数理解析研究所講究録
478巻 1983年 133-159

不動点定理の現状

東工大 理 高橋 渉
Wataru Takahashi

Xをある与えられた集合とし，TをXからXへの写像とするとき，$Tx_0=x_0$ なる点x_0をTの不動点という。これを拡張してTをXから2^X（Xの部分集合の全体）への写像とするとき，$x_0\in Tx_0$ なる点x_0をやはりTの不動点と呼ぶ。不動点に関する定理がいわゆる不動点定理であり，それは形が単純であるが故に応用範囲も広く種々の分野で有効に用いられている。ここでは非線形数学の発展に伴い，最近特にその重要性を増しつつある不動点定理とその周辺について論じてみたいと思う。

まず第1節ではBrowderの集合値写像に対する不動点定理をBrouwerの不動点定理と単位の分割定理を用いて証明し，これを基にSchauderやTychonoffの不動点定理の拡張を得る。第2節では不動点定理から得た1つの有用な存在定理を用いて凸不等式系の解の存在の問題とmini-max定理を議論する。第3節では数理計画やゲームの理論，経済均衡問

題等によく出てくる変分不等式と相補性問題の定理が証明される。ここではまず初めに有限次元Banach空間における変分不等式の定理が証明され，そのあとreflexive Banach空間においてかなり一般的な形でその定理が得られる。第4節では凸不等式のシステムに関する定理と不動点定理を用いて函数解析学や計画数学で重要なHahn-Banachの定理や分離定理の一般化がなされる。特に分離定理の一般化は，これまでのいくつかの分離定理を統一するばかりか，かなり精密な形で証明されている。第5節ではベクトル値をとる線形不等式のシステムを考察する。ここでは線形不等式のシステムが解をもつための必要十分条件が示され，これを用いて最小ノルム問題が解決される。これを解く際第4節で証明された分離定理の一般化が重要な役割を演ずる。第6節では凸不等式あるいは線形不等式のシステムに関する定理を用いてHardy-Littlewood-Pólaの定理の拡張と凸ゲームにおけるSchmeidlerの結果を証明する。Hardy-Littlewood-Pólaの定理は$\mathbb{R}^n$におけるあるorderとDoubly stochastic行列との関係を示したものであるが，ここでは$\mathbb{R}^n$における結果をl^1空間と$L^1[0,\infty)$空間へ拡張しようというのである。

不動点定理がいろいろな形で研究され，どのように応用されているかを知っていただきたい。

§1. 不動点定理

まずよく知られているBrouwerの不動点定理と単位の分割定理を述べておこう。

Brouwerの不動点定理　Xをn次元ユークリッド空間R^nのコンパクトで凸な集合とし，TをXからXへの連続な写像とする。そのときXの中に不動点が存在する。

単位の分割定理　Xをコンパクトハウスドルフ空間とし，$\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$を$X$の開被覆とする。そのとき次の3つの条件を満たす$X$上の$n$個の実数値連続函数$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$が存在する。

(1)　$0 \leq \beta_i(x) \leq 1$，$x \in X$，$i = 1, 2, \cdots, n$

(2)　$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) = 1$，$x \in X$

(3)　$x \notin G_i$ ならば $\beta_i(x) = 0$　$(i = 1, 2, \cdots, n)$ である。

これらを用いて次の不動点定理[5]を証明する。

定理1 (Browder)　Xを線形位相空間（もちろんT_2は仮定する）のコンパクトな凸集合とする。Tを次の条件(1)と(2)を満たすXから2^Xへの写像とする。

(1)　任意の$x \in X$に対して，TxはXの空でない凸集合（Xの開集合）とする。

(2)　任意の$y \in X$に対して，$T^{-1}y = \{x \in X : y \in Tx\}$は$X$の開集合（$X$の空でない凸集合）とする。

そのとき $x_0 \in Tx_0$ なる点 $x_0 \in X$ が存在する。

証明 任意の $x \in X$ に対して，Tx は空でないことより，$\{T^{-1}y\}_{y \in X}$ は X の開被覆になる。X はコンパクトなので，その有限開被覆 $\{T^{-1}y_1, T^{-1}y_2, \cdots, T^{-1}y_n\}$ が存在する。単位の分割定理を用いて，この有限開被覆に対する単位の分割 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ を作り，X から X への写像 p を

