

一様な *Shear Flow* における流体力学的ゆらぎについて

名大 工 後藤 俊幸

(Gotoh Toshiyuki)

§1. はじめに

熱平衡系におけるゆらぎの性質については、線形不可逆過程の統計力学においてよく知られているところである。しかしながら、非平衡定常状態における熱的ゆらぎの性質については、最近、その研究が始まったばかりでありあまりよく知られていない。通常、非平衡定常状態は外部から巨視的なスケールで駆動されていることに特徴がある。この点に関連し、長距離相関をもつゆらぎが、体系を特徴づけているパラメータとどのように関連しているのか、また、その空間及び時間に関する対称性はどのようになっているのかということは、興味ある問題である。この問題に対して、さまざまなアプローチの方法がとられてきているが、大別して二つの方法がある。一つは、分子論的な考察、即ち、*Hamiltonian* から出発してゆく方法である¹⁾。もう一つは、半微視的方法、即ち、あ

る現象論的な式を仮定し、それに分子的混沌を表わす *random force* を付け加えた、一種のランジュバン方程式を仮定する方法（我々はこの方法を広義の *Fluctuating-Hydrodynamics* と呼ぶ）がある。²⁾ ここでは、後者の方法を用いて、一様でかつ定常な *Shear Flow* 中の速度ゆらぎの相関について議論する。

§2 基礎方程式

ここでは、任意の定常な流れ場が存在したとして、そのまわりの熱的ゆらぎについて考察する。まず、基礎となる方程式は次の様に与えられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0 \quad (1-a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla P + \sigma_{ik} \delta_{ik} \quad (1-b)$$

$$\rho T \left[\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) S \right] = -\alpha_k Q_k + 2\sigma_{ik} e_{ik} \quad (1-c)$$

ここに、

$$\sigma_{ik} = \mu \left[2e_{ik} - \frac{2}{3} d_{ik} \operatorname{div} \mathbf{V} \right] + \zeta d_{ik} \operatorname{div} \mathbf{V} \quad (2-a)$$

$$e_{ik} = \frac{1}{2} (\alpha_i V_k + \alpha_k V_i) \quad (2-b)$$

$$Q_k = -K \alpha_k T \quad (2-c)$$

であり、 ρ ; 密度, \mathbf{V} ; 速度, P ; 圧力, μ ; ずり粘性率, ζ ; 体積粘性率, T ; 絶対温度, S ; 単位体積当りのエント

ローピー, k ; 熱伝導率である。

次に、いくつかの仮定を行う。

(I) 粘性による内部加熱は無視する。

(II) 流体は barotropic であるとする。即ち, $P = P(\rho)$

第IIの仮定より、(1-b) と (1-c) の間の Coupling がなくなり、状態方程式 $P = P(\rho)$ のみを考えればよいことになる。従って我々は、次の方程式系のみを考えれば充分である。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0 \quad (3-a)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{V} + \left(\zeta + \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{V} \quad (3-b)$$

$$dP = c^2 d\rho \quad (3-c)$$

ここに c は音速である。

次に、我々は(3) で表わされる体系の定常状態は、

$$\rho = \rho_0 = \text{const.}, \quad T = T_0 = \text{const.}, \quad S = S_0 = \text{const.} \quad (4-a, b, c)$$

でかつ (\mathbf{V}_0, P_0) は

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_0 = 0 \quad (4-d)$$

$$\rho_0 (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 = -\nabla P_0 + \mu \Delta \mathbf{V}_0 \quad (4-e)$$

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_B \quad \text{on Boundary} \quad (4-f)$$

を満たすものとする。

さて、我々は定常状態のまわりの熱的ゆらぎについて、さらに2つの仮定をおく。

(III) 熱的ゆらぎの大きさは、定常状態のそれに比べて充分小さく線形化でき、次の方程式を満たす。^{3,4)}

$$V = V_0 + \tilde{V}, \quad P = P_0 + \tilde{P}, \quad \rho = \rho_0 + \tilde{\rho} \quad (5-a, b, c)$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + \text{div}(\tilde{\rho} V_0 + \rho_0 \tilde{V}) = 0 \quad (6-a)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \left[\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + (V_0 \cdot \nabla) \tilde{V} + (\tilde{V} \cdot \nabla) V_0 \right] + \tilde{\rho} \cdot (V_0 \cdot \nabla) V_0 \\ = -\nabla \tilde{P} + \mu \Delta \tilde{V} + \mu D \nabla \text{div} \tilde{V} + \tilde{V} \tilde{\mathcal{S}} \end{aligned} \quad (6-b)$$

