

## Automorphisms of Polynomial and Powerseries Rings

コーネル大 M.E. スウィドラー (M. E. Sweedler)

数年間、私は Jacobian conjecture に興味を持っていた。  
この予想は次の様なものである。  $A$  を標数 0 の体上の  
 $n (< \infty)$  変数多項式環  $F: A \rightarrow A$  を代数射としたとき  
 $F$  は  $A$  の自己同形射  $\Leftrightarrow |J(F)|$  は零でない基礎体の元。  
 $|J(F)|$  はヤコビアン行列の行列式であり、ヤコビアン行列  
は、 $F(x_i) = F_i(x_1, \dots, x_n)$  のとき、各成分が  $A$  の元である下  
記の  $n \times n$  行列をいう。

$$J(F) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) \text{ よって、} |J(F)| \in A.$$

$F$  が自己同形射のときに、 $|J(F)|$  が零でない基礎体の元  
であることは簡単に証明できる。よって、Jacobian  
conjecture は " $\Leftarrow$ " の向きを示すことであり、それが前に  
" $\Leftarrow$ " と書いた理由である。1変数の場合には簡単に証  
明できるが、2変数以上の場合にはまだ知られていない  
!  $A$  の可逆元は基礎体の零でない元のみであるので、

線型代数から、Jacobian conjecture は次と同値である。

$F$  は  $A$  の自己同形射  $\Leftrightarrow J(F)$  は逆行列を持つ。

$J(F)$  は逆行列  $L = (l_{ij})$  を持つとせよ。  $l_{ij}$  は  $A$  の元である。  
偏導関数  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  の代わりに  $\partial_i$  と書く。  $a \in A$  に対して、導関数  $a\partial_i$  を次の様に定義する。

$$(a\partial_i)(b) = a \partial_i(b)$$

また、 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  は次の行列による関係式で、定義される導関数とする。

$$L \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad \text{つまり、} \quad \varepsilon_i = \sum l_{ij} \partial_j.$$

INVERSION FORMULA によつて、ある条件のもとで  $\varepsilon_i$  を使つて  $F^{-1}$  をあらわすことができる。

$$F^{-1}(a) = \sum_{0 \leq \nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{Z}} \underbrace{(x_1 - F_1)^{\nu_1} \cdots (x_n - F_n)^{\nu_n}}_{\text{これと } (x-F)^\nu \text{ と書く。}} \underbrace{\frac{\varepsilon_1^{\nu_1} \cdots \varepsilon_n^{\nu_n}}{\nu_1! \cdots \nu_n!}}_{\text{分子は関数 } \varepsilon_i \text{ の合成を示す。つまり}}(a)$$

上記の  $n$  組を  $\nu \in |\mathbb{Z}|^n$  と書く。

た. 時.  $|\mathbb{Z}| = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq 0\}$

分子は関数  $\varepsilon_i$  の合成を示す。つまり

$$\underbrace{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_1}_{\nu_1 \text{ 回}} \cdots \underbrace{\varepsilon_n \cdots \varepsilon_n}_{\nu_n \text{ 回}}$$

これを  $\frac{\varepsilon^\nu}{\nu!}$  と書く。

WHEN IS THE SUMMATION IN THE INVERSION FORMULA WELL DEFINED?

Definition:  $\varepsilon_i$  が  $A$  上 locally nilpotently に作用するとは、それぞれ  $\alpha \in A$  に対して、 $\varepsilon_i^m(\alpha) = 0$  とする  $m$  ( $\alpha$  による) が存在するときという。 $\varepsilon_i$  が  $A$  上 locally finitely に作用するとは、それぞれの  $\alpha \in A$  に対して、下記の条件を満たす  $A$  の 有限次元部分空間  $V$  が存在するときという。

$$\alpha \in V \text{ and } \varepsilon_i(V) \subseteq V$$

明らかに、local nilpotence  $\Rightarrow$  local finiteness。

次にいくつかの  $\{\varepsilon_i\}$  の性質をあげる。

### PROPERTIES

- ①  $\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i$  すべての  $i, j$  に対して
- ② もし  $F$  が自己同形射ならば、すべての  $i$  に対して  $\varepsilon_i = F \circ \varepsilon_i \circ F^{-1}$  によって、 $\varepsilon_i$  の locally nilpotently によって、 $\varepsilon_i$  も locally nilpotently に作用している。
- ③ もし  $\varepsilon_i$  が locally finitely に作用しているならば、 $\varepsilon_i$  は locally nilpotently に作用している。
- ④ もし、すべての  $i$  に対して  $\varepsilon_i$  が locally nilpotently に作用しているならば、 $F$  は automorphism である。

