

有限 Chevalley 群の Green 多項式

東京理科大 理工 庄司俊明

(Toshiaki Shoji)

1° G を有限体 $\mathbb{F}_q$ ($q = p^f$) 上定義された、連結、
reductive な代数群、 F を $\mathbb{F}_q$ に対する G の Frobenius
準同型とする。 G の F -stable な Borel 部分群、 F -stable
な maximal torus の対 $B_0 \supset T_0$ を 1 つ 固定する。 G の
Lie 環 $\mathfrak{g}$ の nilpotent element A に対し、 G/B_0 の 部分多様
体、 $\mathcal{O}_A = \{B \in G/B_0 \mid \text{Lie } B \ni A\}$ を考える。 Springer [2],
Lusztig [6] に あり、 Weyl 群 W の ℓ -adic cohomology 群
 $H^i(\mathcal{O}_A) = H^i(\mathcal{O}_A, \mathbb{Q}_\ell)$ の 上への 表現 (Springer 表現),
 $r_i : W \rightarrow GL(H^i(\mathcal{O}_A))$ が 構成される。 此処では、
 $r_0 = 1_W$ (即ち、 A : regular の 時、 単位表現) とする
様に normalize しておく。 $A \in \mathfrak{g}^F$ に 取ると、 F は、
 $H^i(\mathcal{O}_A)$ の 上の 作用 F^* を induce する。 $w \in W = N_G(T_0)/T_0$
に対し、 T_w を T_0 から w により twist された F -stable な
maximal torus とする。 その 時、 G の Green 関数

$Q_{T, G}$ を,

$$(1.1) \quad Q_{T, G}(A) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \text{Tr}(F^* r_i(w^{-1}), H^i(\mathcal{B}_A))$$

により定義する。 N を G の nilpotent variety とすると,

$Q_{T, G}$ は N^F 上の 類関数 である。 Green 関数は,

$GL_n(\mathbb{F}_q)$ の 場合には, Green により 導入 されたが, 後に,

Deligne-Lusztig [3] により, $\text{Tr}(u, R_T(\theta)), (u \in G^F, \text{unipotent})$

として G^F の unipotent class 上の 関数 として, 一般の reductive

群 に対して 定義 された。 $R_T(\theta)$ の character value の 決定

は, G と, G より も rank の 小さい reductive 群 達の Green

関数 の 決定 に 帰着 する。 一方, $p \gg 0, q \gg 0$ の 時, G の

unipotent variety と G の nilpotent variety の 同型 により,

$Q_{T, G}(A)$ と $Q_{T, G}(u)$ が 同一 視 出来 事 だが, Kazhdan [5],

Springer [12] により 示 されて いる。 この 報告 では, Green

関数 (1.1) を 計算 する 一般 的な algorithm の 存在 する

事 を 示 す。 実際, 例外 群 に対して は, F_4 ([9]), $E_6, E_7,$

E_8 ([11]) の 各 場合 に, 最近, computer を 使 っ て 具体的 に

計算 された。 (G_2 は 既に [12] で 得 ら れ て いる。)

$$\cong C(A) = Z_G(A) / Z_G^0(A) \text{ は } H^i(\mathcal{B}_A) \text{ 上 に } W \text{ と 可換 する}$$

作用 を induce する。 $\phi \in C(\hat{A})$ (irred. character) に対し,

$H^i(\mathfrak{B}_A)_\phi$ は $H^i(\mathfrak{B}_A)$ の ϕ -isotypic subspace とする。

$d_A = \dim \mathfrak{B}_A$ とし, top cohomology $H^{2d_A}(\mathfrak{B}_A)$ とする。

$H^{2d_A}(\mathfrak{B}_A)_\phi \neq 0$ の時, これは $C(A) \times W$ -module とし。

$H^{2d_A}(\mathfrak{B}_A)_\phi = E_\phi \otimes V_{A,\phi}$ と分解する (E_ϕ は $\phi \in C(\hat{A})$ に対応する既約 $C(A)$ -module, $V_{A,\phi}$ は W -module)。

