数理解析研究所講究録
473巻 1982年 12-24

Relative Hopf module について

福井大学教育　土井幸雄 (Yukio Doi)

Gを群，Bを体k上のalgebraでGがB上にk-alg. autom. として作用しているとする。加群Mが(左)G加群かつ(右)B加群であり，

$$g\cdot(m\cdot b) = (g\cdot m)\cdot(g\cdot b) \quad , \quad {}^{\forall}m\in M,\ g\in G,\ b\in B$$

をみたすとき，MはB-G加群と呼ばれる。特にGがk上のアフィン代数群で，Bがアフィン環かつMがG-有理的のときの考察は，代数群の表現やquotientの問題との関連において重要である（Voigt [10], Oberst [6], Magid [5], Doraiswamy [4], Takeuchi [9]）。

我々の目的はHopf代数の言葉を用いて，このB-G加群の概念を捉えなおし，その基礎理論を構築することである。これにともないHopf代数における重要な概念である“Integral”が一般化される状況が出現する。上にあげた先行する文献の結果は一切仮定しない。記号用語はSweedler [8]を用いる。

§1. relative Hopf module

Doi [2] に従って、(relative) Hopf module の定義をしよう。以後、A は体 k 上の Hopf 代数とする。commutative, cocommutative は仮定しない。k-algebra B がさらに right A-comodule であり、構造射 $\rho_B : B \longrightarrow B\otimes A$ が algebra map になるとき、$B = (B, \rho_B)$ は right A-comodule algebra であるという。$\Delta_A : A \longrightarrow A\otimes A$ によって A 自身 right A-comodule algebra とみれる。また $k \xrightarrow{u_A} A \simeq k\otimes A$ によって基礎体 k も right A-comodule algebra となる。

(Def) M が right (A, B)-Hopf module であるとは、M が right A-comodule (その構造射を $\rho_M : M \longrightarrow M\otimes A$) かつ M が right B-module (その構造射を $\omega_M : M\otimes B \longrightarrow M$) で、次の図式が可換：

$$\begin{array}{ccccc}
M\otimes B & \xrightarrow{\omega_M} & M & \xrightarrow{\rho_M} & M\otimes A \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \rho_M\otimes\rho_B} & & & & \Big\uparrow{\scriptstyle \omega_M\otimes m_A} \\
M\otimes A\otimes B\otimes A & & \xrightarrow{1\otimes T\otimes 1} & & M\otimes B\otimes A\otimes A
\end{array}$$

(注) 上のテンサー積 $\otimes$ はすべて $\otimes_k$ のいみ。T は twist map, m_A は A の multiplication を表す。sigma notation を用いて、$\rho_M(m) = \sum m_{(0)}\otimes m_{(1)}$, $\rho_B(b) = \sum b_{(0)}\otimes b_{(1)}$ と表せば、

上の図式の可換性の条件は，

$$\rho_M(mb)=\sum m_{(0)}b_{(0)}\otimes m_{(1)}b_{(1)}\ ,\quad {}^\forall m\in M\ ,\ {}^\forall b\in B$$

と表せる。

right (A,B)-Hopf module を対象とする圏を $\mathbb{M}_B^A$ と書くことにする。(射は A-comodule map かつ B-module map であるものとする。) アーベル圏になる。

(Remarks)

(1) k-アフィン集合 X に右から k-アフィン代数群 G が作用しているとき．その comorphism $\mathcal{O}(X)\longrightarrow\mathcal{O}(X)\otimes\mathcal{O}(G)$ により $\mathcal{O}(X)$ は right $\mathcal{O}(G)$-comodule algebra となり．序の意味の有理的 $\mathcal{O}(X)$-$\mathcal{O}(G)$ module と right $(\mathcal{O}(G),\mathcal{O}(X))$-Hopf module の概念は一致する。

(2) $B\in\mathbb{M}_B^A$.

