices and kernels and small vibrations of dynamical systems*, Moscow, 1959.

[Ko] K. Kodaira, On ordinary differential equations of any order and the corresponding eigenfunction expansions, Amer. J. Math., 72(1950), 502-544.

[B] L. Bernstein, The Jacobi-Perron algorithms its theory and application, Springer Lec. Notes 207(1971)

[H] R. Hirota, Direct methods in Soliton theory, Current Topics in Physics, Springer Verlag, Vol. 17 (1980).

[Ma] K. Mahler, Zur Approximationen der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II Crelle J. 166(1932), 118-136

———, Lectures on transcendental numbers, Springer Lec. Notes 546 (1976)

[Me] S.N. Mergelyan, Uniform approximation of functions of complex variables, Usphi, Mat. Nauk 7(1952), 31-122

[Mo] P. Van Moerbeke and D. Mumford, The spectrum of difference operaters and algebraic curves, Acta. Math. Vol. 143(1979)

93–154

[A] K. Aomoto Lax equation and the spectral density of Jacobi matrices for orthogonal polynomials, (preprint 1981).

[Ka] Y. Kato On the spectral density of periodic Jacobi matrices, to appear in World Sci. Pub., 1982.

[Be, 2] J.M. Berezanski, Expansions in Eigenfunctions of Self-adjoint Operaters, Transla. 17 (1968)

[Mi] H. Minkowski, Über periodische Approximationen algebraischer Zahlen, Acta Math. Bd 26 (1902), 333–351.

[Mc] H.P. Mckean, Boussinesq's equation on the circle, Courant Inst. of Math. Sci., 1980.

[Ch] G.V. Chudonovsky, The inverse scattering problem and applications to arithmetics, Lec. Notes in Physics, 120 (Springer 1980)

なお，竹中茂氏，渡辺敏弘氏には有役な情報をいただいた．

93-154

[A] K. AOMOTO Lax equation and the spectral density of Jacobi matrices for orthogonal polynomials, (preprint 1981).

[Ka] Y. Kato On the spectral density of periodic Jacobi matrices, to appear in World Sci. Pub., 1982.

[Be, 2] J.M. Berezanski, Expansions in Eigenfunctions of Self-adjoint Operators, Transla. 17 (1968)

[Mi] H. Minkowski, Über periodische Approximationen algebraischer Zahlen, Acta. Math. Bd 26 (1902), 333-351.

[F] H.P. Mckean, Boussinesq's equation on the circle, Courant Inst. of Math. Sci., 1980.

[Ch] G.V. Chudonovsky, The inverse scattering problem and applications to arithmetics, Lec. Notes in Physics, 120 (Springer 1980)

なお，竹中茂氏，渡辺敏弘氏には有役な情報をいただいた．