W -module $V_{A,\phi}$ の character を $\chi_{A,\phi}$ と表す。又。

$$C(\hat{A})_0 = \{ \phi \in C(\hat{A}) \mid H^{2d_A}(\mathfrak{B}_A)_\phi \neq 0 \} \text{ と置く。}$$

定理 2.1. (Springer [12]) 対応 $(A, \phi) \mapsto \chi_{A,\phi}$ は, 次の bijection を induce する。

$$\{ (A, \phi) \mid A \in \mathcal{N}, \phi \in C(\hat{A})_0 \} / \sim_{G\text{-共役}} \xrightarrow{\sim} \hat{W}$$

この対応を Springer 対応という。Green 関数の決定には, Springer 対応を具体的に決める事が必要になる。これは, 各場合に決定されている。(A_n , Hotta - Springer [4]; 古典群, F_4 , 筆者 [7], [8]; E_6 , E_7 , E_8 , Alvis - Lusztig [1], Spaltenstein [10]; G_2 , Springer [12])。

3. 以下, 簡単の爲, G を split type, $p = \text{good}$ とする。

(non split type の場合は, § 参照。 p に対する条件は, § 6)

せらう。) 初めに, Green 関数は, G の isogeny に よらう
事に注意しておく。

定義 3.1. $A \in N^F$ に対し, A が distinguished とは,

(i) $\mathcal{O}_A$ の全ての既約成分は F -stable

(ii) F は $C(A)$ に trivial に作用する

とすることを言う。

命題 3.2. $p = \text{good}$, $G = \text{simple}$ の時, E の唯1つの
共役類 $(D_5 + A_1)$ を除いて, 各 $A \in N^F$ の G -orbit $O(A)$ の中
に distinguished な代表元が存在する。 E の共役類 $D_5 + A_1$
に対しては, $q \equiv 1 \pmod{5}$ の時, distinguished な元が存在するが,
 $q \equiv -1 \pmod{5}$ の時は存在しない。

実際, 古典群, $F_4([q])$ の場合は筆者, E_6, E_7, E_8 に
対しては, Spaltenstein ([10]) により確かめられた。特に, E_8 に
於ける例外の存在は, Spaltenstein により初めて見出された。

4° 以下, 任意の $A \in N^F$ に対し, $O(A)$ 中に distinguished
な代表元が存在するのとする。(実際, E_8 の例外の場合
も, 計算においては, 殆んど害には及ばない)。 $A \in N^F$ を

distinguished とする。 $O(A)^F$ の G^F -orbit 達は、 $C(A)$ の共役類 1 による parametrized され (F は $C(A)$ 1=trivial 1=作用) ので、対応する各代表元を A_c ($c \in C(A)$, $A=A_1$) と表わす事に可。 又、時、 fixed A に対し、

$(c, w) \mapsto Q_{Tw}(A_c)$ は $C(A) \times W$ の類関数とみたす事が出来る。 尤、

$$Q_{Tw}(A_c) = \sum_{\phi \in \hat{C(A)}} \phi(c) Q_{A, \phi}(w)$$

と分解可。 此、

$$Q_{A, \phi}(w) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \text{Tr}(F^* \eta_i(w^{-1}), H^i(\mathcal{B}_A)_\phi)$$

である。 又、 $x \in N^F$ を固定した時、 $Q_{Tw}(x) \in W$ の類関数とみて、 $Q_{Tw}(x) = Q_x(w)$ と表わす。 この時、

定理 4.1. (Borho-Macpherson [2]) $x \in N^F$ に対し、

$$\langle Q_x, \chi_{A, \phi} \rangle_w = \begin{cases} \phi(c) q^{d_A} & \text{if } x \sim_{G^F} A_c \\ 0 & \text{if } x \notin \overline{O(A)} \end{cases}$$

但し、 $\overline{O(A)}$ は $O(A)$ の G^F の閉包、 $\langle, \rangle_w$ は W の類関数としての内積である。