(3) "right (A,k)-Hopf module" = "right A-comodule"

(4) right (A,A)-Hopf module = "Sweedler の意味の A-Hopf module [8], p83"

(5) right A-comodule algebra B に対し．その"不変元"の作る部分環 B_0 を次のように定義する：

$$B_0=\{\,b\in B\mid \rho_B(b)=b\otimes 1\,\}.$$

同様に $M\in\mathbb{M}_B^A$ に対して，

$$M_0 = \{ m \in M \mid \rho_M(m) = m \otimes 1 \} = \mathbb{M}_B^A(B, M)$$

と定義すると、M_0 は M の B_0-submodule になる。すなわち、$M \longmapsto M_0$ は圏 $\mathbb{M}_B^A$ から right B_0-module の圏 $\mathbb{M}_{B_0}$ への函手となる。この函手を $R: \mathbb{M}_B^A \longrightarrow \mathbb{M}_{B_0}$ と書こう。また、$L: \mathbb{M}_{B_0} \longrightarrow \mathbb{M}_B^A$ を $L(V) = V \otimes_{B_0} B$ とすることにより、R と L は互いに adjoint になることが容易に確められる。すなわち、$\mathbb{M}_B^A(L(V), M) \simeq \mathbb{M}_{B_0}(V, R(M))$。

adjunction Ψ_M, Φ_V は次のとおり：

$$\Psi_M : LR(M) = M_0 \otimes_{B_0} B \longrightarrow M, \quad m \otimes_{B_0} b \longmapsto mb$$

$$\Phi_V : V \longrightarrow RL(V) = (V \otimes_{B_0} B)_0, \quad v \longmapsto v \otimes_{B_0} 1 .$$

ただし、$L(V) = V \otimes_{B_0} B$ の A-comodule 構造は $v \otimes_{B_0} b \longmapsto \sum v \otimes_{B_0} b_{(0)} \otimes b_{(1)}$, B-module 構造は $(v \otimes_{B_0} b) b' = v \otimes_{B_0} bb'$ とする。

(6) $B \otimes A \in \mathbb{M}_B^A$ via $\begin{cases} b \otimes a \longmapsto \sum b \otimes a_{(1)} \otimes a_{(2)} \\ (b \otimes a) b' = (b \otimes a) \rho(b') = \sum b b'_{(0)} \otimes a b'_{(1)} \end{cases}$

adjunction $\Psi_{B \otimes A} : (B \otimes A)_0 \otimes_{B_0} B \longrightarrow B \otimes A$ を具体的に調べよう。$(B \otimes A)_0$ と B は同型だから、$(B \otimes A)_0 \otimes_{B_0} B$ と $B \otimes_{B_0} B$ を同一視すれば、$\Psi_{B \otimes A}$ は次の β と一致する：

$$\beta : B \otimes_{B_0} B \longrightarrow B \otimes A, \quad b \otimes_{B_0} b' \longmapsto \sum b b'_{(0)} \otimes b'_{(1)}$$

この map β は Hopf Galois 理論や代数群の quotient 問題を考察する時に登場する重要な写像である。B が可換のとき、β は algebra map になる。

§2. injective comodule

一般に coalgebra C 上の comodule V が injective であるとは、任意の単射な C-comodule map $V_1 \xrightarrow{f} V_2$ および任意の C-comodule map $V_1 \xrightarrow{g} V$ に対して、V_2 から V への C-comodule map φ で $\varphi\circ f = g$ をみたすものが存在することである。(すなわち、C-comodule の圏における injective 対象!)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & V_2 \arrow[dl, dashed, "\exists\varphi"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

これは射影加群の双対概念で、comodule の中で基本的役割を持つ。(この辺の事情については例えば Doi [1] を参照)

Hopf 代数 A に対して、Sweedler は [8], LEMMA.14.0.2 で、"任意の A-comodule が injective $\Longleftrightarrow$ A が cosemisimple $\Longleftrightarrow$ left integral $x: A \longrightarrow k$ で $x(1)=1$ をみたすものが存在する" を示したが、次の定理はこの結果を一般化したものである。

<u>定理 1.</u> A を体 k 上の Hopf 代数, B を right A-comodule algebra とするとき、次の (1)〜(4) は同値である:

(1) 任意の $M \in \mathbb{M}_B^A$ は A-comodule として injective

(2) B は injective A-comodule

(3) right A-comodule map $\phi: A \longrightarrow B$ で $\phi(1_A) = 1_B$ なるものがある

(4) right A-comodule map $\phi: A \longrightarrow B$ で $\phi(1_A) \in U(B)$ なるものがある

(注意) right A-comodule map $\phi : A \to B$ とは、

$\rho_B \phi = (\phi \otimes 1)\Delta_A$ i.e. $\sum \phi(a)_{(0)} \otimes \phi(a)_{(1)} = \sum \phi(a_{(1)}) \otimes a_{(2)}$.

