数理解析研究所講究録
475巻 1982年 79-94

有限G集合のカテゴリーのスパンと表現論への応用.

北大理　吉田知行 (Tomoyuki Yoshida)

§1. Introduction.

有限群の指標環を結ぶいくつかの写像がある．以下Gを有限群，R(G)を有限群Gの指標環とする．$H \leq K \leq G$，$g \in G$に対し，3種類の線型写像がある：

$$\mathrm{Ind}_H^K : R(H) \longrightarrow R(K) ; \alpha \longmapsto \alpha^K \quad (\text{誘導指標})$$

$$\mathrm{Res}_H^K : R(K) \longrightarrow R(H) : \beta \longmapsto \beta_H \quad (\text{制限指標})$$

$$\mathrm{Con}_H^g : R(H) \longrightarrow R(H^g) : \alpha \longmapsto \alpha^g \quad (\text{共役指標}).$$

ここで，$H^g = g^{-1}Hg$であり，α^gは$\alpha^g(h^g) = \alpha(h)$で定義される．

これらを組み合わせて，$H, K \leq G$，$x \in G$，$A \leq H^x \cap K$に対し，写像$[H, x, A, K]$を次で定義する．

$$[H, x, A, K] : R(H) \longrightarrow R(K) \quad : \alpha \longmapsto {\alpha^x}_A{}^K.$$

このとき，

(*) $[H, hxk, A^k, K] = [H, x, A, K]$ $(h \in H,\ k \in K)$.

となる．さらに，$[H, x, A, K]$ と $[K, y, B, L]$ の合成 $R(H) \longrightarrow R(K) \longrightarrow R(L)$ を計算すると

$$(**)\ [H, x, A, K] \cdot [K, y, B, L] = \sum_{k \in H \backslash K / B^{y^{-1}}} [H, xky, A^{ky} \cap B, L]$$

$$\left(= \sum_{k \in K} \frac{|A^{ky} \cap B|}{|A| \cdot |B|} [H, xky, A^{ky} \cap B, L] \right)$$

となる．

今度は逆に，$H, K \leq G$ に対し，記号の集合

$$\{ [H, x, A, K] \mid x \in G,\ A \leq H^x \cap K \}$$

を生成系とし，上の(*)を関係式とするアーベル群を $\{H, K\}_G$ とする．さらに(**)によって bilinear map $\{H, K\}_G \times \{K, L\}_G \to \{H, L\}_G$ を定義する．この bilinear map は結合的であり，とくに $\{H, H\}_G$ は環になることが示される．加群としては，

$$\{H, K\}_G \cong \bigoplus_{g \in H \backslash G / K} \Omega(H^g \cap K).$$

ここで Ω は Burnside 環である．

$R(H)$ は $\{H, H\}_G$-加群である．もっと一般に，$\mathfrak{a}$ が G-functor なら，bilinear map $\mathfrak{a}(H) \times \{H, K\}_G \longrightarrow \mathfrak{a}(K)$: $(\alpha, [H, x, A, K]) \longmapsto \alpha\, {}^x{}_A{}^K$ は結合的 $(\alpha \cdot (\lambda\mu) = (\alpha \cdot \lambda)\mu)$ であ

り，とくに $\mathcal{Q}(H)$ は $\{H,H\}_G$ 加群である．

次のことを目標とする．

目標．$k \otimes_{\mathbb{Z}} \{H,H\}_G$ の中心原始巾等元 (c.p.i) を求める．ここで，k は可換環，$H \leq G$ である．

$k \otimes \{H,H\}_G$ の cpi は，G-functor $\mathcal{Q}$ に対する $\mathcal{Q}(H)$ の直和分解を与える．このことは，直既約加群のブロックへの分割や各種の induction 定理に関係がある．