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) y_i$$

で定義する。するとすべての $x \in X$ に対して $p(x) \in Tx$ である。いま X_0 を $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ によってはられる凸集合とするとこの X_0 は $\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸集合と同相になる。p は X_0 から X_0 への連続写像なので，Brouwer の不動点定理が使えて $x_0 = px_0 \in Tx_0$ なる $x_0 \in X$ を得ることができる。

これを用いて次の使いやすい定理を得ることができる[31]。

定理 2（Takahashi） X を線形位相空間のコンパクト凸集合とし，F を次の条件(1)，(2)，(3) を満たす $X \times X$ 上の実数値函数とする。

(1) $y \in X$ を固定したとき，x の函数 $F(x, y)$ は上半連続である。

(2) $x \in X$ を固定したとき，y の函数 $F(x, y)$ は quasi-convex である。

(3) すべての $x \in X$ に対して，$F(x, x) \geq c$ となるような

実数 c が存在する。

そのとき，すべての $y \in X$ に対して $F(x_0, y) \geq c$ となるような $x_0 \in X$ が存在する。

定理2と単位の分割定理を用いるとTychonoffの不動点定理の拡張である次の結果が比較的簡単に証明できる[32]。

定理3　X を局所凸な線形位相空間 E のコンパクトで凸な集合とする。T を X から E への連続写像とするとき，次の(1)あるいは(2)が成立する。

(1)　$Ty_0 = y_0$ なる $y_0 \in X$ が存在する。

(2)　$0 < p(x_0 - Tx_0) = \min_{x \in X} p(x - Tx_0)$ となるような点 $x_0 \in X$ と E 上の連続なセミノルム p が存在する。

T を X から X への連続写像とするなら(2)は成立しないから(1)が成立し，いわゆるTychonoffの不動点定理になる。定理2をノルム空間の場合に適用すると，定理3よりもっときれいな形の定理を得ることができる。

定理4　X をノルム空間 E のコンパクトな凸集合とし，T を X から E への連続写像とする。そのとき，

$$\| x_0 - Tx_0 \| = \min_{x \in X} \| x - Tx_0 \|$$

となる $x_0 \in X$ が存在する。

証明　$X \times X$ 上の関数 F を

$$F(x, y) = \| y - Tx \| - \| x - Tx \|$$

で定義する。すると F は定理2の(1)，(2)を満たし，さらに任意の $x\in X$ に対して $F(x,x)=0$ となる。よって定理2からすべての $y\in X$ に対して $\|y-Tx_0\|\geq\|x_0-Tx_0\|$ なるような $x_0\in X$ が存在する。

定理4において，T を X から X への連続写像とすると，$\min_{x\in X}\|x-Tx_0\|=0$ となり，$x_0=Tx_0$ となる。すなわちSchauderの不動点定理を得ることになる。定理3，定理4を証明した同じ手法によって，角谷の不動点定理の拡張であるFanの不動点定理も証明できる。

定理5　X を局所凸な位相線形空間 E のコンパクト凸集合とし，T を X から 2^X への upper semicontinuous な写像で，点 x を空でない閉で凸な集合 Tx にうつすとする。そのとき，$x_0\in Tx_0$ なる点 x_0 が存在する。

定理5は定理3，定理4と同様 T が X から 2^E の場合まで証明されているがここでは書かない。高橋[30]を参照せよ。

§2. System 定理と mini-max 定理

Fan[9]によって証明された次の凸不等式のシステムに関する定理は mini-max 定理やゲームのコアを研究する上で非常に重要である（酒巻－高橋[23]を参照）。

定理6　X を位相線形空間のコンパクトで凸な集合とし，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ を X 上で定義され，$(-\infty,\infty]$ に値をとる下半

連続で凸な函数とする。そのとき，次の条件(1)と(2)は同値である。

(1) n個の不等式のシステム $f_i(x) \leq c$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が解をもつ。

(2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ なる非負な数$\{\alpha_i\}$に対して，$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(y) \leq c$ なる $y \in X$ が存在する。