注意 4.2. 実際, Borho - Macpherson Thm corollary 4.12 ([2; 6, Cor1]),

$$H^i(\mathcal{B}_x) = \bigoplus_{(A, \phi)} \left(V_{A, \phi} \otimes \mathcal{H}_x^{i-2d_A}(\overline{O(A)}, \pi^* \mathcal{L}_\phi) \right)$$

が成り立つ。但し, $\mathcal{L}_\phi$ は $\phi \in C(\widehat{A})$ により定まる $O(A)$ 上の locally constant sheaf, $\pi^* \mathcal{L}_\phi$ は $\overline{O(A)}$ 上への D.G.M. extension を表わす。特に, 次が成り立つ: $\langle H^i(\mathcal{B}_x), \chi_{A, \phi} \rangle_w \neq 0 \Rightarrow x \in \overline{O(A)}$, 且つ, $i \geq 2d_A$ (容易に分り, A : distinguished (即ち, F は $H^{2d_A}(\mathcal{B}_A)$ 上には q^{d_A} による scalar 倍作用) を使って, 定理 4.1 が出る。

定理 4.3. $Q_{A, \phi} = 0$ かつ $\phi \notin C(\widehat{A})$ 。

定理 4.3'. 任意の i に対し, $H^i(\mathcal{B}_A)_\phi = 0$ かつ $\phi \notin C(\widehat{A})$ 。

実際, 定理 4.3' $\Rightarrow$ 定理 4.3 は明らかであるが, 結果としてこれは同値になる (注意 7.2)。定理の証明は, 古典群の場合, $\iota: \mathcal{B}_A \rightarrow \mathcal{P}_A$ (但し, $\mathcal{P} = G/P$, P は $(P \supset B)$ Levi 部分群と同じ type であるような G の maximal parabolic subgroup, $\mathcal{P}_A$ は $\mathcal{B}_A$ と同様に定義された G/P の成分多様体) に対して, “良い” locally trivial な filtration を

存在する事を利用し, $C(\hat{A})_0$ の分類と, G の rank 1 に由る
 帰納法により得られる。又, $GL_n, (E_6)_{ad}, (E_7)_{ad}$ に対し
 ては, 任意の $A \in N$ に対し, $C(\hat{A}) = C(\hat{A})_0$ とするのて,
 この場合は, 明らかである。一方, G_2, F_4, E_8 に対して
 は, それぞれ唯一つの共役類を除いて $C(\hat{A}) = C(\hat{A})_0$
 とする。例外の場合, $|C(\hat{A})_0| = |C(\hat{A})| - 1$ となり, こ
 りは, G_2, F_4, E_8 においてそれぞれ $C(A) \cong S_3, S_4, S_5$
 とする唯一つの class であり, 対称群 $C(A)$ の sign character
 が $C(\hat{A})_0$ に含まれない。これら G_2, F_4, E_8 に対しては,
 後に述べる様に (6), Green 関数の計算の途中で, 定理
 4.3 が確かめられる。

注意 4.4. $h = \sum_{A \in N/\sim} C(\hat{A}) - |\hat{W}|$ とおくと, Springer 対応
 により, $h \geq 0$ であり, 上に述べた事から, 例外群に対
 しては, $h \leq 1$ とする。しかし, 古典群に対しては, 一般に
 h は十分大きくなり得る。例えば $G = PSP_{2n}$ とすると

n	≤ 5	6	7	8
h	0	1	2	5

となり, $n \rightarrow \infty$ の時, $h \rightarrow \infty$ となる事が示される。

5.0 以下. これらの性質によつて Green 関数が決定される事になる。先づ、次の事実が知られている。([12])。

$$(5.1) \quad Q_{T_w, G}(0) = Q_0(w) = \varepsilon(w) q^{-d_0} |G^F| / |T_w^F|$$

但し、 $\varepsilon : W$ の sign character
 $d_0 = \dim G/B$

(5.2) 直交関係

$$\sum_{X \in N^F} \langle Q_X, \chi \rangle_W Q_X = q^{d_0} \varepsilon \chi \otimes Q_0 \quad \text{for } \forall \chi \in \hat{W}$$