$$\tilde{P} = c^2 \tilde{\rho} \quad (6-c)$$

$$\tilde{V} = 0 \quad \text{on Boundary} \quad (7)$$

$$D \equiv \frac{\zeta}{\mu} + \frac{1}{3} \quad (8)$$

ここに \sim はゆらぎを表わす。

(6)は Onsager の regression hypothesis⁵⁾ の一般化である。

(6-b) に $\tilde{\mathcal{S}}$ なる項が新しくつけ加わっているが、これは、熱的ゆらぎを表わし、ランダムストレステンソルと呼ばれるものである。この統計的性質を与えるのが、第IVの仮定である。

(IV) $\tilde{\mathcal{S}}$ の統計的性質は、

$$\langle \tilde{S}_{ij}(x, t) \rangle = 0 \quad (9-a)$$

$$\langle \tilde{S}_{ij}(x_1, t_1) \tilde{S}_{ke}(x_2, t_2) \rangle = 2k_B T \mu C_{ijkl} d(x_1 - x_2) \delta(t_1 - t_2) \quad (9-b)$$

$$C_{ijkl} = d_{ik} d_{jl} + d_{il} d_{jk} + (D-1) d_{ij} d_{ke} \quad (9-c)$$

で与えられるとする。

ただし、 k_B ; ボルツマン定数であり、 $\langle \rangle$ は、定常状態のまわりの熱的ゆらぎのアンサンブルに対して統計平均をとるものとする。

さて、規格化を次のように行う。

$$t/(L^2/\nu) \rightarrow t, \quad x/L \rightarrow x, \quad v/\nu_0 \rightarrow v, \quad P/(\mu\nu_0/L) \rightarrow P$$

$$\tilde{S}_{ij}/(\beta \frac{\mu\nu_0}{L}) \rightarrow \tilde{S}_{ij}, \quad P/\rho_0 \rightarrow P, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad R = \frac{\nu_0 L}{\nu}$$

$$M = \frac{\nu_0}{c}, \quad \beta = \frac{1}{\nu_0} \sqrt{\frac{2k_B T}{\rho_0 L^3}}$$

結局、方程式 (5)~(9) は次の様になる。

$$v = v_0 + \beta \tilde{v}, \quad P = P_0 + \beta \tilde{P}, \quad \rho = 1 + \beta \tilde{\rho} \quad (10-a, b, c)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{div } v_0 = 0, \quad R(v_0 \cdot \nabla) v_0 = -\nabla P_0 + \Delta v_0 \\ v_0 = v_B \quad \text{on Boundary} \end{array} \right. \quad (11-a, b) \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + R \text{div} (\tilde{\rho} v_0 + \tilde{v}) = 0 \quad (13-a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + R \{ (v_0 \cdot \nabla) \tilde{v} + (\tilde{v} \cdot \nabla) v_0 \} + R \tilde{\rho} (v_0 \cdot \nabla) v_0 \\ = -\nabla \tilde{P} + \Delta \tilde{v} + D \cdot \nabla \cdot \text{div} \tilde{v} + \nabla \tilde{S} \end{aligned} \quad (13-b)$$

$$\tilde{p} = \frac{R}{M^2} \tilde{\rho} \quad (13-c)$$

$$\tilde{v} = 0 \quad \text{on Boundary} \quad (14)$$

$$\langle \tilde{S}_{ij}(X, t) \rangle = 0 \quad (15-a)$$

$$\langle \tilde{S}_{ij}(X_1, t_1) \tilde{S}_{ke}(X_2, t_2) \rangle = C_{ijked} \delta(X_1 - X_2) \delta(t_1 - t_2) \quad (15-b)$$

§3 グリーン関数

フーリエ変換を

$$f(X, \omega) = \mathcal{F}[f(X, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(X, t) e^{-i\omega t} dt \quad (16)$$