②と④は最初、私たちと違った方法で、David Wright 氏によって示された。彼が与えた定理:

(\*)  $F$  は  $A$  の自己同型射  $\Leftrightarrow J(F)$  は逆行列を持ち、すべての  $i$  について、 $\varepsilon_i$  は locally

nilpotently に作用する。

すべての  $i$  について、 $\varepsilon_i$  が *locally nilpotent* のときは、Inversion Formula における和は、有限個を除いて、項は 0 となるので well defined である。この場合、Inversion Formula は正しい。事実、 $F^{-1}$  を定義するのに使うことができ、また Wright 氏が与えた (\*) における “ $\Leftarrow$ ” 向きの証明と違った証明を与えるのに使える。

Inversion Formula はべき級数環の場合、標数が正の場合にと、一般化される。

## POWERSERIES RINGS:

$A$  を標数 0 の体上の  $n$  変数のべき級数環、 $F: A \rightarrow A$  を代数射とする。もし  $I$  が  $A$  の極大イデアルの場合、 $F^{-1}(I)$  は極大イデアルとなり、 $F^{-1}(I) = I$  である。よって、 $F_j = F(x_j) \in I$ 、すべての  $j$  に対して、ヤコビアン行列  $J(F)$  は前と同じ様に定義される。定数項が零でないべき級数は可逆であるので、 $J(F)$  が逆行列 (前と同じ様に  $L$  で表わす。) を持つことと、 $|J(F)|$  が零でない定数項を持つことと同値である。 $J(F)$  が逆行列を持つとき、前と同様に  $\{ \varepsilon_i \}$  を定義する。“ $(x-F)$ ” がどんどんと、高い乗数の  $I^m$  に属していくので、Inversion

Formula 1: おける和は収束する。 Inversion Formula は  
べき級数環では正しい。(local nilpotence の条件は、必  
 要ない。) もし Inversion Formula を  $F^{-1}$  を定義するの  
 に使えば、べき級数環における " $\Leftarrow$ " 向きの今までの証明  
 とは違った証明を得る。

$F$  は  $A$  の自己同形射  $\Leftrightarrow j(F)$  は逆行列を持つ。

すべての  $\varepsilon_i$  が、well defined である: とと、 $F$  が自己  
 同形射である: とは同値である。この場合、すべての  
 $i$  に対して、 $\varepsilon_i = F \circ \partial_i \circ F^{-1}$  であり、これから簡単に、  
 $\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i$  がわかる。よって、多項式環における  
 PROPERTIES ①②と同じ様な結果をべき級数環につ  
 いても得る。

## POLYNOMIALS POWERSERIES OVER GENERAL RINGS, INCLUDING POSITIVE CHARACTERISTIC;

Inversion Formula 1: おける困難な点は " $\varepsilon_i / i!$ " の分母 " $i!$ " である。しかしながら、偏導関数  $\partial_i$  に対して、  
 次の様に定義するのは自然である。

$$\left( \frac{\partial_i^l}{l!} \right) (x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}) = \begin{cases} 0 & (l > e_i \text{ のとき}) \\ \text{もしくは} \\ \binom{e_i}{l} x_1^{e_1} \cdots x_i^{e_i-l} \cdots x_n^{e_n} \end{cases}$$

上記は、標数が0の場合も正しい。 $\left(\frac{\partial^{\nu}}{\nu!}\right)$  は形式的記号であり、正標数の場合は $\frac{\partial^{\nu}}{\nu!}$ の様に計算されないので、“ $\frac{\partial^{\nu}}{\nu!}$ ”のまわりをまるくかこった。