実際、[12] によつて Green 関数の直交関係は、

$$(5.3) \quad |G^F| \sum_{X \in N^F} Q_{T_w, G}(X) Q_{T_{w'}, G}(X) = \begin{cases} 0 & \text{if } w \neq w' \\ |W(T_w)^F| / |T_w^F| & \text{if } w = w' \end{cases}$$

と表わされるが、そこで (5.3) の左辺に $\chi(w) \varepsilon$ をかけ、 $w \in W$ に対して和を取れば、(5.2) が得られる。さて、 $\dim O(A)$ に因つて、帰納的に Green 関数が決まる事を示す。先づ $A=0$ の時、 Q_A は (5.1) により与えられる。そこで $\dim O(X) < \dim O(A)$ とする $X \in N^F$ に対しては、 Q_X が既に決まっているものとする。 $\chi = \chi_A \phi$ を (5.2) に代入し、定理 4.1 を使うと、

$$\sum_{X \in \overline{O(A)}^F} \langle Q_X, \chi_{A,\phi} \rangle_W Q_X = q^{d_0} \in \chi_{A,\phi} \otimes Q_0.$$

従って、仮定より、任意の $\phi \in C(\hat{A})_0$ に対して、

$$(5.4) \quad \sum_{C \in C(A)/\sim} |G^F A_C| \phi(c) q^{d_A} Q_{A_C} = \text{known value}$$

となる。但し、 $G^F A_C$ は A_C の G^F -orbit を表わすものとする。(5.4) は $C(A)$ の Character に関する直交関係を使い、 $Q_{A,\phi}$ ($\phi \in C(\hat{A})_0$) に関する $|C(\hat{A})_0|$ 個の連立方程式に変換出来る、その係数行列は正則になる事が分る。従ってこれを解いて各 $Q_{A,\phi}$ ($\phi \in C(\hat{A})_0$) が定まる。一方、定理 4.3 により $\phi \notin C(\hat{A})_0$ に対しては $Q_{A,\phi} = 0$ であるから、これから全ての $Q_{A,\phi}$ 、従って、 Q_{A_C} が計算出来る。以上の議論から、Green 関数の決定は結局 Springer 対応の決定に帰着し、この結果により全ての場合には、Green 関数が決定出来る事になる。

6° G_2, F_4, E_6 の場合、定理 4.3 は次の様に示される。
 $A \in N^F$ と $|C(\hat{A})_0| = |C(\hat{A})| - 1$ とするものとする。この時、
 $C(A) \cong S_3, S_4$, または S_5 であり、 $|G^F A_C| = n(c) |G^F| \cdot q^{-a}$,
 と表わせる。但し、 $a = \dim Z_G(A)$, $n(c)$: c の $C(A)$ での共役類

の数である。又 $(\hat{A})_0$ に含まれるものは (A) の sign character

ε であるので, $Q_A = Q'_C + \varepsilon(C) Q_\varepsilon$ とおく。即ち,

$$Q'_C = \sum_{\phi \in (\hat{A})_0} \phi(C) Q_{A,\phi}, \quad Q_\varepsilon = Q_{A,\varepsilon} \quad \text{である。この時}$$

任意の $X \in \hat{W}$ に対し,

$$(6.1) \quad \sum_{X \in O(A)^F} \langle Q_X, X \rangle_W^2 = \sum_{C \in C(A)/\sim} |G^F A_C| \langle Q'_C, X \rangle_W^2 + |O(A)^F| \langle Q_\varepsilon, X \rangle_W^2$$

とえる。5° の議論から, $\phi \in (\hat{A})_0$ に対する $Q_{A,\phi}$ は全て
命じているとしてよい。従って各 $C \in C(A)$ に対し, Q'_C も全て決ま
っている。今, $\overline{O(A')} \not\subset \overline{O(A)}$ とする A' を取り, $\overline{O(A')} \not\subset \overline{O(X)}$
とすると全ての $X \in N^F - O(A)^F$ に対して, Q_X が決まっているとえる。
この時, $Q_{A'_C}$ が次の様に決定される。(5.2) より

$$(6.2) \quad \sum_{X \in N^F} \langle Q_X, X \rangle_W^2 = \int^{d_0} \langle \varepsilon X \otimes Q_0, X \rangle_W$$

