数理解析研究所講究録
474巻 1982年 88-97

On the discriminant and the bifurcation set

国際基督教大 寺尾宏明

$F: U \to V$ を正則写像、U, V は各々 $\mathbb{C}^m$ 内の open domains とする。$C \subset U$ を F の critical set, $D \subset V$ を F の critical values の集合 (= discriminant) とよぶ。ここでは、斎藤恭司によって定義された logarithmic vector fields と、discriminant 及び bifurcation set (§3で定義する) との間の、いくつかの新しい結果を手短かに述べる。

§1. Finite map の discriminant

F が有限正則 (従って、$m = n$) のときは、C も D も各々 U, V 内で超曲面 ~~(a germ)~~ になる。今、V 上の vector field に対して "liftable by F" という概念を定義する。

定義1. θ を正則ベクトル場 (on V) とするとき、θ が liftable by F とは、U 上の正則ベクトル場 ψ があって、

$$(F_*)_p \psi(p) = \theta(F(p))$$

がすべての $p \in U$ に対して成立することをいう。もし θ が liftable by F ならば、このような ψ は unique に定

まることがすぐにわかるから

$$\psi = F^{-1}\theta$$

と書いてもよい。Fが正則有限写像の芽であるときも、勿論 'liftable by F' という概念は定義できる。

$$f : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$$
$$\quad\ \ X \qquad\qquad\quad Y$$

を有限正則写像の芽とせよ。C, D を各々 critical set, discriminant (の germs) とする。このとき

定理1 i) $Der_Y(\log D)_0 = \{$germs of holomorphic vector fields on Y liftable by $f\}$,

ii) $Der_Y(\log D)_0$ が $\mathcal{O}_{Y,0}$-free module なら

$$Der_X(\log f^{-1}(D)) \simeq f^{-1}Der_Y(\log D)_0 \underset{f^{-1}\mathcal{O}_{Y,0}}{\otimes} \mathcal{O}_{X,0}$$

特に、$Der_X(\log f^{-1}(D))$ は free $\mathcal{O}_{X,0}$-module.

iii) f が

$$\mathcal{O}_{X,0} \supset (\mathcal{O}_{X,0})^G = \mathcal{O}_{Y,0}$$ (Gは有限群、

$(\mathcal{O}_{X,0})^G$ は G-不変 subring) という状況から来ているときは

$$(Der_{X,0})^G = f^{-1}Der_Y(\log D)_0.$$

その上、$Der_Y(\log D)_0$ は free $\mathcal{O}_{Y,0}$-module.

Remark. 1) については V. I. Arnol'd [1] が,

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n/G \underset{\mathbb{C}^n}{\rotatebox{90}{$\cong$}} \qquad (G: \text{Coxeter 群})$$

の場合に証明している。 iii) によって, G が finite unitary reflection group のとき, ($G \circlearrowright \mathbb{C}^n$) G による鏡映面の集合がいわゆる 'free arrangement' になることがわかる。このあたりのことについては, Cartier [3], Orlik-Solomon [6], Terao [8] [9] などで扱われ, 面白いところだが, 割愛する.
定理1 の証明については [10] を見られたい.

§2. Discriminant of a free deformation

定義2. $(D, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ なる超曲面の芽が free であるとは, $Der_{\mathbb{C}^n}(\log D)_0$ が free $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ - module であることをいう. ($(D, 0)$ は $(\mathbb{C}^n, 0)$ の free divisor であるという)

free divisor というのは, かなり特殊な class であるが, 例えば, $(D, 0)$ が超平面の和集合の芽であるときには, 興味ある class を構成することが知られている。何故か, Coxeter 群とか universal deformation とかと関係のある divisor は, 大体 free になっているというのは, とても不思議なことだが,

その理由はよくわからない。complement の $K(\pi,1)$ 性とかなり類似した性質をもつことは知られている [8]。以下、free deformation というもの（矢野環 [12] によって定義されたもので、semiuniversal deformation の一般化）について、その discriminant が free になっているという結果をきちんと state する。

定義 3. $f:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$：正則で、$f^{-1}(0)$ が原点で isolated singularity をもつとする。このとき、

$$F_1(x_1,\cdots,x_n,t_2,\cdots,t_m)\quad (F(x_1,\cdots,x_n,0,\cdots,0)=f)$$

なる正則函数の芽を考えて、

$$\varphi:\ X=(\mathbb{C}^{n+m-1},0)\longrightarrow(\mathbb{C}^m,0)=S$$

を、$\varphi^*t_1=F_1$, $\varphi^*t_i=t_i$ $(i>1)$ として $f^{-1}(0)$ の変形を定義する。このとき、C は、

$$\mathcal{O}_C=\mathbb{C}\{x_1,\cdots,x_n,t_2,\cdots,t_m\}/(\partial F_1/\partial x_1,\cdots,\partial F_1/\partial x_n)$$