証明 (1)の解を(2)の解に使えばよいから(1)から(2)は明らかである。(2)から(1)を証明する。もし $f_i(x) \leq c$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が解をもたないとする。いま，$i=1,2,\cdots,n$ に対して

$$G_i = \{x \in X : f_i(x) > c\}$$

を定義すると，$\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ はXの開被覆になる。この開被覆に対する単位の分割を$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$とし，$X \times X$ 上の函数Fを

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) f_i(y)$$

とすると，Fは定理2の(1)，(2)を満たしており，さらにxの函数$F(x,x)$は下半連続であることより，すべてのxに対して $F(x,x) \geq c_0 > c$ なる実数c_0が存在する。そこで定理2が使えて，すべての$y \in X$ に対して $F(x_0, y) \geq c_0 > c$ となるx_0がXの中に存在する。すなわち $\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x_0) = 1$ となるような非負の数$\{\beta_i(x_0)\}$が存在して，すべての$y \in X$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x_0) f_i(y) > c$$

を得る。これは(2) $\Rightarrow$ (1)を意味する。

定理6は通常mini-max定理から証明されるものであるがここでは逆に定理6を用いて次の拡張されたmini-max定理を証明することができる。

定理7　Xを線形位相空間のコンパクトで凸な集合とし，Yを単なる集合とする。Fを$X \times Y$上の実数値函数で次の(1)と(2)の条件を満たすものとする。

(1)　$y \in Y$を固定したとき，xの函数$F(x, y)$は下半連続で凸である。

(2)　yの函数$F(x, y)$はconcavelikeである。

そのとき

$$\sup_y \min_x F(x, y) = \min_x \sup_y F(x, y)$$

が成立する。

証明の概略　$C = \sup_y \min_x F(x, y)$とし，$Y$の任意の有限集合を$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$とする。まず，定理7の仮定と定理6を用いて　$F(x, y_i) \leq C$　$(i=1, 2, \cdots, n)$が解をもつことが証明できる。そこでXのコンパクト性を用いて

$$F(x, y) \leq C\ , \quad y \in Y$$

が解をもつ。よって

$$\min_x \sup_y F(x, y) \leq \sup_y \min_x F(x, y)$$

であり，定理が証明されたことになる。

次にSionのmini-max定理を定理1を用いて証明しよう。

定理8　XとYを線形位相空間E_1とE_2のコンパクトな凸集合とする。Fを次の条件(1)と(2)を満たす$X\times Y$上の実数値函数とする。

(1)　$y\in Y$を固定したとき，xの函数$F(x,y)$は下半連続でquasi-convexである。

(2)　$x\in X$を固定したとき，yの函数$F(x,y)$は上半連続でquasi-concaveである。

そのとき，

$$\min_x \max_y F(x,y)=\max_y \min_x F(x,y)$$

が成立する。

証明　結論がいえないとしよう。すなわち，

$$\max_y \min_x F(x,y) < c < \min_x \max_y F(x,y)$$

としよう。いま$x\in X$と$y\in Y$に対して

$$A_x=\{y'\in Y : F(x,y')<c\}$$

$$B_y=\{x'\in X : F(x',y)>c\}$$

とし，$X\times Y$から$2^{X\times Y}$への写像を$T(x,y)=B_y\times A_x$で定義すると，Tは定理1の仮定を満たしているから，Tの不動点(x_0,y_0)が存在する。これは$c<F(x_0,y_0)<c$を意味し，矛盾である。

平野－高橋[13]は最近次のmini-max定理を得た。

定理９　E_1とE_2をreflexiveなBanach空間とし，XとYをそれぞれE_1，E_2の閉で凸な部分集合とする。もし$X\times Y$上の実数値函数Fが

(a)　$y\in Y$を固定したとき，xの函数$F(x,y)$は上半連続でconcaveである。

(b)　$x\in X$を固定したとき，yの函数$F(x,y)$は下半連続でconvexである。

を満たすならば，次の条件(1)と(2)は同値である。

(1)
$$\max_x \min_y F(x,y) = \min_y \max_x F(x,y)$$
が成立する。

(2)　任意の$(x,y)\in(\partial_X K\times L)\cup(K\times\partial_Y L)$に対して，常に$F(u,y)\geq F(x,v)$となる$i_X K\times i_Y L$の元$(u,v)$がとれるようなXとYの閉で有界，凸な部分集合KとLが存在する。

