数理解析研究所講究録
472巻 1982年 7-15

Yang-Mills-Higgs理論と戸田格子方程式

京大 数理研　南　政次
Minami Masatsugu

場の理論には相対性不変という強い要請が付きまとうので、名だたるソリトン方程式も、素粒子論にやたら登場するわけではない。はやくから登場したものとしてはsine-Gordonがあり，特にmassive Thrring模型との絡み等はその面白い一例だろうが，著しい例として最近（といっても1978年頃からだが）戸田格子方程式がこの分野で注目を集めている。素粒子論における非線型場の理論とは，いまのところ，Yang-Mills-Higgsに尽きるのだが，その特殊な場合に登場し，戸田方程式自身のもつ美しさもあって，一般的なゲージ群にまで見透しがよいのは，いまのところこの場合だけではないかと思う。以下，文献をchronologicalに紹介することを目的にし，どのように戸田格子方程式がこの分野に現われるに至ったか，その動向を解説したい。

戸田格子方程式は様々な形で書けるが，とりあえず

$$\partial_u \partial_{\bar{u}} \Phi_\alpha = \pm \exp[-K_{\alpha\beta} \Phi_\beta] \qquad (*)$$

とする。$(K_{\alpha\beta})$はYang-Millsのゲージ群（一般に半単純な

Lie群）Gを（又は，の）規定するCartan行列で，$G=SU(\infty)$のとき もとの戸田格子方程式になっている。rankが有限の時は戸田分子方程式とも呼ばれるが，これは$(K_{\alpha\beta})$の定めるDynkin図の"dual"が有限な戸田鎖で，これを分子と見たてのことである。$u=s+it$ の二変数の時は二次元Toda，$u=\pm\bar{u}$ の時は一次元Todaと呼ぶことにする。$K_{\alpha\beta}$の入れ方は唐突に見えるかもしれぬが，戸田方程式(*)をZakharov-Shabat方程式に移してやると，これはゲージ・ポテンシャルBが"純ゲージ" $B=R^{-1}\partial R$ 型であることを言っているので，容易にGのgeneratorsによって書き下せ，Chevalley-Serreの基を使えば$K_{\alpha\beta}$は自然にあらわれる（一次元の時も同じ，但し従来のLax pairではうまく乗らないだろう）。Yang-Mills（といっても self-dualなもの）を"純ゲージ"型へ還元して行くのは一般に易しくないが，上のB型のものがYang-Millsのポテンシャルと同じ構造を有っていると思って貰ってよく，又YangのR-gauge [4]の言葉を使うと，矢張り上のRはこれに対応するもので，Φ_αを Yangの有名な

$$R=\frac{1}{\sqrt{\phi}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \phi \end{pmatrix}$$

という表示との対応で言うと，$\Phi=\log\phi$ ぐらいの意味を持つ（詳しくは[18]）。

A_ℓ型のLie環は素粒子論で頻繁に使われるものであるが，$G=SU(2)$はいつもの出発点になる。この場合TodaはLiouville方程式になる（$K_{11}=2$）。この方程式はDual Resonance Theoryにも現われているが（Omnés, N.P. B149 ('79) 269, Polyakov），Yang-MillsではE. Witten [3] による。この論文は無数のinstantonsの存在を証明した画期的なものだが，彼は量が時間tと，あと空間は$r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$にのみ依存すると仮定して（cylindrical symmetry仮定），方程式を単純化し，Liouvilleを得，その解によって上の証明を行ったのである。彼の形式をZakharov-Shabat型で捉えることも不可能でないと思うが，彼は巧妙に上の仮定によって四元ポテンシャルを$A_0, A_1, \varphi_1, \varphi_2$で書きなおし，$A_i$の方は二次元ポテンシャルみたいに（$\partial_i A_i=0$），$\varphi_i$の方はHiggs場みたいにして了うわけで，$A_i=\epsilon_{ij}\partial_j\psi$の$\psi$が――少し曲折はあるが――Liouvilleを満すようになるのである。

次に（歴史的に）意味のある論文は[5]であろう。これはWittenの方法をSU(3)に踏襲したもので，こゝでself-duality方程式は

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\rho &= 2e^{2\rho}-e^{2\rho'}\\ \nabla^2\rho' &= -e^{2\rho}+2e^{2\rho'}\end{aligned}\right\}\qquad (**)$$