で定義する。そして、(13), (14) に対するグリーン関数及び、(13), (14) に対する随伴グリーン関数を定義する。

$$G_i^j(X, X', \omega) \equiv \begin{pmatrix} \rho_j(X, X', \omega) \\ p_j(X, X', \omega) \\ G_{ij}(X, X', \omega) \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$L_i^k G_k^j = \Pi^j(X - X') \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_{ij} \delta(X - X') \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$G_{kr}^j(X, X', \tau) = 0 \quad \text{for } \tau < 0 \quad (19)$$

$$G_{ij}(X, X', \omega) = 0 \quad X \text{ on Boundary} \quad (20)$$

ここに、 $\tau = t - t'$ であり、

$$L_i^k \equiv \begin{pmatrix} i\omega + R V_e^0 \partial_e, & 0, & R \partial_k \\ 1, & -\frac{M^2}{R}, & 0 \\ R V_e^0 \partial_e V_i^0, & \partial_k, & (i\omega - \Delta) \delta_{ik} - D \partial_i \partial_k \\ & & + R [V_e^0 \partial_e \delta_{ik} + \delta_{ke} (\partial_e V_i^0)] \end{pmatrix} \quad (21)$$

である。また、

$$G_i^{+j}(X, X', \omega) \equiv \begin{pmatrix} \rho_j^+(X, X', \omega) \\ P_j^+(X, X', \omega) \\ G_{ij}^+(X, X', \omega) \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$L_i^{+k} G_k^{+j} = \Pi^j (X - X') \quad (23)$$

$$G_k^{+j}(X, X', \tau) = 0 \quad \text{for } \tau < 0 \quad (24)$$

$$G_k^{+j}(X, X', \omega) = 0 \quad X \text{ on Boundary} \quad (25)$$

$$L_i^{+k} \equiv \begin{pmatrix} i\omega - R V_e^0 \partial_e, & 1, & R V_e^0 \partial_e V_i^0 \\ 0, & -\frac{M^2}{R}, & -\partial_k \\ -R \partial_k, & 0, & (i\omega - \Delta) \delta_{ik} - D \partial_i \partial_k \\ & & -R [V_e^0 \partial_e \delta_{ik} - \delta_{ik} (\partial_e V_k^0)] \end{pmatrix} \quad (26)$$

である。

$G_{ij}(X, X', \omega)$ と $G_{ij}^+(X, X', \omega)$ に対しては次の相反関係が成り立つ。

$$G_{ij}(X, X', \omega) = G_{ji}^+(X', X, \omega) \quad (27)$$

§4 速度ゆらぎの二時刻相関

相関関数に対する一般式を求めるために、まず、速度ゆらぎ $\tilde{V}(X, \omega)$ に対する形式解を求めよう。(13), (14) 及び G^+ に対する式 (23), (25) より、次式を得る。

$$a_k \equiv (\tilde{p}, \tilde{p}, \tilde{V}_k) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} G_i^{+j}(1, 2, \omega) L_i^k a_k(1, \omega) - a_i(1, \omega) L_i^{+k} G_k^{+j}(1, 2, \omega) \\ = G_i^{+j}(1, 2, \omega) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_k \tilde{S}_{ik}(1, \omega) \end{pmatrix} - a_i(1, \omega) \Pi^j(1-2) \end{aligned} \quad (29)$$

(29)式を X_2 で流体の体積全体にわたり積分し、境界条件を用いると $\tilde{V}(X, \omega)$ に対する解の表式が得られる。

$$\tilde{V}_i(X, \omega) = \int G_{kji}^+(X', X, \omega) \alpha'_k \tilde{S}_{ke}(X', \omega) dX' \quad (30-a)$$

又は(27)を用い

$$= \int G_{ikj}(X, X', \omega) \alpha'_k \tilde{S}_{ke}(X', \omega) dX' \quad (30-b)$$

としてもよい。

さて、ここで速度ゆらぎの二時刻相関

$$\Phi_{ij}(X; t | X', t') \equiv \langle \tilde{V}_i(X, t) \tilde{V}_j(X', t') \rangle \quad (31)$$

を考える。(13)式から明らかのように V_0 は定常な流れ場であるから $\tilde{V}(X, t)$ は定常な確率過程である。従って ϕ_{ij} は $t-t'$ を通してのみ時間に依存し、その $t-t'$ に関するフーリエ変換は

$$F[\phi_{ij}(X, X' | t-t')] = 2\pi Q_{ij}(X, X', \omega) \delta(\omega + \omega') \quad (32)$$

と表わされる。(30-b), (15-b) を用いると結局

$$Q_{ij}(1, 2, \omega) = \int_{3,4} G_{ik}(1, 3, \omega) G_{je}(2, 4, -\omega) \alpha_m^3 \alpha_n^4 C_{emnd} \delta(3-4) d^3 d^4$$