が成立するので, $X = X_{A',\phi'}$ を代入して定理 4.1 と仮定
を使う事になり, (6.2) から (6.1) の左辺が計算出来る。
これから, 任意の $\phi' \in (\hat{A}') = (\hat{A})_0$ に対して, $\langle Q_\varepsilon, X_{A',\phi'} \rangle_W = 0$
となる事が, 計算を実行する事により確かめられる。すると
最早, Q_ε は, $Q_{A'}$ の計算に影響を及ぼさないので,
5° の方法により $Q_{A'_C}$ が計算出来る。以下, 同様の計算

を続ければ、結局 全ての $X \in N^F \setminus O(A)^F$ に対し、 Q_X が計算出来、又: $\overline{O(A')} \neq \overline{O(A)}$ とする任意の A' に対し、
 $\langle Q_\varepsilon, \chi_{A', \phi} \rangle_W = 0$ が得られる。一方、 $\overline{O(A')} \subset \overline{O(A)}$ とする A' に対しては、定理 4.1 により、 $\langle Q_\varepsilon, \chi_{A', \phi} \rangle_W = 0$ 、
 従って、 $Q_\varepsilon = 0$ 、 $Q_{A_C} = Q'_C$ を得る。

7° Σ° の計算から、系として次が出る。

系 7.1. p : good, A : distinguished とすると、

$$H^{\text{odd}}(\mathcal{B}_A) = 0,$$

F^* の $H^{2i}(\mathcal{B}_A)$ への固有値は q^i 。

更に、 p に独立な多項式 $\sum_{i \geq 0} a_i(w, A) T^i \in \mathbb{Z}[T]$

が存在して、 $Q_{T_w, G}(A) = \sum_{i \geq 0} a_i(w, A) q^i$ と表わせた。ここに

$w \mapsto a_i(w, A)$ は、 W の character である。

実際、 Σ° の計算 (p : good の時、 $c(A)$, $|Z_G(A)^F|$, etc は、係数が p に独立な q の多項式となる) と、 $Q_{T_w, G}(A) \in \mathbb{Z}$ とから、 $Q_{T_w, G}(A)$ は $\mathbb{Q}$ -係数 (p に独立) の q の多項式として表わされる。ここで Springer の結果、(F^* の $H^i(\mathcal{B}_A)$ への固有値は、絶対値 $q^{i/2}$) を使えば、 $H^{\text{odd}}(\mathcal{B}_A) = 0$ 、 $H^{2i}(\mathcal{B}_A)$ への F^* の固有値 $= q^i$ を得る。従って系が出る。

注意 7.2. $H^{\text{odd}}(\mathbb{B}_A) = 0$ のので, Q_A, ϕ は $C(A)$ -module として, $H^i(\mathbb{B}_A)_\phi$ 達の直和になる。従って, 定理 4.3 $\Rightarrow$ 定理 4.3'.

系 7.3. V を N^F の $\mathbb{Q}$ -valued class function 全体のなすベクトル空間, V_0 を $Q_{T_w, G}$ に α, ϵ 張られる V の部分空間とする。 N/G の distinguished を代表系 α を 1 組固定し,

$I = \{(A, \phi) \mid A \in \alpha; \phi \in C(\hat{A})_0\}$ と置く。 $(A, \phi) \in I$ に対し $F_{A, \phi} \in V$ を

$$F_{A, \phi}(x) = \begin{cases} \phi(c) & \text{if } x \sim_{GF} A_c \\ 0 & \text{if } x \notin O(A)^F \end{cases}$$