に還元された。こゝに出ている

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

はまさにA_2のCartan行列で，(**)は二次元戸田分子方程式になっているのである（イギリスのYatesも同じことを試みているが，SU(2)の埋め込みが拙く，こうすんなりとは行かなかった）。しかし，BaisとWeldonがここにCartan行列の入っていることを意識していたかどうかは判らない。というのは[8]においてG=SU(n)に一般化したのだが（SU(n)へのSU(2)埋め込みは，この頃には大分楽になって来ている）まだ変数のとり方が悪く，(*)の形には行かなかった（(**)へはreduceするのだが）。ここで，(*)の形にこだわるのは，Todaとの関連は(*)の形（もしくは $-K_{\alpha\beta}\Phi_\beta \sim \rho_\beta$ とおいて）でなければ判らないからである。Bais-Weldonはだから戸田格子とは言っていない。

一方，LeznovとSavelievもWittenのSU(2)から出発して考察を進めていたようで[7]において（Bais-WeldonのSU(n)と同時期に）一般の半単純Lie群をゲージ群とする場合に(*)型の式を出した。彼等は仮定を群論の言葉で整理していったのでCartan行列に出会っていたのだが，正確に言うとまだ(*)の形ではなく，戸田格子とも言っていない。[10]でも然りである。結局，最もよく整頓された形で現われるのは[14],[15]であると思う。ここでは明白にToda lattice方程式の一般化として捉えられている。群論の駆使もすることなが

ら、戸田方程式がソ連でよく（欧米より？）知られていたということが重なったのかもしれない。

扨て、E. Witten の論文には、もう一つ示唆があって、それは彼の仮定によって作用が恰も二次元のポテンシャルと二つのHiggs場による作用に還元されてしまっていること、逆に云えばHiggs場の入ったものもLiouville/Todaへ通じるらしいということである。一方[2]に於いてBogomolnyは四次元Yang-Millsで時間を度外視し、A_0をHiggs ΦとするとstaticなYang-Mills-Higgsになることを示し、所謂self-duality方程式が後年Bogomolny方程式と呼ばれるものになり、その解が非アーベル磁気monopole†)を与えることを示していたので、こちらにもToda型（但し時間に独立）が現われるということが予想出来たわけである。Bogomolnyの扱ったのはSU(2)で、それが[1]でself-dualityの考えを使わずに得られていたもの（実際は独立）に一致するわけだが、勿論Todaへの見通しはない。

Bais-Weldon [6]は、SU(2)の埋め込み方を知っていたの

†) 磁気monopoleは電極のdualな概念としてDiracによって考えられたものだが、Maxwell U(1)理論の枠内では、磁荷がsmoothな分布を持つというわけにはゆかなかった。しかしYang-Mills非アーベル理論では何ら特異性を持ち込まずに存在できる。非線型項がsmooth outされる磁荷密度のように働くのである。magnetic monopoleの物理的存在性は宇宙の冷却過程における相転移のなかで論じられている。

で，SU(n)の場合球対称なself-dual monopoleの方程式が矢張り一次元戸田分子型（tでなく$r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$が変数）になることを示し得た（式の形は[8]と同様（*）のようではない。しかし（*）へは変数変換でゆける）。[7]においては，四次元Yang-Millsと三次元Yang-Mills-Higgsが同じように扱われているのも上のことによる。

結局，Instantonの場合円筒仮定で二次元戸田分子，球対称磁気monopoleの場合一次元戸田分子方程式がYang-Mills-(Higgs)の中心的方程式になったわけだが，扨て解についてはどうかというと（物理屋の範囲では）二次元Todaについては[14,15]が，一次元Todaについては（Kostantその他は御勘弁願うとして）[13]で一応与えられていることになっている。但し，存在定理だけが与えられているようなもので，具体的にどうかというと，ちょっとやそっとでは解らない。Oliveの[17]は磁気monopoleについてのこの方面のreviewで，解はLeznov-Savelievによっているが，いくらか易しく解題しているといえる。それでも，この方法でSU(2)のWittenの解（昔から知られているものだが）を出すのですら——筆者は直接Olive氏から伺ったことがあるが——まあまあ大変な手続きが要るという感じである。[18]は二次元Todaでの解法を別の観点からもっとすっきりさせたものである。但しゲージ