$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in |\mathbb{Z}|^n$  に対して、

$$\left(\frac{\partial^{\nu}}{\nu!}\right) = \left(\frac{\partial_1^{\nu_1}}{\nu_1!}\right) \circ \left(\frac{\partial_2^{\nu_2}}{\nu_2!}\right) \circ \dots \circ \left(\frac{\partial_n^{\nu_n}}{\nu_n!}\right)$$

と定義する。 $\left\{\left(\frac{\partial^{\nu}}{\nu!}\right)\right\}_{\nu \in |\mathbb{Z}|^n}$  は、 $a, b \in A$  に対して、Leibniz identity を満足する。

$$\left(\frac{\partial^{\nu}}{\nu!}\right)(ab) = \sum_{\substack{\lambda + \mu = \nu \\ \lambda, \mu \in |\mathbb{Z}|^n}} \left[\left(\frac{\partial^{\lambda}}{\lambda!}\right)(a)\right] \left[\left(\frac{\partial^{\mu}}{\mu!}\right)(b)\right]$$

これは、 $A$  が可換環  $R$  上の  $n$  変数多項式環、 $n$  変数べき級数環の場合に正しい。もし、 $F$  が  $A$  の自己同形射であるときは、 $J(F)$  は逆行列を持つ  $n \times n$  行列である。その逆行列を  $L$  とせよ。また

$$\left(\frac{\varepsilon^{\nu}}{\nu!}\right) = F \circ \left(\frac{\partial^{\nu}}{\nu!}\right) \circ F^{-1}$$

とすれば、前と同じ様に、

$$L \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} .$$

すなわち、 $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon^{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}}{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)!}$  .

$A$  が多項式環であるときに、次の意味で *locally nilpotently* に  $A$  に作用している。つまり、 $\alpha \in A$  に対して、次が成り立つ  $m$  が存在する。

$$\left( \frac{\varepsilon^u}{u!} \right) (\alpha) = 0 \quad \begin{array}{l} u_1 + \dots + u_n \geq m \text{ となる} \\ \text{すべての } u_i \text{ に対して.} \end{array}$$

これは、 $\{\partial^u / u!\}$  が *locally nilpotently* に  $A$  に作用しているのだから正しい。よって、Inversion Formula における和は、有限和であり、その公式は成立する。もし、 $A$  がべき級数環であるときには、 $F_i = F(x_i)$  が  $\{x_i\}$  で生成されるイデアル  $I$  に属するとは限らない。しかしながら、それぞれ  $F_i$  が  $I$  に属するならば、“ $(x-F)^u$ ” がどんどん高い乗数の  $I^n$  に属してゆくので、和は収束して、Inversion Formula は正しい。

### FIND THE MISSING FORMULA:

一般の場合に、 $\left( \frac{\varepsilon^u}{u!} \right)$  を  $F \circ \left( \frac{\partial^u}{u!} \right) \circ F^{-1}$  と定義するのに  $F^{-1}$  を使ったので、Inversion Formula を使用することはできなかった。  $F \circ - \circ F^{-1}$  は内部自己同形であるので、標数 0 の場合は、 $\left( \frac{\varepsilon^u}{u!} \right) = \frac{\varepsilon^u}{u!}$  が成り立つ。  $\{\varepsilon_i\}$  は  $L$  と  $\{e_i\}$  で表現できるので、標数が 0 の場合  $F^{-1}$  ではなく  $J(F)^{-1}$

のみを含む  $F^{-1}$  についての公式を得る。たぶん、 $(\varepsilon^y/u!)$  についても、 $F^{-1}$  を使わずに、 $J(F)^{-1}$  と  $\{2^y/u!\}$  のみを含む公式を見つけられるであろう。私はそのような公式の存在を信ずるが、それを見つけることはできなかった。その後で、多項式の場合、 $\{(\varepsilon^y/u!)\}$  が *locally nilpotently* に作用している時、またべき級数環の場合は、 $F(I)CI$  のとき、Inversion Formula を使用して、定義することが出来る。

#### REFERENCE;

M.E. Sweedler & Pekka Nousiainen; Automorphisms of Polynomial and Powerseries Rings, to appear in Journal of Pure and Applied Algebra