で定義する。この時, $\{F_{A, \phi} \mid (A, \phi) \in I\}$ は V_0 の基底になる。

筆者の原証明は, 定理 4.1 と 定理 4.3 を使ったものであったが Spaltenstein が次の様に 定理 4.3 より出たことを指摘した。

$J = \{(A, \psi) \mid A \in \alpha, \psi \in C(\hat{A})_0\}$ とおく。 $(A, \psi) \in J$ に対し, $G_{A, \psi} \in V$ を

$$G_{A, \psi}(x) = \begin{cases} \psi(c) |Z_G(A_c)^F| \cdot |Z_{C(A)}(c)|^{-1} & \text{if } x \sim A_c \\ 0 & \text{if } x \notin O(A)^F \end{cases}$$

で定義する。 V 上の内積を $\langle f, g \rangle_V = \frac{1}{|G^F|} \sum_{x \in N^F} f(x) g(x)$

で定めると, Springer 対応と, 定理 4.3 により $\{G_{A, \psi} \mid (A, \psi) \in J\}$ は V_0 の直交補空間 $V_0^\perp$ の基底を与える

事が分る。一方, $\phi \in C(\hat{A})_0$, $\psi \notin C(\hat{A})_0$ に対し,

$\langle F_{A,\phi}, G_{A,\psi} \rangle_V = \langle \phi, \psi \rangle_{C(\hat{A})} = 0$ かつ, $F_{A,\phi}$ は $V_0^\perp$ と直交する事が言える。従, 2. 系 7.3 が出る。

注意 7.4. G^F の unipotent element u に対し, $C(u)$, $C(\hat{u})_0$, I , e_k を N^F の場合と同様に定め, $(u, \phi) \in I$ に対し G^F の class function $F_{u,\phi}$ を

$$F_{u,\phi}(x) = \begin{cases} \phi(c) & \text{if } x \sim_{G^F} u_c \\ 0 & \text{if } x \notin O(u)^F \end{cases}$$

で定義する。すると系 7.3 かつ, $F_{u,\phi}$ は uniform function になる, 即ち, $R_T(0)$ の一次結合で表わせる事が分る。これは, $\phi=1$ の場合には Lusztig, ϕ : 一般の場合, 川中エリにより予想されていた。

8° G : non split type に対しても, ほぼ同様の議論が成り立つ。 G を 2D_n 型とする。 F は W に 2-regular autom. σ として作用し, W の σ による拡大 $\tilde{W} = \langle \sigma \rangle \cdot W$ は B_n -型 Weyl 群 $W(B_n)$ と同型になる。 $\tilde{W}$ の元 $\chi_{A,\phi}$ は n の partition の pair $(\alpha; \beta)$ (unordered pair) により $\chi_{A,\phi} = \chi_{(\alpha; \beta)}$ と表わされる。 $\alpha \neq \beta$ の時 $\chi_{\alpha, \beta} \in \hat{W}^F$ (F -stable character) で, $\tilde{W}$ の拡大は 2 個存在し, それらは $W(B_n)$ の character

として, ordered pair $(\alpha; \beta)$ により, $\tilde{\chi}_{(\alpha; \beta)}$, $\tilde{\chi}_{(\beta; \alpha)}$ と表わされる。この時, 次の補題が成立する。

補題 8.1. 各 $A \in N^F$ に対し, $O(A)^F$ に次を満たす様な適当な代表元 (これを distinguished と呼ぶ) が存在する。即ち, A : distinguished, $\chi_{A, \phi} \in \hat{W}^F$ に対し,

$$\mathrm{Tr}(\tilde{F}^* r_{2d_A}(w^{-1}), H(\mathbb{C}_A)_\phi) = \tilde{\chi}_{A, \phi}(w\sigma) q^{d_A},$$

但し, $\tilde{\chi}_{A, \phi}$ は $\chi_{A, \phi}$ の拡大で, $\chi_{A, \phi} = \chi_{(\alpha; \beta)}$ となる時, $\tilde{\chi}_{A, \phi} = \tilde{\chi}_{(\alpha; \beta)}$ は 辞引式順序 に対して $\alpha > \beta$ と取れる。