となる。ここに 3, 4 は、 X_3, X_4 を意味する。この後(20), (23), (25), そして(27)を用い若干の計算の後

$$\begin{aligned} Q_{ij}(1, 2, \omega) = & \frac{1}{2} [G_{ij}(1, 2, \omega) + G_{ij}^\dagger(1, 2, -\omega)] \\ & - R \int G_{ip}(1, 3, \omega) E_{pe}^0(3) G_{ej}^\dagger(3, 2, -\omega) d^3 \\ & - M^2 R \int [G_{ik}(1, 3, \omega) F_k^0(3) \rho_j^\dagger(3, 2, -\omega) \\ & + \rho_i(3, 1, \omega) F_k^0(3) G_{kj}^\dagger(3, 2, -\omega)] d^3 \end{aligned} \quad (33)$$

を得る。ここに

$$E_{pe}^0 = \frac{1}{2} [\alpha_e V_p^0 + \alpha_p V_e^0], \quad F_k^0 = \frac{1}{2} \alpha_e (V_e^0 V_k^0) \quad (34)$$

である。一方向のみの流れの場合には(33)式の第3項は自動的に0となる。以下、任意の流れ V_0 に対し $M \rightarrow 0$ の極限を

考えることにしよう。

$R=0$ の場合、 $G_{ij} = G_{ij}^+$ であることが容易に示され、
(34) は、

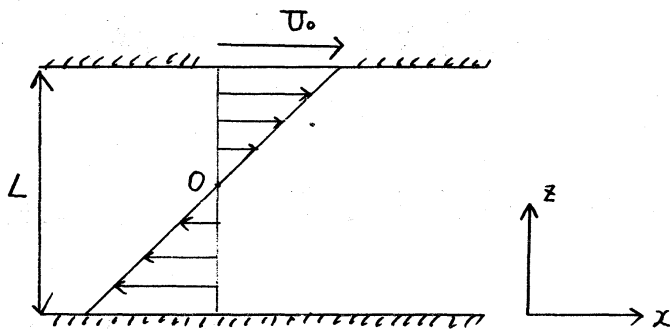
$$Q_{ij}(1,2,\omega) = \text{Real part of } [G_{ij}^{(0)}(1,2,\omega)] \quad (34)$$

となり熱平衡系の場合に一致する。^(7,8) G_{ij}^0 は非定常ストークス源である。今、無限領域を考えると、 x に関してフーリエ変換した形で

$$Q_{ij}^{(0)}(k,\omega) = (d_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) \frac{k^2}{k^2 + \omega^2} \quad (35)$$

と表わせる。この特徴は等方的であり、かつ ω に関して偶関数であることである。これは、 t の反転に対して相関関数が不変であることを示している。

さて、次に、一様でかつ定常な Shear flow がある場合について考えよう。



この場合、 v_0 は

$$v_0(x) = z e_1 \quad (36)$$

$$-\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}$$

Fig. 1.

で与えられる。今、原点と他の点、 X での速度相関を考える。

$$\phi_{ij}(X, t) \equiv \langle \tilde{v}_i(X, t) \tilde{v}_j(0, 0) \rangle$$

ϕ_{ij} は (33) より G_{ij} 及び G_{ij}^+ を用いて表わせるが、 G_{ij} に例をとって考えるならば

$$G_{ij} = I_{ij} + W_{ij}$$

と書ける。ここに I_{ij} は無限流体中でのグリーン関数であり、 W_{ij} は壁からの reflection である。今、 W_{ij} は無視して考えることにしよう。さらに、 $R \ll 1$ の時、 I_{ij} について、Regular な摂動展開が可能として話をすすめる。(この妥当性は後で議論する)。少々長い、しかし単純な計算の後、 R の1次のオーダーまでとった近似では、 Q_{ij} に対し次の様な表現を得る。

$$\begin{aligned} Q_{ij}(lk, \omega) = & P_{ij}(lk) \frac{k^2}{k^4 + \omega^2} \\ & - \frac{R}{2} A_{ij}(lk) \frac{2k^4}{(k^4 + \omega^2)^2} \\ & + \frac{R}{2} \left[B_{ij}(lk, \omega) + D_{ij}(lk) + 2P_{ie} \frac{C_{pe} k_i k_j}{k^2} \right] \\ & \times \frac{2i k^2 \omega}{(k^4 + \omega^2)^2} + O(R^2) \end{aligned} \quad (37)$$