の support である。$\varphi_*\mathcal{O}_C$ は、$\mathcal{O}_C$ を、（φ を通して）$\mathcal{O}_S$-module とみなしたものとする。

$\mathcal{M}:=\varphi_*\mathcal{O}_C$ の $\mathcal{O}_S$-submodule で、$\partial F_1/\partial t_1,\cdots,\partial F_1/\partial t_m$ で $\mathcal{O}_S$ 上 generate されるもの

と定義する。φ が semiuniversal なら、$\mathcal{M}=\varphi_*\mathcal{O}_C$ である。さて、矢野による free deformation の定義とは、次の通

り。

φ が free deformation であるとは、M が $\mathbb{C}\{t_2, \ldots, t_m\}$-module として free であって、その free base として、$\partial F_1/\partial t_1, \cdots, \partial F_1/\partial t_m$ がとれることをいう。

semiuniversal deformation は free deformation であるが、それ以外にも重要な free deformation の例が矢野[1]にある。

定理2. 上の記法で、φ が free deformation とせよ。しかも、次の条件を仮定する。

(GTQ) critical set (of φ) の generic point では、そこに沿って、quasi-homogeneous singularity の trivial family が並んでいる。

(注: この条件は、semi-universal deformation、或は rational double point のいかなる deformation についても成立している条件である)

このとき、φ の discriminant は free divisor になる。

Remark 1. φ が semiuniversal なときは、齋藤[7]に述べられている。

Remark 2. 定理2の条件と、しかるべき reasonable な条件のもとで、φの discriminant の'ふたつの exponents' についての"duality"が成立する。それは、Orlik-Solomon [6] によって発見された 'unitary reflection group の exponents duality' の intrinsic meaning をよく説明する。この話題については、Yano-Terao [14] を見られたい。

§3. Bifurcation set of a semiuniversal deformation

§2では、ある種の deformation の discriminant が free になることを述べた。ここでは、semiuniversal deformation の bifurcation set が free divisor になることを述べる。これは Arnol'd-Lyashko [1][5] の結果と関連がある。

補題1. $(D,0)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)$ が divisor とする。$(\mathbb{C}^{n+1},0)$ の座標を $(t_0,\cdots,t_n)$ ととって、

$$\begin{array}{ccc} (D,0)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)=S & & \\ \pi\downarrow \quad\swarrow & & (t_0,\cdots,t_n) \\ & & \downarrow \\ T=(\mathbb{C}^{n},0) & \ni & (t_1,\cdots,t_n) \end{array}$$

という diagram を考えて、π が finite map であると仮定せよ。$B:=\pi(\mathrm{Sing}\,D)$ とすると、$\mathrm{Der}_S(\log D)$ の lowerable な元

(i.e. $\{\sum_{i=0}^{n} f_i(t)\,\partial/\partial t_i\ ;\ f_1,\cdots,f_n \in \mathbb{C}\{t_1,\cdots,t_n\}\} =: K$ に属している)をπで落とすと、

$$\mathrm{Der}_T(\log B) \text{ に落ちる。}$$

証明は易しい。

従って、 $K \cap \mathrm{Der}_S(\log D) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Der}_T(\log B)$
なる map が define されることになる。この写像が surjective になる条件を与える:

補題2. 上の写像π_*は $(D,0)$の multiplicity (at 0)が 2ならば、surjective である.

証明は[11]で述べるが、次の結果を得る:

定理3 補題1の条件に加えて、以下の4条件を仮定する:

(i) $\pi_* : K \cap \mathrm{Der}_S(\log D) \longrightarrow \mathrm{Der}_T(\log B)$ を T上の sheaves の写像と見て、codim ≧ 2 を除いて surjective,

(ii) $(D,0)$が free divisor,

(iii) πの discriminant $= B$,

(iv) $\mathrm{mult}_0(D) = n+1$.

$\Rightarrow$ π_*は surjective で、しかも B も free divisor になる.

特に、$(D, 0)$ が semiuniversal deformation の discriminant であるとき、B のことを bifurcation set とよぶ。そのときは、定理3の4条件はすべて満されているので、(補題2を用い)

系1. semi-universal deformation の D, B に関して、π_* は onto.