ここで$\partial_A B$はBのAに関する境界，$i_A B$はBのAに関する内点の全体を表す。

系　XとY，函数Fを定理９のようであるとしよう。そのとき，$x_0\in X$，$y_0\in Y$が存在して

$$(*)\qquad \lim_{\substack{\|x\|+\|y\|\to\infty\\(x,y)\in X\times Y}} \{F(x_0,y)-F(x,y_0)\}=\infty$$

なら$\min\max F(x,y)=\max\min F(x,y)$が成立する。

(*)の条件は通常coerciveと呼ばれるものである。

§3. 変分不等式と相補性問題

CをBanach空間Eの閉で凸な集合とし，TをCからE^*(Eの共役空間)への写像とする。そのとき

$$\langle Tx, u-x\rangle \geq 0, \quad u\in C$$

を満たすCの元xのことを変分不等式の解という。またCをclosed convex coneとし，C^*をCのpolar，すなわち

$$C^*=\{y\in E^*: \langle y, x\rangle\geq 0,\ x\in C\}$$

とするとき，CからE^*への写像Tに対して

$$Tx\in C^*,\ \langle Tx, x\rangle = 0$$

を満たすCの元xを相補性問題の解という。このような問題は数理計画，ゲームの理論等でしばしば現れるものであるが数学的にも大変興味深い問題である。

補助定理　Eを有限次元のBanach空間とし，BがEからEの共役空間E^*へのmonotoneでhemicontinuousな写像ならばBはE上で連続である。

この補助定理はKato[19]によって証明されている。次の補助定理は凸不等式のシステムに関する定理(定理6)と集合値写像の不動点定理(定理5)を用いて証明される。

補助定理　Eを有限次元のBanach空間とし，Kを凸でコンパクトなEの部分集合とする。AをEからE^*へのmonotone写像で$D(A)\subset K$を満たすものとし，BをEからE^*への1価

写像で monotone, continuous であるとするならば，そのとき

$$\langle u-x, Bx+v\rangle \geq 0, \quad (u,v)\in A$$

となるような $x\in K$ が存在する。

証明の概略　Eから 2^K への写像Tを，$y\in E$ に対して

$$Ty=\{x\in K;\ \langle u-x, By+v\rangle\geq 0, (u,v)\in A\}$$

で定義する。まずはじめに $f=By$ とおき，

$$\langle u-x, f+v\rangle \geq 0, \quad (u,v)\in A$$

となる $x\in K$ が存在することを示す。そのために $(u,v)\in A$ に対してK上の函数 $F_{u,v}$ を

$$F_{u,v}(x)=\langle u-x, f+v\rangle$$

で定義する。$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ なる任意のn個の非負な数 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ とn個のAの元 $\{(u_i,v_i)\}_{i=1}^{n}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_{u_i,v_i}(x)\geq 0$$

となる解があることを示し，そこで定理6を用いて

$$\langle u-x, f+v\rangle \geq 0, \quad (u,v)\in A$$

なる $x\in K$ の存在を保証する。あとはKから 2^K への写像Tに対して定理5を使えば補助定理は証明される。

これを用いて変分不等式の解の存在に対する必要十分条件を得ることができる[13]。

定理10　Eを reflexive な Banach 空間とする。CをEの閉で凸な部分集合とし，TをCから E^* への monotone, hemicontinuousな写像とする。そのとき，次の条件(1)と(2)は同値である。

(1) $$\langle Tx_0, y-x_0\rangle \geq 0, \quad y \in C$$

なる $x_0 \in C$ が存在する。

(2) Cの有界で閉，凸な部分集合が存在して，任意の$\partial_C K$の元zに対して，$\langle Tz, y-z\rangle \leq 0$ なるような$y \in i_C K$が存在する。