補題 8.1 により $\mathcal{M}$ の代りに $\tilde{W}$ を考える事により, 定理 4.1, 定理 4.3 (の類似) が成立し, §5 と同様な方法で Green 函数が決定できる。即ち,

系 8.2. $G = 2D_n$ 型の時, distinguished な A に対し, p に独立な多項式 $\sum_{i \geq 0} a_i(w\sigma, A) T^i \in \mathbb{Z}[T]$ が存在して,

$$Q_{\tilde{w}, \phi}(A) = \sum_{i \geq 0} a_i(w\sigma, A) q^i \text{ と表わせる。但し,}$$

$\tilde{w} \mapsto a_i(\tilde{w}, A)$ は $\tilde{W}$ の character である。

G^F : Unitary 群の場合には. 既に Hotta-Springer [4] により, Green 函数は Enola の公式により, $GL_n(\mathbb{F}_q)$ の Green 函数を使い $g \leftrightarrow -g$ の変換で記述できる事が分っていたが, 2E_6 の場合にも, 適当な G^F -orbit の代表元を取ることにより, Enola の公式の成立する事を Spaltenstein が示した. 他の古典群に対しては, 次の形で Enola の公式が成立する.

定理 8.3. (i) G を type $B_n, C_n, D_{2n}, {}^2D_{2n}$ のいずれかとす. λ distinguished な代表元 $A \in N^F$ に対し, $C_0 \in C(A)$ が (adjoint 群の中で唯一) 存在して,

$$Q_{T_w, G}(A_c)(-g) = Q_{T_{ww_0}, G}(A_{cc_0})(g).$$

(ii). D_{2n+1} 型の場合, $G^+ = D_{2n+1}$, $G^- = {}^2D_{2n+1} \subset L$, $\{A^+\}$, $\{A^-\}$ を, それぞれ, G^+ , G^- に対する distinguished な代表系 (補題 8.1) とする. この時, λ A に対し, $C_0 \in C(A)$ が (adjoint 群の中で唯一) 存在して,

$$Q_{T_w, G^+}(A_c^+)(-g) = Q_{T_{ww_0}, G^-}(A_{cc_0})(g).$$

但し, $Q_{T_w, G}(A)(T) \in \mathbb{Z}[T]$, w_0 は W の長さ最大の元を表わす.

注意 8.4. 3D_4 については, Spaltenstein により, 直接的方法 (Lie 環を使わずに) で, G^F 上の Green 函数が計算されている。

References

1. Alvis, D. and Lusztig, G.: On Springer's correspondence for simple groups of type E_n ($n = 6, 7, 8$). To appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.
2. Borho, W. and Macpherson, R.: Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés nilpotentes. C.R.Acad. Sci. 292 (1981) n° 15, 707-710.
3. Deligne, P. and Lusztig, G.: Representations of reductive groups over finite fields. Ann. Math. 103 (1976) 103-161.
4. Hotta, R. and Springer, T.A.: A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of Unitary groups. Inventiones Math. 41 (1977) 113-127.
5. Kazhdan, D.: Proof of Springer's Hypothesis. Israel J. Math. 28 (1977) 272-286.
6. Lusztig, G.: Green polynomials and singularities of unipotent classes. Advances in Math. 42 (1981) 169-178.
7. Shoji, T.: On the Springer representations of the Weyl groups of classical algebraic groups. Comm. Algebra 7 (1979) 1713-1745, 2027-2033.

8. Shoji, T.: On the Springer representations of Chevalley groups of type F_4 . Comm. Algebra 8 (1980) 409-440.
9. Shoji, T.: On the Green polynomials of Chevalley groups of type F_4 . Comm. Algebra 10 (1982) 505-543.
10. Spaltenstein, N.: Appendix to the paper of Alvis-Lusztig. To appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.
11. Spaltenstein, N.: Determination of Green functions. Oberwolfach Tagungsbericht 25/1982. Darstellungstheorie und ℓ -adische Kohomologie.
12. Springer, T.A.: Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups. Inventiones Math. 36 (1976) 173-207.