§2．例と巾等元公式．

$\{H,H\}_G$ は，群 G に関するいろいろな環と関係がある．

(1) $H=1$ の場合．

$$\{1,1\}_G = \langle [1,x,1,1] \mid x \in G \rangle \cong \mathbb{Z}G \quad (\text{group ring}).$$

(K,R,F) を splitting p-modular system とする．$K=(R)$, $ch\,K=0$, $F=R/rad(R)$, $ch(F)=p$．$Irr(G)=\{\chi_1,\cdots,\chi_r\}$ とする．

$$KG \cong \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(K), \qquad n_i = \deg \chi_i = \chi_i(1)$$

cpi (KG) は次の形をしている．

$$e_i = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi_i(x)}\, x$$

cpi (RG) は次の形をしている．

$$e_B = \sum_{\chi_i \in B} e_i \qquad (B \in Bl(G))\ .$$

cpi(FG) は，lifting idempotent により，e_B の mod p reduction $\bar{e}_B$ である．

(2) <u>H = G の場合</u>

$\{G, G\}_G = \langle [G, 1, A, G] \mid A \le G \rangle \cong \Omega(G)$ (Burnside 環)

対応は $[G, 1, A, G] \leftrightarrow [G/A]$ による．Burnside ring $\Omega(G)$ は，有限 G 集合のカテゴリーの直和と直積に関する Grothendieck ring である．

各 $S \le G$ に対し，環準同型 φ_S を

$$\varphi_S : k \otimes \Omega(G) \longrightarrow k : [X] \longmapsto |X^S|\ ,$$

(X^S は固定点集合) で定義すると，k が $|G|$-torsion free なら

$$\varphi = (\varphi_S) : k \otimes \Omega(G) \rightarrowtail \prod_{(S) \in C_G} k \qquad (\text{ring mono})$$

である．$|G|^{-1} \in k$ なら，φ は同型である．(C_G は，G の部分群の共役類である)．

$|G|^{-1} \in k$ のとき，cpi $(k \otimes \Omega(G))$ は次の形をしている．

$$e_{G,S} = \frac{1}{|N_G(S)|} \sum_{D \le S} |D| \mu(D, S) [G/D] \qquad ((S) \in C_G)$$

ここで，μ は subgroup lattice の Möbius function．

$\varphi_T(e_{G,S}) = 1$ if $S \overset{G}{\sim} T$，$\varphi_T(e_{G,S}) = 0$ if $S \overset{G}{\not\sim} T$.

$p^{-1} \notin k$, $|G|_p^{-1} \in k$ のとき, epi $(k \otimes \Omega(G))$ は

$$e_{G,S}^{p} = \sum_{(T)\in C_G:\, O^p(T) \cong S} e_{G,S} \qquad \left((S)\in C_G,\ O^p(S)=S\right).$$

ここで, $O^p(T) = \langle x \in T \mid x$ は p'-element $\rangle$.

(3) $H \trianglelefteq G$ の場合.

この場合, $\{H, H\}_G$ は twisted group ring $\Omega(H) \circ \mathbb{Z}[G/H]$ である. ただし, G/H を共役によって $\Omega(H)$ に作用させる.

(4) Hecke 環との関係.

$$\omega : \{H, K\}_G \longrightarrow \mathbb{Z}[H\backslash G/K] : [H, x, A, K] \longmapsto |H^x \cap K : A| \cdot (HxK)$$

は epi で, $\omega(\lambda\mu) = \omega(\lambda)\omega(\mu)$ である. とくに Hecke 環 $\mathbb{Z}[H\backslash G/H]$ $(\cong \mathrm{End}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}[H\backslash G]))$ は $\{H, H\}_G$ の剰余環である.

Burnside ring の巾等元公式は2つの応用をもつ. (似たことは group ring の場合にも言える).

(a) 係数の整数性.