次にあげる2つの系はこの定理から得られる。

系 Cをreflexive Banach空間Eの閉で凸な集合とし，TをCからE^*へのmonotone hemicontinuousな写像とする。さらにTがC上でcoercive，すなわち

$$\lim_{\substack{\|x\| \to \infty \\ x \in C}} \langle Tx, x-u\rangle / \|x\| = \infty$$

なる $u \in C$ の存在を仮定すれば

$$\langle Tx_0, y-x_0\rangle \geq 0, \quad y \in C$$

なる $x_0 \in C$ が存在する。

上の系において，Cをclosed convex coneとすればx_0は

$$Tx_0 \in C^*, \quad \langle x_0, Tx_0\rangle = 0$$

を満たし，相補性問題の解になる。

系 HをHilbert空間とする。Cを$0 \in C$なるHの閉で凸な集合とし，TをCからHへのnonexpansiveな写像とする。

もしCの有界で閉凸な部分集合Kで，$0\in i_C K$であり，すべての$z\in\partial_C K$に対し$\|Tz\|\le\|z\|$なるものが存在するならばそのとき

$$\|x_0-Tx_0\|=\min\{\|y-Tx_0\|:y\in C\}$$

なるような$x_0\in C$が存在する。

特に，TをCからCへの写像と仮定するならばこのx_0はTの不動点となる。

§4. Hahn-Banachの定理の一般化と精密化

この節では函数解析学や計画数学等で非常によく使われるHahn-Banachの定理と分離定理を不動点定理を用いて一般化する。Eを線形空間とし，pをE上のsublinearな実数値函数とする。pがsublinearであるとは任意の$x,y\in X$と$\lambda\ge 0$に対して$p(x+y)\le p(x)+p(y)$，$p(\lambda x)=\lambda p(x)$が成り立つときをいう。$E'$をE上の線形汎函数の全体としたとき，角谷-Markovの不動点定理を用いて次の補助定理を得ることができる。

補助定理　pを線形空間E上のsublinearな実数値函数とし，$x_0\in E$とする。このとき，

$$p(x)\ge f(x),\ x\in E$$

$$f(x_0)=p(x_0)$$

となるような線形汎函数$f\in E'$が存在する。

この補助定理と定理6を用いてHahn-Banachの定理の拡張を得ることができる[15]。

定理11 pを線形空間E上のsublinearな実数値函数とし，CをEの凸集合とする。fを$f(x) \leq p(x)$, $x \in C$なるようなC上のconcave函数とするとき，

$$f(x) \leq f_0(x), \quad x \in C$$

$$f_0(y) \leq p(y), \quad y \in E$$

なるような線形汎函数$f_0 \in E'$が存在する。

証明の概略 Fを積位相をもった線形位相空間R^Eとし，

$$X_0 = \prod_{x \in E} [-p(-x), p(x)] \subset F$$

とする。また，$B = \{ g \in E' ; g(x) \leq p(x), x \in E \}$とするとき補助定理よりBは空でないコンパクトな凸集合となる。いま$x \in C$に対してB上の函数G_xを

$$G_x(g) = f(x) - g(x), \quad g \in B$$

で定義する。そのとき$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$なる$n$個の非負な数$\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$と$n$個のCの元$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$に対して補助定理を使えば

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i G_{x_i}(g) \leq 0$$

なる元$g \in B$の存在がわかるので，定理6より

$$G_x(f_0) \leq 0, \quad x \in C$$

なる$f_0 \in B$が存在する。すなわち定理の結論を得るようなf_0が存在する。

系（Hahn-Banach） Eを線形空間とし，Lをその部分空間とする。fをすべての$x \in L$に対して$f(x) \leq p(x)$となるようなL上の線形汎函数とするとき

