

Hyperalgebraic construction of Chevalley group schemes

筑波大学数学系 竹内光弘 (Mitsuhiro Takeuchi)

いわゆる Chevalley 群スキームの定義と構成を、hyperalgebraic の見地から振り返り、特にそれらは常に reflexive 群スキームとなる事を示すのが、講演の目的である。hyperalgebraic Hopf 代数は従来、体上で主に扱われて来たので、 $\mathbb{Z}$  上で考える場合は、いささかデリケートになる。問題の reflexivity は  $\mathbb{Z}$  上だから成立する事で、体上では成立しない。

どんな base ring の上でも affine 群スキームは、可換 Hopf 代数と、カテゴリーカルに対応する。以下の話では、base ring を  $\mathbb{Z}$  にとる。

$\Delta: C \rightarrow C \otimes C$  と  $\varepsilon: C \rightarrow \mathbb{Z}$  を構造とする coalgebra  $C$  に対し、 $C^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, \mathbb{Z})$  は、 $\varepsilon$  を単位元、 $\Delta^*$  から引起される積により代数となる。

逆に、 $F$  が有限 (即ち、有限生成  $\mathbb{Z}$ -加群) 代数ならば、 $F^* \otimes F^* \simeq (F \otimes F)^*$  により、 $F$  の積の dual は  $F^* \rightarrow F^* \otimes F^*$  なる写像と見なされ、これを  $\Delta$  として、 $F^*$  は coalgebra になる。

$G$  を可換 Hopf 代数  $A$  に対応する affine 群スキームとする.  
 $M (= M_A) \in \varepsilon: A \rightarrow \mathbb{Z}$  の核とする.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A/M^n)^*$  は  $A^*$  の  
 subalgebra である.  $A$  を有限生成代数とする. このとき  $A/M^n$   
 はすべて有限代数になるので,  $(A/M^n)^*$  は coalgebra の構造  
 をもつ. (しかも包含写像  $\dots (A/M^n)^* \hookrightarrow (A/M^{n+1})^* \dots$   
 は coalgebra map なので,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A/M^n)^*$  は coalgebra になる. 両  
 方の構造を併せて, それは余可換 Hopf 代数になる. これを  
 $hy_{\mathbb{Z}}(G)$  と書き,  $G$  の hyperalgebra とよぶ.

例として,  $G_a$  と  $G_m$  の hyperalgebra を求めよう.  $G_a$  と  $G_m$   
 はそれぞれ多項式環  $\mathbb{Z}[T]$  及びその局所化  $\mathbb{Z}[U, U^{-1}]$  で表わ  
 され, coalgebra 構造は

$$\Delta(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T, \quad \varepsilon(T) = 0; \quad \Delta(U) = U \otimes U, \quad \varepsilon(U) = 1$$

で与えられる.  $X$  と  $H$  を次で定義する:

$$X = \varepsilon \circ \frac{d}{dT} : \mathbb{Z}[T] \rightarrow \mathbb{Z}, \quad H = \varepsilon \circ \frac{d}{dU} : \mathbb{Z}[U, U^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}.$$

$hy_{\mathbb{Q}}(G_a)$  と  $hy_{\mathbb{Q}}(G_m)$  はそれぞれ多項式環  $\mathbb{Q}[X]$  と  $\mathbb{Q}[H]$  であ

り,  $hy_{\mathbb{Z}}(G_a)$  と  $hy_{\mathbb{Z}}(G_m)$  は次の元で張られる  $\mathbb{Z}$ -subalgebra である:

$$1, T, \frac{T^2}{2!}, \dots, \frac{T^n}{n!}, \dots \quad \text{及 } U$$

$$1, H, \frac{H(H-1)}{2!}, \dots, \frac{H(H-1)\dots(H-n+1)}{n!}, \dots$$

下の行の  $n$  項  $\varepsilon \binom{H}{n}$  とあわせる. この coalgebra 構造は

同形で, 上の標準基底  $\varepsilon \quad b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$  とすれば,

$$\Delta(b_n) = \sum_{i=0}^n b_i \otimes b_{n-i}, \quad \varepsilon(b_n) = \delta_{0n}$$

で与えられる. このような coalgebra は 1 次元の Birkhoff-Witt 型 coalgebra とよばれる.