$O^p(S) = S \leq G$ のとき, $e_{G,S}^{p}$ における $[G/H]$ の係数は p-local integer である. とくに, $S = H = 1$ のとき, その係数は $|G|^{-1} \sum_S \mu(1, S)$ (S は G の p-subgp 全体を動く) となる. よって $\sum_S \mu(1, S) \equiv 0 \pmod{|G|_p}$. これは, p-subgroups の lattice の Euler 標数に関する Brown と Quillen の定理を与

える．

(b) Induction 定理への応用．

$\mathbb{Z}_{(p)}$ を $\mathbb{Z}$ の $p\mathbb{Z}$ での局所化とする．巾等元公式を観察すると，$e^{p}_{G,S} \in \mathrm{Ind}_H^G(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \Omega(H))$ となることがわかる．ここで，$O^p(S)=S \trianglelefteq H \leq G$，$H/S \in \mathrm{Syl}_p(N_G(S)/S)$ とする．一方，指標環 $R(G)$ は $\Omega(G)$ 加群で ($\theta\cdot[G/H] := \theta_H{}^G$)，noncyclic $T \leq G$ に対し，$e_{G,T}\cdot R(G)=0$ となることがわかる．よって

$$\mathbb{Z}_{(p)} \otimes R(G) = \bigoplus_{(S)\in C_G;\ S\text{ は cyclic } p'\text{-gp.}} \mathbb{Z}_{(p)} \otimes e^{p}_{G,S} \cdot R(G)$$

$$= \sum \left\{ \mathrm{Ind}_H^G(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes R(H)) \,\middle|\, H \text{ は hyper } p\text{-elem} \right\}$$

これより，指標環に関する hyper-elementary induction が得られる．

§3．主要定理．

G を有限群，$H \leq G$，(K, R, F) を splitting p-modular system とする．

$S \leq G$，$N := N_G(S)$，$\bar{N} = N/S$，$\alpha \in \mathrm{Irr}(\bar{N})$，$b \in \mathrm{Bl}(\bar{N})$ に対し，$K \otimes \{H, H\}_G$ の元 $E_S(H)$，$E_S^p(H)$，$E_{S,\alpha}(H)$，$E^p_{S,b}(H)$ を次のように定義する．($\forall T \leq G$ に対し，$WT := N_G(T)/T$ とおいた)．

$$E_S(H) := \frac{1}{|N|\cdot|H|}\sum_{\substack{A\le S\\ g\in G:\, S^g\le H}} |A|\,\mu(A,S)\,[H,1,A^g,H]$$

$$E^p_S(H) := \sum_{(T)\in\mathcal{C}_G:\, O^p(T)=S} E_T(H) \qquad (\text{ただし } O^p(S)=S)$$

$$E_{S,\alpha}(H) := \frac{\alpha(1)}{|H|\cdot|N|^2}\sum_{\substack{A\le S\\ g\in G:\, S^g\le H}}\sum_{n\in N}\alpha(n^{-1})\,|A|\,\mu(A,S)\,[H,n^g,A^g,H]$$

$$E^p_{S,b}(H) := \sum_{\substack{(T)\in\mathcal{C}_G\\ :\, O^p(T)=S}}\ \sum_{\substack{b'\in Bl(WT)\\ :\, b'^{\bar N}=b}}\ \sum_{\alpha\in b'} E_{T,\alpha}(H) \qquad (O^p(S)=S)$$

$Z(FN_{\bar N}(\bar T))$

最後の $b'^{\bar N}=b$ は、Brauer hom $Z(F\bar N)\to Z(FN_{\bar N}(\bar T)/\bar T)\cong Z(WT)$ によって $b'\in Bl(WT)=Bl(N_{\bar N}(\bar T)/\bar T)$ と $b\in Bl(\bar N)$ とが対応することを意味する。

$E_S(H)\neq 0 \iff S\le_G H$,

$E^p_S(H)\neq 0 \iff S\le_G H$.