ここに $C_{pe} = \delta_{p_1} \delta_{e_3}$ であり

$$P_{ij}(k) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad A_{ij} = A_{ji}$$

$$B_{ij} = B_{ji}, \quad B_{ij}(\omega) = B_{ij}(-\omega), \quad D_{ij} = -D_{ji}$$

である。

この場合、(35)と大きく異なる点は、 R の1次のオーダーで、 ω に関する奇関数の部分が出てくることである。即ち、相関関数は t の反転に対して対称ではなくなるということであり、これは系の空間的対称性と深く結びついている。このことをより具体的に見るために、特に次のような相関について考えてみよう。

$$\phi_{ij}(x, y, 0, t) = \langle \tilde{V}_i(x, y, 0, t) \tilde{V}_j(0; 0) \rangle$$

は簡単な計算の後に

$$= \begin{pmatrix} \text{even} & \text{even} & \times \\ \text{even} & \text{even} & \times \\ \times & \times & \text{even} \end{pmatrix} \quad (38)$$

であることが示せる。

ここに even は t の反転に対し ϕ_{ij} が偶であることを示し、 \times 印は対称性がないことを示している。

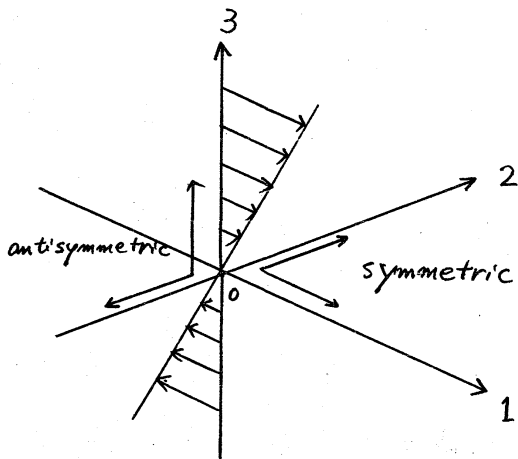


Fig. 2.

(38) と左図からもわかる様に、同一平面内 (x, y 平面) にある速度成分の間には対称性があり、 x, y 平面内の一成分と、 z 成分との相関は、対称性が破れている。これは、 z 方向に一様な *dissipative*

current ($-\mu \nabla_3 V_i^0$) が存在することにより生じたもので、体系に外部より加えられた駆動力が、速度ゆらぎの相関関数の空間的対称性をこわすとともに、時間反転対称性をもこわしていることがわかる。

さて、最後に *regular* な摂動展開の可能性について考える。グリーン関数 (あるいは随伴グリーン関数) は、 $M=0$ の時次式を満たす。

$$i\omega G_{ij} + 2iP_j - \Delta G_{ij} = -R \partial_k [C_{ke} x_e G_{ij} + C_{ie} x_e G_{kj}] + d_{ij} \delta(x-x') \quad (39)$$

今、スケールリングを行う。

$$\tilde{x} = R^{1/2} x, \quad \tilde{\omega} = R^{-1} \omega$$

$$G = R^{1/2} \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{\omega}), \quad P = R \tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{\omega}) \quad (40)$$

すると (39) は,

$$\begin{aligned} i\tilde{\omega} \tilde{G}_{ij} + \tilde{\alpha}_i \tilde{P}_j - \Delta \tilde{G}_{ij} \\ = -\tilde{\alpha}_k [C_{ke} \tilde{\alpha}_e \tilde{G}_{ij} + C_{ie} \tilde{\alpha}_e \tilde{G}_{kj}] + d_{ij} \delta(\tilde{x} - \tilde{x}') \end{aligned} \quad (41)$$

となる。したがって、 $|\tilde{x}| = O(R^{1/2})$, $\omega = O(R)$ の領域 (粘性項も慣性項も重要となる Oseen 領域) で上記の摂動展開は意味を失う。しかし、境界の存在により事情は多少異なって来る。以下、2つの場合について考えてみよう。

(I) $R \ll 1$.