所で  $\mathbb{Z}$  上の抽象的な hyperalgebra の定義は今の所未定である. 代数的な affine 群スキームの hyperalgebra として得られるものや, Birkhoff-Witt 型の余可換 Hopf 代数は, もちろん hyperalgebra とよんでよい.  $\mathbb{Z}$  上の Hopf 代数のうまい理論を作るためには何もすべての Hopf 代数を考察の対象とする事はなからう. torsion free とか, coalgebra の有限性定理などが必要に応じて仮定するのが得策と思われる.

$B$  を "抽象的な hyperalgebra" とする. 単に余可換 Hopf 代数と思っても差支えない.  $B^*$  は代数であると同時に  $B$ -bimodule である.  $B^*$  の元  $f$  に対し

$B \cdot f$  が有限生成  $\mathbb{Z}$ -加群

$\Leftrightarrow f \cdot B$  が有限生成  $\mathbb{Z}$ -加群

$\Leftrightarrow f \in (B/I)^*$  for some ideal  $I$  of  $B$  such that

$B/I$  is a finite algebra

であり, そのような元の全体  $B^\circ$  は  $B^*$  の subalgebra となる.

同値な条件の三つ目に現れる ideal  $I$  は cofinite とよばれる.

cofinite な  $I$  に対し,  $(B/I)^*$  は coalgebra で, その合併が  $B^\circ$

であるから,  $B^\circ$  自体 coalgebra である. 両方の構造を併せると

それは, 可換な Hopf 代数になる.

この  $B$  が、代数的 affine 群スキーム  $G$  (可換 Hopf 代数  $A$  で表わされる) の hyperalgebra であるとしよう。もし  $\bigcap_n M^n = 0$  ならば、 $A$  は  $B^*$  の部分代数に自然に埋め込まれる事になる。体上と庫って、この場合でも  $A \subset B^0$  とはならないかもしれない。もし  $\bigcap_n M^n = 0$  で、さらに  $B^*$  の中で丁度  $A = B^0$  となる時、 $G$  は reflexive とよぶ事にする。

一般の hyperalgebra  $B$  に戻り、 $B^0$  がたまたま有限生成代数であるとする。対応する代数的 affine 群スキームの hyperalgebra  $H$  は  $B^{0*}$  にふくまれる。けれども体上と庫って、自然な写像  $B \rightarrow B^*$  の像が  $H$  にふくまれる保証はない。たまたまこれが同形  $B \simeq H$  を引き起すとき、hyperalgebra  $B$  は reflexive とよぶ事にする。

定義から直ちに分る通り、reflexive 代数的 affine 群スキームと reflexive hyperalgebra はカテゴリーカルに対応する。

$G_a$  は reflexive である。 $G_m$  もそうであると思われるが今の所分らない。体上ではどちらも reflexive でない。

本題の Chevalley 群スキームに入る。Chevalley 群スキームは、対  $(X, \Phi)$  に対し定まる。ここで  $X$  は有限自由  $\mathbb{Z}$ -加群、 $\Phi$  は  $X_{\mathbb{R}} = X \otimes \mathbb{R}$  内の抽象的ルート系で、 $\Phi \subset X \subset \Lambda (= \Phi$  の weight lattice) を満たすものとする。まずルート系の理論から  $X^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z})$  の中に coroot たち  $\Phi^* = \{\alpha^* \mid \alpha \in \Phi\}$

が定まる. Chevalley 群 スキームを構成するには、まずその hyperalgebra を構成する. それには複素半単純リ-環論を使う.

$\mathcal{L}$  を、一つの Cartan subalgebra  $\mathcal{H}$  に関してルート系  $\Phi$  を持つ複素半単純リ-代数とする.

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathcal{L}_{\alpha} \oplus \mathcal{H}$$

をその root space 分解とする.  $\Phi$  が  $\mathcal{L}$  の  $\mathcal{H}$  に関するルート系だから

$$X_{\mathbb{C}} \simeq \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$$

と自然に同一視され、これは dual の同形

$$X_{\mathbb{C}}^* \simeq \mathcal{H}$$

を引起す. coroot  $\alpha^* \in X^*$  に対応する  $\mathcal{H}$  の元  $H_{\alpha}$  と表わす ( $\alpha \in \Phi$ ).  $\mathcal{L}_{\alpha}$  はすべて 1 次元であるが、その基底  $X_{\alpha}$  のあつまり ( $\alpha \in \Phi$ ) で次の条件を満たすものが存在する:

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}] = \begin{cases} H_{\alpha} & \text{if } \alpha + \beta = 0 \\ 0 & \text{if } \alpha + \beta \neq 0, \notin \Phi \\ \pm(n+1)X_{\alpha+\beta} & \text{if } \alpha + \beta \in \Phi, \beta - n\alpha \in \Phi, \\ & \beta - (n+1)\alpha \notin \Phi \quad (n \geq 0) \end{cases}$$

このような族  $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in \Phi}$  を、一つの Chevalley base とよぶ.