$E_{S,\alpha}(H)\neq 0 \iff \alpha\le\pi_{(H\backslash G)^S}$ （π は置換表現の指標），

$E^p_{S,b}(H)\neq 0 \iff \exists\,\alpha\le\pi_{(H\backslash G)^S}$ s.t. $\alpha\in b$.

<u>定理A</u>. 任意の可換環 k に対し，

$$k\otimes\Omega(G)\longrightarrow Z(k\otimes\{H,H\}_G) : [A\backslash G]\mapsto\sum_{g\in A\backslash G/H}[H,1,A^g,H,H]$$

は環準同型で，$e_{G,S}$ ($\in$ cpi $(\mathbb{Q}\otimes\Omega(G))$) , $e^p_{G,S}$ ($\in$ cpi $(\mathbb{Z}_{(p)}\otimes\Omega(G))$) の像が $E_S(H)$, $E^p_S(H)$ である。

<u>定理B</u>. $\mathrm{cpi}(K \otimes \{H, H\}_G) = \{ E_{\xi,\alpha}(H) \neq 0 \mid (\xi) \in \mathcal{C}_G,\ \alpha \in \mathrm{Irr}(W\xi) \}$

<u>定理C</u>. $\mathrm{cpi}(R \otimes \{H, H\}_G) = \{ E^{p}_{\xi,b}(H) \neq 0 \mid (\xi) \in \mathcal{C}_G,\ O^{p}(\xi) = \xi,\ b \in Bl(W\xi) \}$

$\mathrm{cpi}(F \otimes \{H, H\}_G) = \{ \overline{E} \mid 0 \neq E \in \mathrm{cpi}(R \otimes \{H, H\}_G) \}$.

$E^{p}_{\xi,b}(H)$ における $[H, x, A, H]$ の係数は次でちえられる.

$$(*) \quad \frac{|A|}{|N_H(A)|} \sum_{\substack{A \leq T \leq H \\ : O^{p}(T) \underset{G}{\sim} \xi}} \ \sum_{\substack{b' \in Bl(WT) \\ : b'^{\overline{N}'} \sim b}} \ \sum_{n \in N_G(T) \cap H x N_H(A)} \frac{\mu(A, T)}{|N_G(T)|} \rho_{b'}(n^{-1}) \in R$$

ここで $\rho_{b'} = \sum_{\alpha' \in b' \cap \mathrm{Irr}(WT)} \alpha'(1)\, \alpha' \in R(WT)$, $\overline{N}' = W.T$.

とくに, $\xi = 1$, $A = 1$, $\overset{=\{\chi\}}{B} \in Bl(G)$ の defect 0 のとき,

$$\frac{\chi(1)}{|G|} \cdot \frac{1}{|H|} \sum_{y \in H x H} \chi(y) \in R \quad \therefore \sum_{y \in H x H} \chi(y) \in |H|_p \cdot \overline{\mathbb{Z}}.$$

(最後の結果は, $|G : C_G(y)| \cdot \chi(y)/\chi(1) \in \overline{\mathbb{Z}}$ から簡単に出る).

巾等元公式 (定理B, C) は新しい型の induction 定理をちえるかもしれない. $\{G, G\}_G \cong \Omega(G)$ で, $E_{\xi,\alpha}(G) = 0$ if $\alpha \neq 1_{W\xi}$ だから, $H = G$ の場合は古典的な結果 (Dress, Artin, Brauer, $\cdots$) をちえる.

$(\mathfrak{a}, \tau, \rho, \sigma)$ を $\mathbb{C}$ 係数の G-functor とする. $\xi \leq G$ に対し, $W\xi (= N_G(\xi)/\xi)$ は共役によって $\mathfrak{a}(\xi)$ に作用している.