条件(4)の $U(B)$ は Bの単元全体の集合を表す

(定理1の略証) $B \in \mathcal{M}_B^A$ より (1) ⇒ (2) は明らか。(2)⇒(3) は、図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & k \arrow[r, "u_A"] \arrow[d, "u_B"] & A \arrow[dl, dotted] \\ & B & \end{tikzcd}$$

を考えればよい。(4) ⇒ (3) は、

$A \ni a \longmapsto \phi(1)^{-1}\phi(a) \in B$ ととりなおせばよい。よって、あと (3) ⇒ (1) が示せれば、定理の証明は終る。

$M \otimes A$ を $m \otimes a \longmapsto \sum m \otimes a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ により right A-comodule とみると、$M \otimes A$ は injective になることはよく知られている。Mの comodule structure map $\rho_M : M \longrightarrow M \otimes A$ は A-comodule map になる。$\lambda : M \otimes A \longrightarrow M$ を

$$\lambda(m \otimes a) = \sum m_{(0)}\phi(S(m_{(1)})a)$$

で定義すると、λは A-comodule map かつ $\lambda\rho_M = 1$ となる。よって、Mは $M \otimes A$ の直和因子だから、Mも injective。■

この定理の応用として、Doi [2], Th.2 では、surjective Hopf algebra map $A' \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$ の coflat 性と faithfully coflat 性が一致することが示されている。また Doi [3], §2 では、right A-comodule map $\phi : A \longrightarrow B$ (これを generalized integral と呼んでもいいだろう）の存在が、一種の平均作用素の議論を自然に引き起すことが解説されている。

（双対化）　いままでの議論はすべて双対化される。A を Hopf 代数とし、C を right A-module coalgebra（すなわち、C は coalgebra かつ right A-module で $\Delta(c\cdot a)=\sum c_{(1)}a_{(1)}\otimes c_{(2)}a_{(2)}$，$\varepsilon(c\cdot a)=\varepsilon(c)\varepsilon(a)$）とする。$N$ が right $[C,A]$-Hopf module であるとは、N が right C-comodule かつ right A-module で、$\rho_N(n\cdot a)=\sum n_{(0)}a_{(1)}\otimes n_{(1)}a_{(2)}$，$({}^{\forall}n\in N, {}^{\forall}a\in A)$ をみたすもののことである。定理 1 の双対化として次の事実がなりたつ：

<u>定理 1′</u>　次の (1)〜(4) は同値である：

(1) 任意の right $[C,A]$-Hopf module は A-module として projective.

(2) C は projective A-module.

(3) right A-module map $\psi: C\longrightarrow A$ で $\varepsilon_A\psi=\varepsilon_C$ なるものがある

(4) right A-module map $\psi: C\longrightarrow A$ で $\varepsilon_A\psi\in U(C^*)$ なるものがある

（注意）ε_A, ε_C はそれぞれ A, C の augmentation map を表す。(4) の $U(C^*)$ は C の dual algebra C^* の単元全体の集合を表す。$C=k$ のとき、(3) の ψ に対し $\psi(1)=x\ (\in A)$ とすれば、$xa=\varepsilon(a)x$，${}^{\forall}a\in A$ かつ $\varepsilon(x)=1$ となり、Sweedler

[8], THEOREM 5.1.8. が導びかれる。

§3. Cleft comodule algebra

有名な Hopf module の構造定理というのは、$\mathbb{M}_A^A \ni {}^\forall M$ に対して、$M_0 \otimes A \simeq M$ が成立することといえる。([8], THEOREM 4.1.1) 一般の A-comodule algebra B および $\mathbb{M}_B^A \ni M$ に対して、§1 の Remark (5) の中の射 Φ_M,

$$\Phi_M : M_0 \otimes_{B_0} B \longrightarrow M, \quad m \otimes_{B_0} b \longmapsto mb$$

はかならずしも同型射にならない。どんな条件の下で Φ_M が同型射になるか? [2], Theorem 3 で、A から B への algebra map ϕ でさらに right A-comodule map になるものが存在すれば十分であることを示した。この節ではこの条件をさらに弱められることを示す。

A から B への k-linear map 全体の k-space $\mathrm{Hom}_k(A,B)$ は、convolution 積 $f*g = m_B(f\otimes g)\Delta_A$ によって k-algebra とみる。単位元は $u_B\varepsilon_A$ である。この algebra の単元全体の集合 $U(\mathrm{Hom}_k(A,B))$ を、[7] に従って $\mathrm{Reg}(A,B)$ と書くことにしよう。$\mathrm{Reg}(A,B) \ni \phi$ に対し、ϕ の積 $*$ に関する逆元を ϕ^{-1} で表す: $m_B(\phi\otimes\phi^{-1})\Delta = u_B\varepsilon_A = m_B(\phi^{-1}\otimes\phi)\Delta$.

