

有限群の自己同型と指標について

兵庫教大 松山 廣 (Hiroshi Matuyama)

$G$  を有限群,  $\alpha$  を  $G$  の自己同型とし,  $\Gamma = G \langle \alpha \rangle$  (半直積) とおく。又  $H = G(\alpha)$  とし,  $h_1 = 1, h_2, \dots, h_\alpha$  を  $H$  の共役類の代表系とする。さらに,  $X(h_i) = \{g'h_i: g' \in G\}$ ,  $i=1, 2, \dots, \alpha$ , とおく。特に  $X = X(h_1)$  とする。

定義  $G = \bigcup_{i=1}^{\alpha} X(h_i)$  のとき,  $\alpha$  を quasi-coprime automorphism of  $G$  とし (以下略して, q.c.a. と書く)。

q.c.a. については, 以下の事実が成立する。

(i)  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ ,  $\alpha_i$  を  $\alpha$  の  $P$  に於ける共役全体とする。  $\alpha$  が  $G$  の q.c.a. である条件は  $G\alpha = \bigcup_{i=1}^t G(\alpha_i)\alpha_i$  となることである。又  $\alpha = \alpha$  のとき, 和  $\bigcup_{i=1}^t G(\alpha_i)\alpha_i$  は disjoint sum となる。

(ii)  $\alpha$  の位数と  $H$  の位数が互いに素ならば,  $\alpha$  は q.c.a. である (逆は成立しない)。

(iii)  $\alpha$  を  $G$  の q.c.a. とすると, 次のことが成立する。

(1) 和  $\bigcup_{i=1}^{\alpha} X(h_i)$  は disjoint sum である。

(i)  $\langle \alpha^m \rangle = \langle \alpha \rangle$  とする  $\alpha^m$  も  $G$  の f.c.a. である。

(ii)  $H$  の 2 元が  $G$  で共役であるならば,  $H$  で共役である。

さて  $\text{Irr}_n(G)$  が  $G$  の複素既約指標の  $\mathbb{C}$ -不変系全体の基底集合を表すとする。今,  $\text{Irr}_n(G) = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_\rho\}$  とおく。Brauer により,  $\beta$  は  $\mathbb{C}$ -不変系  $G$  の共役類の個数と一致する。 $\alpha$  が f.c.a. のとき,  $\alpha = \beta$  が示される。

定義  $\chi \in \text{Irr}_n(G)$  の  $p$  上の拡張  $\chi^*$  と  $\langle \alpha \rangle$  の生成元  $\alpha^m$  によって定まる  $H$  上の類関数  $\chi(\chi^*, \alpha^m)$  を  $\chi(\chi^*, \alpha^m)(h) = \chi^*(h\alpha^m)$  ( $h \in H$ ) で定義する。

定義  $\alpha = \beta$  と仮定する。  $\text{Irr}_n(G)$  から  $\text{Irr}_2(H)$  への bijection  $\pi$  が次の条件を満たすとき, Glauberman 対応 (w.r.t.  $\alpha$ ) という。「 $\chi \in \text{Irr}_n(G)$  とする。  $\chi$  の任意の  $p$  上の拡張  $\chi^*$  に対して  $\chi(\chi^*, \alpha)$  は,  $\pi(\chi)$  のスカラー (0 でない) 倍である。」

Glauberman は [1] で,  $|N| \geq |G|$  が素数とき (本質的に,  $|N| \geq |H|$  が素数とき) Glauberman 対応の存在を示した。しかし, Glauberman 対応の成り立つ自己同型は次の様に特徴づけられる。

定理 A.  $\alpha$  が  $G$  の f.c.a. である条件は Glauberman 対応が存在することである。

さらに [1] で示された (作用群が巡回群の場合の結果のほとんどが),  $\alpha$  が f.c.a. であるという仮定のもとで成り立つ。

定理 B.  $\Omega \in G$  の f.c.d. とする。  $\pi$  を Galois 対応とし  $\pi(\lambda_i) = \theta_i, i=1, 2, \dots, \alpha$  とおくと次のことが成り立つ。

(i)  $\lambda_i$  の  $P$  の拡張  $\lambda_i^*$  が、  $\langle \Omega \rangle$  の生成元の系  $\theta$  集合上  $\theta$  一定値  $\varepsilon_i(\theta; \nu)$  をとるものが一意に存在する、ここで  $\varepsilon_i$  は  $|\Omega|$  が奇数ならば  $|\Omega|$  が偶数ならば 1 である、  $i=1, 2, \dots, \alpha$ 。

各  $\lambda_i \in \text{Irr}_\Omega(G)$  に対して、 (i) により一意に定まる  $P$  の拡張  $\lambda_i^*$  を canonical extension と呼ぶことにする。

(ii)  $\chi(\lambda_i^*, \Omega^m)$  は  $\pi(\lambda_i)$  の (0 でない) スカラー値である。但し、  $\Omega^m$  は  $\langle \Omega \rangle$  の生成元で、  $\lambda_i^*$  は  $\lambda_i$  の拡張とする。

(iii)  $\Omega$  の位数が素数  $P$  の中とすると、

$$[\lambda_i|_H, \theta_j]_H \equiv \delta_{ij} \varepsilon_i \pmod{P}, \quad 1 \leq i, j \leq \alpha$$
 である。但し、  $\delta_{ij}$  は Kronecker の記号、  $\varepsilon_i$  は (i) で定まるもの。

(iv)  $\lambda_i(\nu)$  は  $t(\theta_i; \nu)$  を割り切る、  $i=1, 2, \dots, \alpha$ 。但し、  $t = |G:H|$

(v)  $\lambda_i^*$  を  $\lambda_i$  の Canonical extension とし、  $R_i^*$  を  $\lambda_i^*$  を与える  $P$  の表現とすると、  $R_i = R_i^*|_G$  とおくと、  $i=1, 2, \dots, \alpha$ 。このとき、

$$R_i(\hat{\chi}) = \varepsilon_i t(\theta_i; \nu) / \lambda_i(\nu), \quad R_i^*(\Omega), \quad i=1, 2, \dots, \alpha.$$

が成り立つ。但し、  $\hat{\chi} = \sum_{\chi \in \chi} \chi \in \mathbb{C}[G]$  である。

(注意) 定理 B の (v) で定義した Canonical extensions は、 Galoisman [1] の意味での Canonical extensions とは必ずしも一致しないが、  $\Omega$  の位数が奇数で、  $|H|$  が素数の場合  $\Omega$  の位数が素数のときは一致することが示される。

$G$  の既約指標  $\chi$  の  $\Omega$ -不変かどうかは、次の系 C により判定できる。

系 C.  $\chi \in G$  の既約指標とする。  $\chi$  が  $\Omega$ -不変となる条件は、  $\chi(\Omega) \neq 0$  となることである。(組 1. の体  $G$  の  $\mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$  とする)

以上の証明は [2] で発表する予定です。

[1]. G. Glauberman; *Correspondences of characters for relatively prime operator groups*, *Canad. J. Math.* 20 (1968) 1765-1788.

[2] H. Matsuyama; *Quasi-co-prime automorphisms and the Glauberman correspondence of finite groups*, preprint.