したがって直和分解 $\mathcal{C}(S)=\bigoplus_{\alpha}\mathcal{C}(S)_{\alpha}$ $\quad(\alpha\in Irr(WS))$ を得る．$\{H,H\}_G$ は $\mathcal{C}(H)$ に，$\theta\cdot[H,x,A,H]=\theta^{x}{}_{A}{}^{H}$ によって作用しているから，直和分解

$$\mathcal{C}(H)=\bigoplus_{(S)\in C_G}\ \bigoplus_{\alpha\in Irr(WS)}\mathcal{C}(H)_{S,\alpha}\ ,$$

$$(\text{ここで，}\ \mathcal{C}(H)_{S,\alpha}=\mathcal{C}(H)\cdot E_{S,\alpha}(H))$$

を得る．このとき次が言える．

$$\mathcal{C}(H)_{S,\alpha}\subseteq\{\varphi^{gH}\mid\varphi\in\mathcal{C}(S)_{\alpha},\ g\in G,\ S^{g}\subseteq H\}.$$

$\mathcal{C}=\mathbb{C}\otimes R$（$R$ は指標環から得られる G-functor）の場合，$\theta\in\mathbb{C}\otimes R(H)$ は

(＊＊) $\qquad \theta=\sum_{(S),\alpha}\theta_{S,\alpha}\ ,\quad \theta_{S,\alpha}:=\theta\cdot E_{S,\alpha}(H),\ \alpha\in Irr(WS),(S)\in C_G$

と分解される．$\mathrm{supp}\,\theta_{S,\alpha}\subseteq\{x^{g}\in H\mid g\in G,\ \langle x\rangle=S\}$，$\theta_{S,\alpha}\in\sum\{Im(Ind_T^H)\mid T\leq H,\ T\gtrsim_G S\}$ だから (＊＊) は Artin の定理を含んでいる．したがっていつ $\theta_{S,\alpha}\neq 0$ かに興味があるが，$S\not\leq_G H$ の場合，S が noncyclic の場合，$Ker\,\alpha\not\supseteq C_G(S)$ の場合に，$\theta_{S,\alpha}=0$ となる．また $N_G(S)\subseteq H\trianglelefteq G$ で $\alpha\neq 1$ のときや，θ が有理指標で $\alpha\neq 1$ のときも $\theta_{S,\alpha}=0$ となる．

これに似た応用をもう１つあげておく．$E_{S,B}^{p}(H)$ における $[H,x,H,H]$ $\ (x\in N_G(H))$ の係数は，

$$O^{p}(H)=S\ \Rightarrow\ \frac{1}{|WH|}\sum_{b\in Bl(WH):\ b^{\bar N}=B}\rho_b(x^{-1})\ ,$$

$$O^p(H) \not\sim_G \mathfrak{z} \Rightarrow 0$$

である。また，$H, L \leq G$，$x \in G$，$A \leq H^x \cap L$ に対し，

$$E_{\mathfrak{z},\alpha}(H) \cdot [H, x, A, L] = [H, x, A, L] \cdot E_{\mathfrak{z},\alpha}(L)$$

となる。さて，R 上の G-functor $\mathfrak{a}$ に対し，$H \longmapsto \mathfrak{a}(H) \cdot E_{\mathfrak{z},\mathcal{B}}(H)$ は $\mathfrak{a}$ の direct summand である。$\mathfrak{a}$ が直既約と仮定すると，ある $\mathfrak{z} \leq G$ と $\mathcal{B} \in Bl(W\mathfrak{z})$ があって $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot E_{\mathfrak{z},\mathcal{B}}$ となる。このとき，$\forall \theta \in \mathfrak{a}(H)$ に対し，

$$\theta = \theta \cdot E_{\mathfrak{z},\mathcal{B}}^p(H) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } O^p(H) \not\sim_G \mathfrak{z} \\ \theta \cdot \sum_{b \in Bl(WH) : b^{W\mathfrak{z}} = \mathcal{B}} e_b & \text{if } O^p(H) = \mathfrak{z} \end{cases}$$
$$(\bmod\ \mathfrak{i}(H)).$$