$$f_0(x) = f(x), \quad x \in L$$

$$f_0(y) \leq p(y), \quad y \in E$$

となるような$f_0 \in E'$が存在する。

定理12　Eを線形空間とする。pをE上のsublinearな実数値函数とし，C，DをEの空でない凸集合で

$$p(C, D) = \inf\{p(x, y) : x \in C, y \in D\} > -\infty$$

なるものとする。そのとき，

$$\inf\{f(x) : x \in C\} = p(C, D) + \sup\{f(y) : y \in D\}$$

でかつ，$f(x) \leq p(x)$，$x \in E$なる$f \in E'$が存在する。

系　Nをノルム空間とし，C，DをNの空でない凸集合で

$$d(C, D) = \inf\{\|x - y\| : x \in C, y \in D\} > 0$$

なるものとする。そのとき，$\|f\| = 1$であり

$$\inf\{f(x) : x \in C\} = d(C, D) + \sup\{f(y) : y \in D\}$$

なる有界線形汎函数$f \in N^*$が存在する。

Cが閉で凸，Dがコンパクトで凸，そして$C \cap D = \phi$とすると$d(C, D) > 0$であるから系が使えてよく知られた分離定理が得られる。その分離定理では系で得られているような等号（＝）までは保証されていない。

§5. ベクトル値函数の線形不等式のシステム

実数値をとる函数の線形不等式のシステムはFan[8]によって研究され，そのあと数理計画法やゲームの理論等で有効に使われている。ここでは数学の問題，特に代数学での行列の問題や種々の不等式を解くためにFanの結果をベクトル値をとる場合まで拡張する。E，Fをノルム空間とする。$B(E,F^*)$によってEからF^*への線形連続写像の全体が作るBanach空間を表す。$B(E,F^*)$にweak* operator topologyを入れてやると，それは線形位相空間になる。今後この位相の元で何かを考えるときは"w*"をつけるものとする。$x \in E$，$t \in F$に対して$B(E,F^*)$上の有界線形汎函数txを

$$tx(A) = \langle t, Ax \rangle, \quad A \in B(E,F^*)$$

で定義する。そのときtxは$B(E,F^*)$上のw*-continuousな函数である。また$K \subset B(E,F^*)$で$0 \in K$なるKに対して

$$P_K(f) = \sup\{\operatorname{Re} f(A) ; \|A\| \leq 1, A \in K\}, \quad f \in B(E,F^*)^*$$

を定義する。もし$K = B(E,F^*)$なら$f \in B(E,F^*)$に対して$P_K(f) = \|f\|$となることがわかる。次の補助定理はmini-max定理を用いて証明されるがかなりの紙面を用する[20]。

補助定理　CをFの凸集合で$0 \in C$なるものとし，$r_1, r_2, \cdots, r_n$とαを非負な数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$をEの元とする。また$t_1^*, t_2^*, \cdots, t_n^*$を$F^*$の元とし，Kを0を含む$B(E,F^*)$

の w^*-closed で凸な集合とする。そのとき次の条件(1)と(2)は同値である。

(1) $\mathrm{Re}\langle t, t_i^* - Ax_i\rangle \leq \|t\|\gamma_i$, $t \in C$, $i=1, 2, \cdots, n$ と $\|A\| \leq \alpha$, $A \in \alpha K$ を満たすような $A \in B(E, F^*)$ が存在する。

(2) すべての $(t_i) \in C^n$ に対して

$$\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n}\langle t_i, t_i^*\rangle - \sum_{i=1}^{n}\|t_i\|\gamma_i \leq \alpha P_K\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)$$

が成り立つ。

この補助定理を用いて線形不等式のシステムに関する定理を証明するのであるが，その前にもう１つ定義を与えておく。Eをノルム空間とし，Fをorderをもったノルム空間とする。$\{x_\nu ; \nu \in I\}$ をEの元からなる族とし，$\{t_\nu^* ; \nu \in I\}$ をF^*の元からなる族とする。そのとき線形不等式のシステム

$$A x_\nu \geq t_\nu^*, \quad \nu \in I$$

を(RS)と呼ぶことにする。システム(RS)の解とは上の不等式を満たす$B(E, F^*)$の元Aのことである。

定理13　αを非負な数，Kを0を含む$B(E, F^*)$のw^*-closedな凸集合とする。そのとき次の条件(1)と(2)は同値である。

(1) システム(RS)が $\|A\| \leq \alpha$, $A \in \alpha K$ なる解Aをもつ。

(2) Iのn個の元 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ とFのpositiveな元 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\langle t_i, t_{\nu_i}^*\rangle \leq \alpha P_K\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_{\nu_i}\right)$$

