数理解析研究所講究録
478巻 1983年 160-166

不動点定理と一般均衡理論：最近の発展

東京都立大学　西村和雄
Kazuo Nishimura

(1) はじめに

以下では、簡単化の為に純粋交換モデルを用いることにする。p, x, w^i を価格、それぞれ n 次元の消費量、初期保有量ベクトルとする。i 消費者は、quasi-concave で continuous な効用関数 $u(x)$ を最大化する問題

$$\mathrm{Max}\ u^i(x)$$

$$\text{s.t.}\quad px \leqq p\cdot w^i$$

$$x \geqq 0$$

を解いて、需要 $x^i(p)$ を定める。消費者全体について、$x^i(p)$ $-w^i(p)$ の総和をとると超過需要

$$z(p) = \sum_i x^i(p) - \sum_i w^i(p)$$

が得られる。p が与えられると $z(p)$ は、一般に凸集合となる。また

(i)　Walras' law　$p\cdot z(p) = 0$

(ii)　Homogeneity of degree zero　$z(\lambda p) = z(p)$, $\lambda > 0$

が満たされる。ここで均衡価格、即ち

$$z(p) \leqq 0$$

をみたす価格の存在を証明する為に角谷の不動点定理を用いるというのが従来の方法であった。

（２） 選好関係

Rを

$$u(x) \geq u(y) \iff xRy$$

と定義することにして，効用関数で表わされる選好関係の性質をとり出してみると

① Completeness　xRy or yRx

② transitivity　xRy & $yRz \Rightarrow xRz$ が任意の (x, y) あるいは (x, y, z) について成り立つ。

更に効用関数の quasi-concavity と continuity は，

(i)　$R(x) = \{y \mid yRx\}$ が閉集合

(ii)　$R^{-1}(x) = \{y \mid xRy\}$ が閉集合

(iii)　$R(x)$ が凸集合

を意味する。

（３） 一般化

効用関数を用いずに 直接選好関係から出発する接近方法をとることによって，上記の①②，(i)−(iii)を弱めてゆこう。いま X を財の空間として，$x, y \in X$ に対し xRy ならば x は y より選好されるか無差別であるとする。また，xRy の否定すなわち $\sim xRy$ が成り立つとき，yPx と書く。R の completeness を仮定せずに，X の部分集合 B 上の maximal elementsの集合

$$M(B)=\{x\in B \mid \sim ypx \quad \forall y\in B\}$$

と定義する。このとき

(補題) 任意の $x\in X$ に対して、$p^{-1}(x)=\{y\in X \mid xpy\}$ が開集合で、Bがcompactで $B\neq\phi$ とする。このとき、Bの任意の有限集合 $\{x^1,\cdots\cdots,x^k\}$ が極大元をもつなら、$M(B)\neq\phi$ である。

<u>証明</u> $M(B)\neq\phi$ と仮定する。すると、任意の $x\in B$ と $p^{-1}(x)=\{y\in X \mid xpy\}$ に対して

$$\bigcup_{x\in B}(p^{-1}(x)\cap B)=B$$

よって、ある有限個の $\{x^1,\cdots,x^k\}\subset B$ に対し

$$\bigcup_{i=1}^{k}(p^{-1}(x^i)\cap B)=B$$

となる。このとき、集合 $\{x^1,\cdots\cdots,x^k\}$ では、任意の i に対して、$x^i\in p^{-1}(x^j)$ なる j が存在し、極大元が存在しなくなる。

証明終り

いま、Rのtransitivityに代わる条件として、

③ acyclicity 任意の有限個の $\{x^1,\cdots\cdots,x^n\}$ に対して、

$$x^1px^2,\cdots\cdots,x^{n-1}px^n \Rightarrow \sim x^npx^1$$

④ asymmetry　　$xPy \Rightarrow \sim yPx$

⑤ irreflexivity　　$\sim xPx$

を考えてみよう。補題を基礎として，次の2個の結果が導出される。

<u>定理1</u>：（Bergstrom 1975）　任意の$x \in X$に対して，$P^{-1}(x)$が閉集合で，Bはcompact で$B \neq \phi$とする。このときPがacyclicity を満たすなら，$M(B) \neq \phi$である。

<u>定理2</u>：（Sonnenschein 1971）　Bが，compact な凸集合で$B \neq \phi$とする。任意の$x \in X$に対し，$P^{-1}(x)$は，閉集合，そして$P(x) = \{y \in X \mid yPx\}$は，凸集合とする。このときPがasymmetry を満たすなら，$M(B) \neq \phi$である。

定理2は，次のKy-Fan（1961）の定理と比較できる。

<u>定理3</u>：（Ky-Fan 1961）　Xをlinear topological space のcompact，convex なnon-empty subset，そして$A \subset X \times X$とする。任意の$x \in X$に対して

(1)　$\{x \in X \mid (x, y) \in A\}$は閉集合，

(2)　$(x, x) \in A$

(3) $\{y \in X \mid (x, y) \notin A\}$ は、凸集合

が成り立つ。このとき、ある $y^0 \in X$ が存在して、$y^0 \times X \subseteq A$ である。

さて、P の irreflexivity のみを仮定したものとして、次の結果が知られている。以下で、P が lower semi-continuous ($l.s.c$) とは、"任意の $x \in P(y)$ なる $(x, y) \in X \times X$ 及び、$y^n \to y$ なる点列 $\{y^n\} \subset X$ に対して、ある点列 $\{x^n\} \subset X$ が存在して、$x^n \in P(y^n)$ かつ $x^n \to x$ となる" という意味である。

定理4: (Mas-Colell) P は、$l.s.c$ で、任意の $x \in X$ に対し $P(x)$ は凸集合となる。また B は、compact convex で、$B \neq \phi$ である。このとき P が irreflexive ならば、$M(B) \neq \phi$ となる。

証明 任意の $y \in B$ に対して

$$P(y) \cap B \neq \phi$$

とする。すると $F: y \to P(y) \cap B$ に対して、$F(y) \neq \phi$, $F(y)$ は、凸集合そして F 自身は $l.s.c$ となる。よって、Michael (1956) の selection 定理によって、連続関数 f に

$B \to B$で、$f(y) = P(y) \cap B$ をみたすものが存在する。このとき、不動点定理によって

$$y^* = f(y^*) \in P(y^*) \cap B$$

をみたす $y^* \in B$が存在する。これは

$$y^* \, P \, y^*$$

を意味して、Pの irreflexivity と矛盾する。よって、

$$P(y) \cap B = \phi$$

が、ある $y \in B$ について成立しなければならない。

証明終り

(4) おわりに

以上は、compact 集合上の極大点の存在に関する一般化であった。しかしこれを、一般均衡の存在に拡張することは難しくない(Mas-Colell 1974)。

参考文献

Bergstrom, T., "Maximal Elements of Acyclic Relations on Compact Sets," Journal of Economic Theory, vol. 10, 1975.

Ky Fan, "A Generalization of Tyconoff's Fixed Point Theorem," Math. Annalen, 1961.

Mas-Colell, A., "An Equilibrium Existence Theorem without Complete or Transitive Preferences," Journal of Mathematical Economics, vol. 2, 1974

Micheal, E., "Continuous Selection I," Annals of Math. vol. 63, 1956.

Sonnenschein, H., "Demand Theory without Transitive Preferences with Applications to the Theory of Competitive Equilibriums," Preferences, Ulility and Demand (ed. by J. Chipman et. al.) Harcourt Brace Jovanovich, 1971.