ここで $e_b \in Z(R[WH])$ は b に対応する cpi. ただし $\mathfrak{i}(H) := \sum_{A \subsetneq H} \mathfrak{a}(A)^H$ とした。したがって，

$$O^p(H) \not\sim_G \mathfrak{z} \Rightarrow \tilde{\mathfrak{a}}(H) = 0$$

$$\tilde{\mathfrak{a}}(H) \text{ の simple } WH\text{-factor} \in \bigcup \{ b \in Bl(W) \mid b^{W\mathfrak{z}} = \mathcal{B} \}.$$

例えば，V を直既約 FG 加群 $\in \mathcal{B} \in Bl(G)$，$C_V(H) := \{ v \in V \mid vh = v\ \forall h \in H \}$ とすれば，

$$(\ast\ast\ast) \begin{cases} H \text{ が } p \text{ 部分群でない} \Rightarrow C_V(H) = \sum \{ Im(Tr_A^H) \mid A \subsetneq H \}, \\ C_V(H) / \sum_{A \subsetneq H} Im(Tr_A^H) \text{ の simple factor} \in \bigcup \{ b \in Bl(WH) \mid b^G = \mathcal{B} \} \end{cases}$$

ここで $Tr_A^H : C_V(A) \longrightarrow C_V(H) : v \longmapsto \sum_{h \in A \backslash H} vh$.

§4. Spans.

<u>定義</u>. pull-back をもつ small category $\mathcal{C}$ に対し，Span と呼ばれるカテゴリー $\mathcal{S}_p(\mathcal{C})$ を次で定義する．

(i) $Obj(\mathcal{S}_p(\mathcal{C})) = Obj(\mathcal{C})$

(ii) $X, Y \in \mathcal{C}$ に対し，$\mathcal{S}_p(\mathcal{C})$ における X から Y への morphism は，$[f', f''] := (X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} Y)$ の形をしている．ただし，

$$(X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} Y) = (X \xleftarrow{g'} B \xrightarrow{g''} Y)$$

$$\Leftrightarrow \exists h : A \xrightarrow{\sim} B \quad \text{s.t.} \quad \begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "f''"] \arrow[dd, "h", "\wr"'] & \\ X & & Y \\ & B \arrow[ul, "g'"] \arrow[ur, "g''"'] & \end{tikzcd}$$

とする．

(iii) $[f', f''] : X \leftarrow A \rightarrow Y$ と $[g', g''] : Y \leftarrow B \rightarrow Z$ の合成を，$f \circ g = [\hat{g}' \circ f', \hat{f}'' \circ g''] : X \leftarrow C \rightarrow Z$，ここで，

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\hat{f}''"] \arrow[d, "\hat{g}'"'] \arrow[dr, phantom, "p.b"] & B \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "g'"] & Z \\ A \arrow[r, "f''"'] \arrow[d, "f'"'] & Y & \\ X & & \end{tikzcd} \qquad (p.b = \text{pull-back})$$

によって定義する．

$\mathcal{S}_f^G$ を有限 G 集合のカテゴリーとする．$\mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)$ は bi-product をもち，したがって semi-additive である．可換環

kに対し，係数拡大 $(k\otimes Sp(S_f^G))(X,Y):=k\otimes_{\mathbb{N}}Sp(S_f^G)(X,Y)$
によって k-additive category $k\otimes Sp(S_f^G)$ を得る．

$$k\{X,Y\} := k\otimes_{\mathbb{N}} Sp(S_f^G)(X,Y),\quad (X,Y\in S_f^G)$$

とおく．加群としては，$k\{X,Y\}\cong k\otimes_{\mathbb{Z}}\Omega(S_f^G/X\times Y)$．$\Omega$ は $+$ と $\times$ に関する Gro 環である．