群は典型Lie群に限らざるを得なかった。抽象的にやるか、具体的に進めるかで、得るところは違うのである。

大も monopoleに限れば一次元戸田分子方程式の解だけが有用なので[13]で本質的によいのだが(Olive氏には[13]が不可解だったとかで、先述のように二次元の解から還元するという形でやっている)、Wilkinson-Bais は[9]で SU(n)の場合独自に、Koikawa [20]は馴染みの方法で解いている。Oliveのやり方も含めて、これらは物理的な境界条件を重視して特殊解を捻り出して来るわけである。実は[18]の群論的見方をすると、一次元の場合も一般解を求め書き下すことが出来、[9]の結果など含まれて了う([22]、但し典型Lie群)。

紙数の関係で、こゝまでで留めるが、一つ強調したいのは、球対称のmonopole や instantonが、一般のしかも higher rank のゲージ群の場合に至るまで見通しよく解明されて来たのは戸田方程式のもつ数学的構造の見事さ、控え目でも背景にLie環を考えることが出来るという点にあったということである。軸対称のmonopoleの場合、武野氏や佐々木氏の稿で示されるようにErnst方程式やそのBäcklund変換などの方へ興味深い流れ方をするのであるが、higher rank の場合の論述については Bais-Sasaki 以前は殆んど見られなかったのは、非常に対照的と言える。今後についても、戸田分子の量子論

などは，場の量子論のなかで一定の働きをするかもしれない。

尚，(*)式を $\rho_\alpha = -K_{\alpha\beta}\Phi_\beta$ でなく Φ_α で書いたのは，その方がEuclidean Lie 代数まで取り込むことが出来るからである（この場合 $\det(K_{\alpha\beta})=0$）。例えば $A_\ell^{(1)}$ 型は特に面白い対称性に恵まれているし（e.g. [17], [20]），その戸田分子は ring になる。$A_1^{(1)}$ の場合，$2(\Phi_1-\Phi_2)=\rho$ とおくと，(*)は $\partial_u\partial_{\bar{u}}\rho = -4\sinh\rho$ で sinh-Gordon，他に $A_2^{(2)}$ では $\Phi_1-2\Phi_2=\rho$ とおいて，$\partial_u\partial_{\bar{u}}\rho = e^{-2\rho}-2e^{\rho}$ つまり Bullough-Dodd 方程式，等々。

[1] Prasad-Sommerfield, PRL 35, 760 (June 1975) } SU(2) monopole

[2] Bogomolny, S-J-NP 24, 449 (Nov 1975) }

[3] E. Witten, PRL 38, 121 (Nov 1976) SU(2) instanton

[4] Yang, PRL 38, 1377 (Apr 1977) R-gauge

[5] Bais-Weldon, PR D18, 561 (Apr 1978) SU(3) instanton

[6] Bais-Weldon, PRL 41, 601 (June 1978) SU(n) monopole

[7] Leznov-Saveliev, PL 79B, 294 (July 1978) any semi-simple

[8] Bais-Weldon, PL 79B, 297 (July 1978) SU(n) instanton

[9] Wilkinson-Bais, PR D19, 2410 (Oct 1978) SU(n) monopole

[10] Leznov-Saveliev, PL 83B, 314 (Feb 1979) SU_3, O_5, G_2

[11] Leznov, TMP 42 No.3 (Feb 1979) 二次元 Toda

[12] Mikhailov, JETP 30 No.7 (May 1979) 二次元 Toda

[13] Olshanetsky-Perelomov, Inv. Math. 54 261 (June 1979) 一次元 Toda

[14] Leznov-Saveliev, CMP 74, 111 (Aug 1979) 二次元 Toda

[15] Leznov-Saveliev, LMP 3, 489 (Sept 1979) 〃

[16] Mikhailov-Olshanetsky-Perelomov, CMP 79, 1981 (July 80)

[17] Olive, in Current Topics in Elem. Parti. Phys. (Plenum) p.199.

[18] Farwell-Minami, JP A15, 25 (May 1981) 二次元 Toda

[19] Farwell-Minami, JP A15, 355 (July 1981) $A_\ell^{(1)}$

[20] Koikawa, PL 110B, 129 (Dec 1981) SU(n) monopole

[21] Ganoulis-Goddard-Olive, NP B265 [FS5], 601.

[22] Farwell-Minami, to appear (One-Dim Toda Molecule, I, II).