(Def) right A-comodule algebra B は．right A-comodule map $\phi : A \longrightarrow B$ で $\phi \in Reg(A,B)$ なるものが存在するとき．cleft であるという。

(Remark) (1) B が cleft ならば．§1，定理1の条件(4)をみたすことは明らかである。A が irreducible ならこの逆も成立する（[8]，LEMMA 9.2.3 参照）

(2) 一般の Hopf 代数 A に対し．$id_A \in Reg(A,A)$ （$(id_A)^{-1} =$ "A の antipode"）だから．A 自身 right A-comodule algebra とみて cleft である。

<u>補題</u>. $\phi : A \longrightarrow B$ を right A-comodule map かつ $\phi \in Reg(A,B)$ なるものとすると．$\phi^{-1} : A \longrightarrow B$ は次の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi^{-1}"] \arrow[d, "\Delta"] & B \arrow[r, "\rho_B"] & B\otimes A \\ A\otimes A \arrow[rr, "T"] & & A\otimes A \arrow[u, "\phi^{-1}\otimes S"'] \end{tikzcd}$$

すなわち．$\rho_B \phi^{-1} = (\phi^{-1}\otimes S)T\Delta$.

（ここで $S : A \longrightarrow A$ は A の antipode を表す）

<u>定理2</u>. right A-comodule algebra B が cleft ならば．

$$\Phi_M : M_0 \otimes_{B_0} B \xrightarrow{\ \sim\ } M \qquad (\forall M \in \mathcal{M}_B^A)$$

(略証) 補題の等式は convolution algebra $\mathrm{Hom}_k(A, B\otimes A)$ の中で、$\rho_B\phi = (\phi\otimes 1)\Delta$ と $(\phi^{-1}\otimes S)T\Delta$ が互いに逆の関係にあること示すことで求まる。Φ_M の逆写像は

$$M \longrightarrow M_0\otimes_{B_0} B\ ,\quad m \longmapsto \sum m_{(0)}\phi^{-1}(m_{(1)})\otimes_{B_0}\phi(m_{(2)})$$

で与えられることを、上の補題を用いて直接計算すればよい。これらの議論は、Sweedler [7], §8 の内容に負う所が多い。■

系1. B が cleft なら、$\beta : B\otimes_{B_0} B \longrightarrow B\otimes A$, $\beta(b\otimes_{B_0} c) = \sum bc_{(0)}\otimes c_{(1)}$ は lin. isom. である。(B が commutative なら β は alg. isom)

系2. B が cleft なら $\mathcal{M}_B^A \ni {}^\forall M$ は A-comodule として "free" になる。すなわち、

$$\begin{array}{ccc} M_0\otimes A & \xrightarrow{\sim} & M \quad (\text{as an A-comodule}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ m\otimes a & \longmapsto & m\phi(a) \\ \sum m_{(0)}\phi^{-1}(m_{(1)})\otimes m_{(2)} & \longleftarrow & m \end{array}$$

系3. B が cleft かつ B_0 上 left faithfully flat なら、圏 $\mathcal{M}_B^A$ と圏 $\mathcal{M}_{B_0}$ は同値である

定理2' (双対化). C が right A-module coalgebra で、$\mathrm{Reg}(C,A)\cap \mathrm{Hom}_A(C,A) \neq \phi$(空) ならば、任意の right $[C,A]$-Hopf module N に対し

$$N \simeq N/NA^+ \,\square_{C/CA^+}\, C \quad (\text{as a } [C,A]\text{-Hopf module})$$

§4. Smash product

B を right A-comodule algebra とする。vector space $\mathrm{Hom}_k(A,B)$ は次のような積に関して associative algebra になる： $f, g : A \longrightarrow B$ に対し，$f \# g : A \longrightarrow B$ を

$$(f\#g)(a) = \sum f(g(a_{(2)})_{(1)} a_{(1)})\, g(a_{(2)})_{(0)}, \quad {}^\forall a \in A$$

と定義する，単位元は $u_B \varepsilon_A$.