$k\{H\backslash G, K\backslash G\}$ は，

$$\begin{array}{rcccccl}[H,x,A,K]:=[f',f'']: & H\backslash G & \xleftarrow{f'} & A\backslash G & \xrightarrow{f''} & K\backslash G \\ & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ & Hx & \longleftarrow & A & \longmapsto & K\end{array}$$

$(x\in G,\ A\leq H^x\cap K)$ の形の元によって生成される．積は§1で述べたものと一致する．

<u>定義</u>．permutation kG-modules と kG-maps のカテゴリーを Hecke カテゴリーと言い，$\mathcal{H}_{kG}$ と書く．

kG-map $f: kX\longrightarrow kY$ $(X,Y\in S_f^G)$ は行列の形で表わせる．$f(x)=\sum_{y\in Y}f_{xy}y$ とした時，f の行列形は $(f_{xy})_{x\in X,\,y\in Y}$ である．f が kG-hom という条件は，$f_{xy}=f_{xg,yg}$ $(g\in G)$ と表わせる．とくに $\mathcal{H}_k\cong\underline{\underline{Mat}}_k\cong k\otimes Sp(S_f)$．

C_G を G の部分群の共役類とする．各 $S\leq G$ に対し，additive functor $\Psi_S:\mathbb{Z}\otimes Sp(S_f^G)\longrightarrow\mathcal{H}_{\mathbb{Z}[WS]}$ を，

$$X\longmapsto\mathbb{Z}[X^S],$$

$$(X\xleftarrow{f'}A\xrightarrow{f''}Y)\longmapsto\left(|f'^{-1}(x)\cap f''^{-1}(y)\cap A^S|\right)_{x\in X^S,\,y\in Y^S}$$

によって定義する．さらに，

$$\Psi = (\Psi_\xi) : \mathbb{Z} \otimes S_p(S_f{}^G) \longrightarrow \prod_{(\xi)\in C_G} H_{\mathbb{Z}[W\xi]}$$

とする．

定理1．Ψは埋め込みである．即ち，

$$\psi : \mathbb{Z}\{X, Y\} \rightarrowtail \prod_{(\xi)\in C_G} Hom_{\mathbb{Z}[W\xi]}(\mathbb{Z}[X^\xi], \mathbb{Z}[Y^\xi]).$$

さらに Coker ψ は torsion 群．

この定理を証明するために次の定理を $\mathcal{E} = S_f{}^G/X \times Y$ などに適用する．

$\mathcal{E}$を small S_f-topos，$\Omega(\mathcal{E})$を$+$と$\times$に関する Gro 環（これを$\mathcal{E}$の Burnside 環という），$\mathcal{I}$を$\mathcal{E}$の連結な object の同型類の完全代表系とする．各$I \in \mathcal{I}$に対し，

$$\varphi_I : \Omega(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{Z} : [X] \longmapsto |\mathcal{E}(I, X)|$$

$$\varphi = (\varphi_I) : \Omega(\mathcal{E}) \longrightarrow \prod_{I\in\mathcal{I}} \mathbb{Z}$$

とすると，

定理2．φは ring hom でしかも mono．

前半はトポスの基本的結果から出る．mono を示すには，

$X, Y \in \mathcal{E}$，$|\mathcal{E}(I, X)| = |\mathcal{E}(I, Y)|$ $\forall I \in \mathcal{I} \Rightarrow X \cong Y$

を示せばよい．そのために，$\forall A \in \mathcal{E}$に対し，$\#\{f : A \rightarrowtail X\} = \#\{g : A \rightarrowtail Y\}$であることを，$A$の商対象の個数（$\leq |Sub(\Omega^A)|$）に関する帰納法で証明すればよい．

定理1より, $\mathrm{cpi}(\mathbb{C}\otimes\mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)) \overset{\cong}{\leftrightarrows} \mathrm{cpi}(\prod_{(S)} \mathcal{H}_{\mathbb{C}[WS]}) \longleftrightarrow \bigcup\{\mathrm{Irr}(WS) \mid (S)\in C_G\}$ となる. $\cong$ で写してみれば, 定理Bの $\{E_{S,\alpha}(H) \mid H\leq G\}$ が $\mathbb{C}\otimes\mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)$ の cpi を与えることがわかる. こうして定理Bが証明される.