Chevalley base を一固定する.  $\mathcal{L}$  の  $\mathbb{C}$  上の universal enveloping 代数  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$  は  $\mathcal{L}$  を primitive elements として  $\mathbb{C}$  上の hyperalgebra になる. この  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$  は  $\Phi$  だけで決り、 $X$  の方にはよ

ない.  $X$  に依存する  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$  の hyperalgebra lattice  $\mathcal{U}^X$  を次に定義する.

$\mathcal{U}^X$  の定義. 次のすべての元で生成される  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$  の  $\mathbb{Z}$ -subalgebra である.

$$\frac{X_{\alpha}^n}{n!} \quad (\alpha \in \Phi), \quad \binom{H}{n} \quad (H \in X^*), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ここで  $X^*$  は  $\mathfrak{h}$  に含まれるとみなす.

$\mathcal{U}^X$  は次の諸性質をもつ.  $\alpha \in \Phi$  に対し,  $\mathcal{U}^{\alpha} \subseteq \frac{X_{\alpha}^n}{n!}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  の張る  $\mathbb{Z}$ -subalgebra とする. これは  $hy_{\mathbb{Z}}(G_{\alpha})$  と同形である.  $\mathcal{U}^0 \subseteq \binom{H}{n}$ ,  $H \in X^*$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  の生成する  $\mathbb{Z}$ -subalgebra とする.  $X$  の rank は  $l$  とすれば,  $\mathcal{U}^0$  は  $l$  個の  $G_m$  の直積の hyperalgebra と同形になる. ( $\mathcal{U}^0$  は  $X$  に依存する).  $\Phi \cup \{0\}$  に勝手な順序を与え  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$  と並べる. すると product map が同形

$$\mathcal{U}^{\gamma_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{U}^{\gamma_l} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}^X$$

を引起す. 各  $\mathcal{U}^{\gamma}$  ( $\gamma \in \Phi \cup \{0\}$ ) は  $\mathbb{Z}$ -hyperalgebra ゆえ, この同形で左側の tensor 積 coalgebra の構造を右側に transport できる. この coalgebra 構造は,  $\Phi \cup \{0\}$  に与えた順序には依存せず, algebra 構造ととも,  $\mathcal{U}^X$  は  $\mathbb{Z}$  上の hyperalgebra になり, (かつ  $\mathbb{C}$  上の hyperalgebra の同形  $\mathcal{U}^X \otimes \mathbb{C} \cong \mathcal{U}_{\mathbb{C}}$  が成立).  $\mathcal{U}^X$  は Birkhoff-Witt 型の  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$  の hyperalgebra lattice である.

特に weight lattice  $\Lambda$  に対し,  $\mathcal{U}^{\Lambda}$  を単に  $\mathcal{U}$  と記し,  $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$  の Kostant form とよぶ. それは  $\frac{X_{\alpha}^n}{n!}$ ,  $\alpha \in \Phi$ ,  $n \geq 0$  で生成される  $\mathbb{Z}$ -subalgebra である. 任意の  $X$  に対し  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^X$  である.

包含写像は hyperalgebra map である。

後に分るようには  $U^X$  は reflexive hyperalgebra で、対応する reflexive 群スキームが  $(X, \mathbb{Z})$  の Chevalley 群スキームに他ならない。(U は universal 型の Chevalley 群スキームに対応する)。しかし  $\mathbb{Z}$  上だけで議論するのは今の所不可能で、体が補助的に必要になる。体  $k$  に対し、 $U \hookrightarrow U^X$  を  $k$  まで係数拡大すると、全射 の  $k$  上の hyperalgebra map  $U_k \twoheadrightarrow U_k^X$  が得られる。これは大切な事実である。

$\mathcal{L}$  の忠実有限次元複素表現

$$\rho: \mathcal{L} \hookrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M_{\mathbb{C}})$$

でその weights (in  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ ) が  $X$  に全列するものをとる。  $M_{\mathbb{C}}$  は  $U$ -不変な lattice  $M$  を持つ事が知られている。このような  $\rho, M$  をそれぞれ  $X$  に関して admissible な表現, lattice とよぶ。  $M$  は  $U^X$ -不変になる。  $M$  に対応する線形群スキーム  $\mathcal{G}$  を  $GL_M$  と記す。  $M$  の rank を  $n$  とすれば  $GL_M \simeq GL_n$  である。