系2. semi-universal deformation の bifurcation set は free divisor になる。

を得る。

Remark. 系1は Arnol'd [1] によって A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 の場合、計算で確かめられ、一般の場合に予想されていて、Lyashko [ ] がその予想を解いた。ここでは、その別証を与えたことになる。(とはいっても、Lyashko の証明は available でないので、別証かどうかは判らない)

Remark. rational double の semiuniversal deformation に対する bifurcation set B については、Looijenga が $T \setminus B$ が $K(\pi, 1)$ になることを証明している [4]. $K(\pi, 1)$ 性と、free divisor の関係には、ますます興味が持たれる所以である。

最後に、$\mathrm{Der}_S(\log D)$ の free base から、どのように、

$\mathrm{Der}_T(\log B)$の free base を構成するかを、具体的に述べよう（semiuniversal deformation の場合）.

$\mathrm{Der}_S(\log D)$の free base を

$$\begin{cases} \theta_0 = (t_0 - a_{00})\partial/\partial t_0 + a_{01}\partial/\partial t_1 + \cdots + a_{0n}\partial/\partial t_n \\ \theta_1 = a_{10}\partial/\partial t_0 + (t_0 - a_{11})\partial/\partial t_1 + \cdots + a_{1n}\partial/\partial t_n \\ \vdots \\ \theta_n = a_{n0}\partial/\partial t_0 + \cdots + a_{n,n-1}\partial/\partial t_{n-1} + (t_0 - a_{nn})\partial/\partial t_n \end{cases}$$

の$(n+1)$ケでとれることは難しくない（$\forall a_{ij} \in \mathbb{C}\{t_1, \cdots, t_n\}$）[7] [10].

$\theta_1' \underset{def}{=} t_0\theta_0 - a_{01}\theta_1 - a_{02}\theta_2 - \cdots - a_{0n}\theta_n$ とおくと.

$\theta_1' \in K = \{ \sum_{i=0}^{n} f_i(t)\partial/\partial t_i \ ; \ f_1, \cdots, f_n \in \mathbb{C}\{t_1, \cdots, t_n\} \}$ となる.

以下は.

$$\theta_i' \underset{def}{=} t_0^i\theta_0 - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\theta_j \in K \quad (i = 2, \cdots, n-1)$$

となるような $b_{ij} \in \mathbb{C}\{t_0, \cdots, t_n\}$ たちが unique に定まることがわかる.

すると、$\pi_*(\theta_1'), \cdots, \pi_*(\theta_{n-1}')$ が丁度、$\mathrm{Der}_T(\log B)$の base を与えている。

REFERENCES

1. Arnol'd, V.I.: Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, convolution of invariants of reflection groups, and singular projections of smooth surfaces. Uspekhi Mat. Nauk 34,no. 2, 3-38 (1979). = Russian Math. Surveys 34, no. 2, 1-42 (1979).
2. Arnol'd, V.I.: Wave front evolution and equivariant Morse lemma. Communication on pure and appl. math., 29, 557-582 (1976).
3. Cartier, P.: Les arrangements d'hyperplans: un chapitre de geometrie combinatoire. Seminaire Bourbaki 33e annee, 1980/81, n 561. Springer Lecture Notes No.901, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1982.
4. Looijenga, E.: The complement of the bifurcation variety of a simple singularity. Inventiones math. 32, 105-116 (1974).
5. Lyashko, O.V.: The geometry of bifurcation diagrams. Uspekhi Mat. Nauk 34, no.3, 205-206 (1979) = Russian Math. Surveys 34, no.3, 209-210 (1979).
6. Orlik, P., Solomon, L.: Unitary reflection groups and cohomology. Inventiones math., 59, 77-94 (1980).
7. Saito, K.: Primitive forms for an unfolding of a function with an isolated critical point. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 28, no.3,775-792 (1982).
8. Terao, H.: Arrangements of hyperplanes and their freeness I. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 27, no. 2, 293-312 (1980).
9. Terao, H.: Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shephard-Todd-Brieskorn formula. Inventiones math. 63, no.1, 159-179 (1981).
10. Terao, H.: Discriminant of a holomorphic map and logarithmic vector fields (to appear).
11. Terao, H.: The bifurcation set and logarithmic vector fields (in preparation).
12. Yano, T.: Free deformations of isolated singularities. Sci. Rep. of the Saitama Univ., Ser. A, 9, no.3, 61-70 (1980).
13. Yano, T.: Deformation of isolated singularities and folding of Coxeter systems (in preparation).
14. Yano, T., Terao, H.: Duality between the two exponents of free deformations attached to unitary reflection groups (to appear).