<u>定義</u>. $S\leq G$, $N=N_G(S)$, $WS:=N/S$ とする. functor $\mathcal{S}_f^G \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathcal{S}_f^N \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathcal{S}_f^{WS} : X \longmapsto X|_N \longmapsto X^S$ から誘導された span や Hecke カテゴリーの間の functor を <u>Brauer functor</u> という. $\mathrm{Br}:\mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)\longrightarrow\mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^{WS})$ は常に functor である.

<u>Lem</u>. $\mathrm{ch}(k)=p$, S が p-subgp のときに限り, $\mathrm{Br}:\mathcal{H}_{kG}\longrightarrow\mathcal{H}_{k[WS]}$ は functor であって, ring hom

$$\begin{array}{ccc} \beta: Z(kG) & \longrightarrow & Z(k[WS]) \\ \wr\| & & \wr\| \\ Z(\mathcal{H}_{kG}) & & Z(\mathcal{H}_{k[WS]}) \end{array}$$

を誘導する. さらに, s を Brauer 準同型とすれば,

$$\begin{tikzcd} Z(kG) \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "s"'] & \circlearrowleft & Z(k[WS]) \\ & Z(kN) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(K, R, F) を splitting p-modular system とする. 定理 2 より,

$$Z(R\otimes S_p(S_f{}^G)) \xrightarrow{Z(\Psi)} \bigoplus_{(\xi)\in C_G} Z(H_{R[W\xi]}) \cong \bigoplus_{(\xi)\in C_G} Z(R[W\xi])$$

$$\overset{\sim}{\swarrow}$$

$$\bigoplus_{(\xi)\in C_G} \bigoplus_{b\in Bl(W\xi)} e_b\cdot Z(R[W\xi])$$

上の補題により, $cpi(R\otimes S_p(S_f{}^G))$ は, 定理 C の $E^p_{\xi,b}$ の形の $Z(K\otimes S_p(S_f G))$ の元の和であることがわかる.

<u>補題</u>. $\gamma: k\otimes\Omega(G) \longrightarrow Z(k\otimes S_p(S_f{}^G))$

$$[A] \longmapsto \gamma(A) = (\gamma(A)(X))_{X\in S_f{}^G},$$

$$\gamma(A)(X) = [pr, pr]: X \xleftarrow{pr} A\times X \xrightarrow{pr} X$$

は ring hom で mono.

$e_{G,\xi}$ や $e^p_{G,\xi}$ の γ による像が定理 A の E_ξ や E^p_ξ である.

<u>定理 3</u>. $|G|_{p'}^{-1}\in k$, $\xi = O^p(\xi)\le G$ のとき, Brauer functor によって,

$$E^p_\xi\cdot(k\otimes S_p(S_f{}^G)) \cong E^p_1\cdot(k\otimes S_p(S_f{}^{W\xi})).$$

さて, 定理 C を証明するには, $|cpi(E^p_\xi\cdot(R\otimes S_p(S_f{}^G)))| \geqq |Bl(W\xi)|$ を示せばよい. 定理 3 より, $\xi = 1$ の場合に証明す

れば良い. "既約 $E_1^p(F\otimes S_p(S_f^G))$-module" とは F 上のコホモロジー的 G-functor のことであり, c_{FG} がコホモロジー的 G-functor に作用するから, 既約 $E_1^p(F\otimes S_p(S_f^G))$-module は $|Bl(G)|$ 個のブロックに分割される. これより, $cpi(E_1^p(R\otimes S_p(S_f^G)))$ $= cpi(E_1^p(F\otimes S_p(S_f^G))) = |Bl(G)|$ となり定理Cが示される.