$hy_{\mathbb{C}}(GL_M)$  は  $\text{End}_{\mathbb{C}}(M_{\mathbb{C}})$  の universal enveloping 代数だから、 $\rho$  は単射の  $\mathbb{C}$ -hyperalgebra map

$$\tilde{\rho}_{\mathbb{C}}: U_{\mathbb{C}} \hookrightarrow hy_{\mathbb{C}}(GL_M)$$

を引起す。  $M$  が  $U^X$ -不変だということは、これが  $U^X \hookrightarrow hy_{\mathbb{Z}}(GL_M)$  に写像するという事で、  $\mathbb{Z}$ -hyperalgebra map

$$\tilde{\rho}: U^X \hookrightarrow hy_{\mathbb{Z}}(GL_M)$$

が引き起される.  $\tilde{\rho}_L$  は  $\tilde{\rho}$  から係数拡大で得られる.

group-like Hopf 代数  $\mathbb{Z}[X]$  に対応する diagonalizable 群スキーム  $\sigma - 4$  を  $D^X$  とする.  $M$  の weights が  $X$  を生成するから,  $M$  は  $\mathbb{Z}[X]$ -comodule の構造をもち、ある表現

$$\sigma: D^X \longrightarrow GL_M$$

が対応する. この  $\sigma$  は  $D^X$  と,  $GL_M$  のある閉部分群スキーム  $\sigma - 4$  の同形を与える. この同形により,  $D^X \subseteq GL_M$  の閉部分群スキーム  $\sigma - 4$  とみなす事にする.

大ざ、 $\sigma$  にいえば,  $(X, \sigma)$  の Chevalley 群スキーム  $\sigma - 4$  ( $G^X$  と書かれる) とは,  $\tilde{\rho}(\mathcal{U}^X) \subseteq \mathbb{Z}$ -hyperalgebra にともなう  $GL_M$  の連結閉部分群スキームである. もちろん  $D^X$  をふくむ事が期待される. (しかし体上と異なり  $\mathbb{Z}$  上では、部分群スキームと部分 hyperalgebra の対応がどうなっているのかよく分らない. そこで  $G^X$  の係数拡大と期待されるもの  $G_{\mathbb{K}}^X$  を体  $\mathbb{K}$  上で決めておいて、その form として  $G^X$  を求める事にする. 体上の hyperalgebra の理論を使うために、次の二つが key になる.

1)  $\tilde{\rho}$  は coalgebra retract をもつ.

2)  $\mathcal{U}$  はその derived subhyperalgebra  $[\mathcal{U}, \mathcal{U}] = 1$  に一致する.

この二つの事実により、 $G_{\mathbb{K}}^X$  が次のように構成できる. まず  $\tilde{\rho}$  の体  $\mathbb{K}$  への係数拡大

$$\tilde{\rho}_{\mathbb{K}}: \mathcal{U}_{\mathbb{K}}^X \longrightarrow h_{\mathbb{K}}(GL_M)$$

は、1)により単射である。次に、 $\mathcal{U}_k \twoheadrightarrow \mathcal{U}_k^X$ の全射と2)により、 $\tilde{\rho}_k$ の像は、その derived subhyperalgebra と一致する。従って、体上の hyperalgebra 理論により、 $GL_{M_k} (= GL_M$  の  $k$  への係数拡大) の連結閉部分群スキームで、 $\tilde{\rho}_k$ の像  $\varepsilon$  hyperalgebra にともものが一意に定まる。これを  $G_k^X$  と定義する。

このように定義された  $G_k^X$  の持つ性質を次に並べる。それらをチェックするのは特に困難な事でない。 $\mathcal{U}_k^X$  が Birkhoff-Witt 型だから  $G_k^X$  は smooth であり、 $(D^X)_k$  と書く。(一般に  $\mathbb{Z}$ -group scheme  $G$  の  $k$  への係数拡大を  $G_k$  と記す)。体の拡大  $K/k$  に対しては  $G_K^X = (G_k^X)_K$  である。 $k$  が閉体のとき、 $G_k^X$  はいわゆる線形代数群とみてよいが、これは半単純で、 $(D^X)_k$  を極大 torus にもち、それに関するルート系はちょうど  $\varepsilon$  に一致する。