このalgebraを我々はBのAによるsmash productと呼び、$\#(A,B)$ で表すことにする。

（注意）(1) B上のA-comodule構造が自明のとき（すなわち $\rho_B(b) = b \otimes 1$, ${}^\forall b \in B$），$\#(A,B)$ は普通のconvolution積に関するalgebra $\mathrm{Hom}_k(A,B)$ と一致する。

(2) A が k 上有限次元のとき，can. isom. $\mathrm{Hom}_k(A,B) \simeq B \otimes A^*$ は alg. isom. $\#(A,B) \simeq B\#A^*$ を引き起す。ただし、$B\#A^*$ は B を left A^*-module algebra とみたときの smash product（従来の意味）を表すとする。

以下、$\#(A,B)$ に関する基本的性質を列挙しよう。

(1) B および dual algebra A^* は、$b \longmapsto (a \mapsto \varepsilon(a)b)$, $a^* \longmapsto (a \longmapsto a^*(a)1_B)$ によって $\#(A,B)$ の subalgebra とみれる。

(2) $a \in A$, $f \in \#(A,B)$ に対し、$a \rightharpoonup f \in \#(A,B)$ を、

$$(a \rightharpoonup f)(d) = f(da), \quad \forall d \in A$$

で定義することにより、$\#(A,B)$ は left A-module algebra となり、その A 不変元全体は B と一致する。すなわち、

$$\{ f \in \#(A,B) \mid a \rightharpoonup f = \varepsilon(a) f, \ \forall a \in A \} = B$$

(3) $\#(A,B) \ni f$, $B \ni b$ に対し、$f \rightharpoonup b \in B$ を、

$$f \rightharpoonup b = \sum f(b_{(1)}) b_{(0)}$$

で定義することにより、B は left $\#(A,B)$-module となる。従って次の algebra map π が引き起される:

$$\pi : \#(A,B) \longrightarrow \mathrm{End}^r_{B_0}(B) = \text{“}B\text{から}B\text{への right } B_0\text{-mod. map”}$$
$$\quad\ f \longmapsto (b \mapsto \textstyle\sum f(b_{(1)}) b_{(0)})$$

(4) $B \supset I$ が left $\#(A,B)$-submodule

$\iff I$ は left ideal of B かつ $\rho_B(I) \subset I \otimes A$.

(5) $B \otimes_{B_0} B$ から $B \otimes A$ への写像 $b \otimes_{B_0} c \longmapsto \sum b_{(0)} c \otimes b_{(1)}$ を β' で表すと、β' は right B-module map (ただし、$B \otimes A$ は $(b \otimes a) b' = bb' \otimes a$ により right B-module とみる) になり、次の図式を可換にする:

(Yokogawa [11] 参照)

$$\begin{tikzcd}
\#(A,B) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{End}^r_{B_0}(B) \\
\mathrm{Hom}^r_B(B \otimes A, B) \arrow[r, "\beta'^*"] & \mathrm{Hom}_B(B \otimes_{B_0} B, B) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

(6) B が cleft かつ A の antipode S が $S^2=1$ のとき.

$$
\begin{tikzcd}
B\otimes_{B_0}B \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\beta"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B\otimes A \\
B\otimes A \arrow[r, "1\otimes S"] & B\otimes A \arrow[u, "\theta"', "\wr"]
\end{tikzcd}
$$

ただし.

$\theta(b\otimes a)=\sum b_{(0)}\otimes b_{(1)}a$

$\theta^{-1}(b\otimes a)=\sum b_{(0)}\otimes S(b_{(1)})a$

となり. β' も isom. となる。よって (5) より π も isom である。

参考文献

[1] Y. Doi: Homological coalgebra, J. Math. Soc. Japan 33 (1981), 35-50.

[2] Y. Doi: On the structure of relative Hopf modules, Comm. in Algebra, (to appear)

[3] Y. Doi: Cleft comodule algebras and Hopf modules, (to appear)

[4] I. Doraiswamy: Projectivity of modules over rings with suitable group action, Comm. in Alg. 10 (1982), 787-795.

[5] A. R. Magid: Picard groups of rings of invariants, J.Pure Appl. Algebra 17 (1980), 305-311.

[6] U. Oberst: Affine Quotientenschemata nach affinen, algebraischen Gruppen und induzierte Darstellungen, J. Algebra 44 (1977), 503-538.

[7] M. E. Sweedler: Cohomology of algebras over Hopf algebras, Trans. A. M. S. 133 (1968), 205-239.

[8] M. E. Sweedler: Hopf algebras, Benjamin, New York, 1969.

[9] M. Takeuchi: Relative Hopf modules— Equivalences and freeness criteria, J. Algebra 60 (1979), 452-471.

[10] D. Voigt: Endliche Hopfalgebren, Math. Z. 134(1973), 189-203.

[11] K. Yokogawa: Non-commutative Hopf Galois extensions, Osaka J. Math. 18 (1981), 63-73.