$O(R^{-1/2}) \gg 1$ であるから、境界は Stokes 領域 (慣性項に比べて粘性項が重要になる領域) 内にある。(Fig. 3-a)

この場合には、Green 関数の壁による reflection W_{ij} を考えれば、上の摂動展開は有効であり、従って壁の存在は本質的である。

速度ゆらぎの同時刻相関は,

$$\langle \tilde{V}_i(t) \tilde{V}_j(t) \rangle_{|k} = \int Q_{ij}(|k, \omega) d\omega \quad (42)$$

で与えられ、(37) より

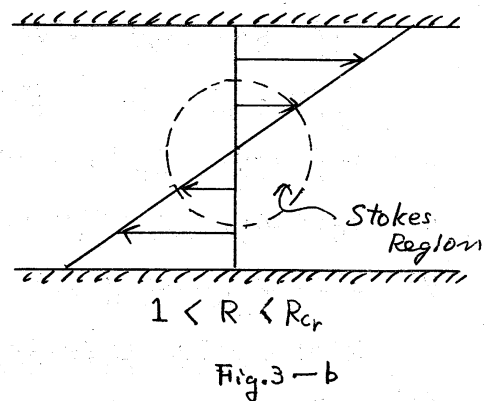
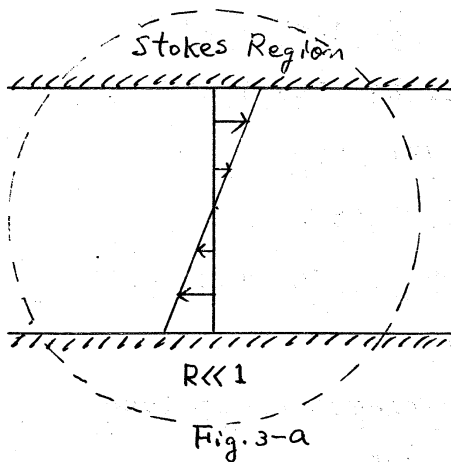
$$\begin{aligned} \langle \tilde{V}_i(|k, t) \tilde{V}_j(0, t) \rangle &= d_{ij} \delta(|k|) + R \cdot O\left(\frac{1}{r}\right) \\ &+ (\text{wall correction}) + O(R^2) \end{aligned} \quad (43)$$

となることがわかる。 R の1次のorderが $\frac{1}{R}$ の長距離相関が存在することは、平衡系と大きく異なる点である。^{2,10,11)}

壁の効果については他の機会に譲りたい。

(II) $1 < R < R_{cr}$

ここに R_{cr} は、定常流 V_0 が乱流の遷移する臨界レイノルズ数である。 $R^{-1/2} \ll 1$ であるから Stokes Region は流れの領域内に閉じ込められる。(Fig. 3-b) 無論、この場合には(39)の厳密解が必要となり、従って、壁の効果よりも慣性の効果の方がより重要となる。しかし、厳密解を求めることは困難で、今のところ解析的な解を得ることは成功していない。



§5 まとめ

我々は、任意の定常な流れ場における速度ゆらぎの二時刻相関に対する表式(33)を得た。これを用いて、一様で定常な Shear flow 中での速度ゆらぎの相関を求めた。その結果、

$O(R)$ で ω の奇関数部分が表われ、これは相関関数の時間反転対称性の破れを意味し、また、*dissipative current* の存在と結びついているのを見た。

さらに、摂動展開の可能性を吟味することにより、境界の存在と対流項が、レイノルズ数により異なった形で速度ゆらぎに影響を与えることがわかった。

References

- 1) I.Procaccia et al. Phys.Rev. 19 (1979) 1290
- 2) G.Van Der Zwan, D.Bedeaux and P.Mazur
Physica 107A (1981) 491
A.M.S.Tremblay, M.Arai and E.D.Siggia
Phys.Rev. 23 (1981) 1451
- 3) R.F.Fox Suppl.Prog.Theor.Phys. 64 (1978) 425
- 4) J.Keizer Phys. Fluids 21 (1978) 198
- 5) L.Onsager Phys.Rev. 38 (1931) 2265
- 6) T.Gotoh and Y.Kaneda J.Chem.Phys. 76 (1982) 3193
- 7) E.M.Lifshitz and L.P.Pitaevskii
Statistical Physics part 2 Pergamon Press 1980
- 8) R.B.Jones Physica 105A (1981) 395
- 9) R.G.Cox and H.Brenner Chem.Eng.Sci. 23 (1968) 147
- 10) A.Onuki J.Stati.Phys. 18 (1978) 475
- 11) J.Machta and I.Oppenheim Phys.Rev. 22 (1980) 2809