$G_k^X$  が表現  $\rho$  や lattice  $M$  に依存しない事はむしろいい。ここではそれを問題にしない。代数群としての hyperalgebra としての体上の理論はかなり整備されているので、好みに応じ、色々なアプローチが考えられる。

ここでは  $\mathbb{Z}$  上を問題にする。まず  $G_{\mathbb{Q}}^X$  の form  $G^X$  を作る。そして任意の  $k$  に対し  $G_k^X = (G^X)_k$  といえるか、 $G^X$  が  $\rho$  や  $M$  に依存しないかを考える。

一般に  $\mathbb{Z}$  上の Hopf 代数  $A$  と、 $A_{\mathbb{Q}}$  の Hopf ideal  $I$  に対し、

$A \cap I$  (厳密には  $A \rightarrow A_\oplus$  による  $I$  の逆像) は  $A$  の Hopf ideal になる. 証明は易しい. そこで  $A$  は  $GL_M$  に対応するとし,  $I$  は  $G_\oplus^X$  に対応する Hopf ideal にとる.  $A \cap I$  に対応する  $GL_M$  の閉部分群スキームとして  $G^X$  を定義する.

$G^X$  に対し, 次の諸性質が, さしたる困難もなく検証できる.  $G^X$  は  $D^X$  を含む,  $GL_M$  の閉部分群スキームで連結 flat である.  $(G^X)_\oplus$  は  $G_\oplus^X$  に一致し,  $hy_{\mathbb{Z}}(G^X) = \text{Im}(\tilde{\rho})$  従って  $\mathcal{U}^X$  と同形である. 各  $\alpha \in \Phi$  に対し,  $\mathbb{Z}$ -群スキーム写像

$$\alpha_\alpha: G_\alpha \longrightarrow G^X$$

でその引き起す hyperalgebra 子像が

$$hy_{\mathbb{Z}}(G_\alpha) = \mathcal{U}^X \hookrightarrow \mathcal{U}^X = hy_{\mathbb{Z}}(G^X)$$

と同一視されるものが一意に存在する.

こゝまでは易しい. 先に進むためには Chevalley の idea に従い, それを Hopf 代数の立場で整理する. まずは前に述べた向が肯定的に解け, 副産物として Chevalley 群スキームの reflexivity が出てくる.

包含子像  $D^X \hookrightarrow G^X$  と  $\alpha_\alpha: G_\alpha \longrightarrow G^X$  ( $\alpha \in \Phi$ ) すべてから得られる product map を考える. そのために,  $\Phi$  の base  $\Sigma$  とし, それに属する正負のルートたち  $\Phi^\pm$  に勝手な順序を入れで並べる.

$$\pi: \left( \prod_{\Phi^-} G_\alpha \right) \times D^X \times \left( \prod_{\Phi^+} G_\alpha \right) \longrightarrow G^X$$

を  $\pi$  として得られる scheme map とする.  $\pi$  の定義域は, group 代数  $\mathbb{Z}[X]$  と 多項式代数  $\mathbb{Z}[T_\alpha; \alpha \in \Phi]$  のテンカー積

$$A = \mathbb{Z}[X] \otimes \mathbb{Z}[T_\alpha; \alpha \in \Phi]$$

に対応する  $\pi$  は scheme である.  $G^X$  をある可換 Hopf 代数  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^X)$  であるとする.  $\pi$  は単位元における tangent coalgebra (hyperalgebra と同様に定義される) の同型を引起し,  $A \in \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^X)$  はその dual にふくまれるから,  $\pi$  は単射 algebra map

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^X) \hookrightarrow A$$

に対応する  $\pi$  とが分る. このふくまれ方がどうなるか,  $A$  は  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^X)$  からどのように得られるか, Chevalley が次のように答えている:

Chevalley の定理  $d = \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha \in X$  とおく.

a)  $d$  は  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^X)$  に属する.  $A = \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^X)[d^+]$  である.

$G_d^X$  を  $G^X$  の  $d$  に関する principal open subscheme とすれば, ii

いかんとして,

b)  $\pi$  は同型

$$\left(\prod_{\alpha \in \Phi} G_\alpha\right) \times D^X \times \left(\prod_{\alpha \in \Phi^+} G_\alpha\right) \simeq G_d^X$$

を引起す.

c) 勝手な閉体  $K$  に対し,  $G_d^X(K)$  は  $G^X(K)$  で (Zariski 位相) に関し open dense である.

この定理から次の事実が次々に従う:

1)  $G_k^X = (G^X)_k$  が任意の体  $k$  に対し正しい. なぜならこのより  $(G^X)_k$  は連結となるから.

2)  $\mathbb{Z}$ -加群としての商  $A/\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^X)$  は torsion-free である. これもこのから容易に従う.

3)  $G^X$  は  $\rho$  や  $M$  に, 次のリミで依存しない.  $G^X$  が  $M$  から来る事とは, きりさせるために  $G_M^X$  とかく事にする. 別の admissible な表現  $\rho'$  とその表現空間の admissible lattice  $M'$  があつたとする. 明らかな表現  $\rho \oplus \rho'$  も admissible で  $M \oplus M' = M''$  は表現空間の admissible lattice である. 対応して Chevalley 群スキーム  $G_M^X, G_{M'}^X, G_{M''}^X$  が考えられる. 明らかな包含関係

$$G_{M''}^X \subset GL_M \times GL_{M'} \subset GL_{M''}$$

が成立し, 射影すれば

$$G_M^X \xleftarrow{pr_1} G_{M''}^X \xrightarrow{pr_2} G_{M'}^X$$

となる. この  $pr_1$  又は  $pr_2$  に対応する algebra map  $E \rightarrow F$  とすれば

$$E_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} F_{\mathbb{Q}} \quad \text{かつ} \quad E[d^*] \xrightarrow{\sim} F[d^*]$$

である事が比較的簡単に分る. これと2)から,  $E \rightarrow F$  は同型でなくてはならない事がある. 従って射影により

$$G_M^X \xleftarrow{\sim} G_{M''}^X \xrightarrow{\sim} G_{M'}^X$$

である. このリミで  $G^X$  は  $\rho$  や  $M$  の變び方に依存しない.

$G^X$  が  $\rho$  や  $M$  に依存しないと言っても、この段階で  $G^X$  の定義に  $\rho$  や  $M$  を用いているのは、応用上は便利だろうが、理論上は気持ちが悪い。すでに  $hy_{\mathbb{Z}}(G^X) = \mathcal{U}^X$  は Chevalley base から直ちに定義されているから、 $G^X$  を  $\mathcal{U}^X$  から direct に定義した方がきれいに思われる。次の 4), 5) に見るように、それは 3) の結果として得られる。

4) すべての有限  $\mathbb{Z}$ -自由  $\mathcal{U}^X$ -加群は、必ずある  $G^X$  の有理表現から来る。(証明) 今までのように  $G^X$  は  $(\rho, M)$  から来ておりとする。  $N$  を有限  $\mathbb{Z}$ -自由  $\mathcal{U}^X$ -加群とすれば  $M_{\mathbb{Z}} \oplus N_{\mathbb{Z}}$  は admissible  $L$ -加群で、  $M \oplus N$  を admissible lattice に持つ。この  $M \oplus N$  から作られた  $G_{M \oplus N}^X$  が元の  $G^X$  と同形で、  $G_{M \oplus N}^X$  は  $N$  を不変にするから、自然な  $G^X$  の  $N$  上の有理表現が得られ、これが元の  $\mathcal{U}^X$  の作用を引起す。

この 4) は、実質的に次と同値である。

5)  $G^X$  は reflexive である。

(証明)  $B = \mathcal{U}^X$  とすれば、  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^X) \subset B^{\circ}$  がいえる。4) はすべての有限  $\mathbb{Z}$ -自由  $B^{\circ}$ -comodule が必ず  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^X)$ -comodule である事を意味する。  $B^{\circ}$  は有限  $\mathbb{Z}$ -自由 subcoalgebra の合併であるから  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^X) = B^{\circ}$  であることはならない。

こうして、Chevalley method の結果として、はじめに作った

$U^X$  が reflexive hyperalgebra であって、対応する reflexive 群スキームが、Chevalley 群スキーム  $G^X$  に他ならない事が分かった。

あとがき. 有名な Kostant の "Groups over  $\mathbb{Z}$ " は本講演と実質的に殆ど同じ事を言っているように見える。しかしそこで言う根拠が明確に示されていないように思われる。少くとも私には長い事、なぜあのように少いページ数で Chevalley 群スキームの reflexivity (と実質的に同じと思われる事) が証明できるのか合点が行かなかった。Springer L.N. 131 にある Borel による Chevalley 群スキームの Survey には、上に述べた Chevalley の定理が述べられている。しかしこの Survey 自体はごちゃごちゃして分りにくい。Chevalley 群スキームの定義と構成の部分の端点を、 $\mathbb{Z}$  上の hyperalgebra をしっかり念頭において整理すれば、本講演のようになるところ。