が成り立つ。

証明の概略　$C=F_+$, $r_i=0$, $x_i=x_{\nu_i}$, $t_i^*=t_{\nu_i}^*$ とおき補助定理を応用すれば，(2)は $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ に対して

$$\langle t, t_{\nu_i}^* - Ax_{\nu_i} \rangle \leq 0,\quad t \geq 0$$

で $\|A\| \leq \alpha$, $A \in \alpha K$ なる $B(E, F^*)$ の元 A の存在と同値になる。あとは $X = \{A \in B(E, F^*) : \|A\| \leq \alpha,\ A \in \alpha K\}$ が w^* の意味でコンパクトであり，任意の $\nu \in I$ に対して集合

$$\{A \in B(E, F^*) : Ax_\nu \geq t_\nu^*\}$$

が w^*-closed であることを使えば定理は証明される。

この定理を用いて minimum norm problem（MNP）を解くことができる。（MNP）とは

$$f(x_i) \geq c_i \ (i=1, 2, \cdots, n),\ f \geq 0$$

のもとで，f のノルム $\|f\|$ を最小にする問題のことである。

定理14　$\alpha = \sup \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$ とする。ただし，$(\lambda_i) \in \mathbb{R}^n$ は $\lambda_i \geq 0$ で $\|(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i)^+\| \leq 1$ なるものとする。そのとき次の2つの命題が成り立つ。

(1)（MNP）が consistent である必要十分条件は α が有限な値をとることである。

(2)（MNP）が consistent であれば（MNP）は解をもち（MNP）の値は α である。

証明は小宮－高橋[20]を参照せよ。

§6. Doubly stochastic行列と凸ゲームのコア

線形不等式のシステムに関する定理(定理13)は，§6でminimum norm problemを解くのに用いられたが，この節ではさらにDoubly stochastic行列と凸ゲームのコアの問題にも応用される。前者ではHardy-Littlewood-Pólaの定理の無限次元空間への拡張を得るため，後者ではSchmeidlerによって得られている凸ゲームの結果の別証明(非常にSimpleになる)に用いられる。

$(X, \mathcal{B}, m)$をmeasure spaceとし，$B(L^\infty, L^\infty)$をL^∞からL^∞への線形連続写像全体の作るBanach空間とする。$B(L^\infty, L^\infty)$の元Sは次の3つの条件を満たすときdoubly ~~sub~~stochasticと呼ばれる。

(1) $0 \leqq f$ ならば $Sf \geqq 0$ である。

(2) $S1 \leqq 1$ である。

(3) $0 \leqq f$, $f \in L^1 \cap L^\infty$ ならば$\int Sf\,dm \leqq \int f\,dm$である。

doubly substochastic写像の全体を$\mathcal{S}$で表し，また$\mathcal{S}$の元Sで$S1 = 1$を満たすもの全体を$\mathcal{S}^*$で表す。次の2つの定理はHardy-Littlewood-Pólaの定理をl^1, $L^\infty[0,\infty)$の場合に拡張したものである。

定理15. $x = (x_1, x_2, \cdots)$, $y = (y_1, y_2, \cdots)$をl^1の元で$x \geqq 0$, $y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq 0$ なるものとする。もしこの2

つの元 x, y が

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \quad (n=1, 2, \cdots\ )$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

を満たすならば，そのとき $y=Tx$ となるような $\mathcal{S}^*$ の元 T が存在する。

定理16 f を $f \geq 0$ なる $L^1[0, \infty)$ の元，g を $g \geq 0$ で monotone decreasing な $L^1[0, \infty)$ の元とする。いまこの f, g に

$$\int_0^s g\, dm \leq \int_0^s f\, dm, \quad s \geq 0$$
$$\int_0^\infty g\, dm = \int_0^\infty f\, dm$$

なる関係があるならば，そのとき $g=Tf$ となるような $\mathcal{S}$ の元 T が存在する。

特に，f が有界なら $g=Tf$ となるような $\mathcal{S}^*$ の元 T が存在する。

上の2つの定理はいくつかの補助定理と定理13を使って証明されるがここでは書かない。次に凸ゲームのコアに関する定理を取り扱う。

X をある集合とし，$\mathcal{B}$ を X の部分集合からなる1つの algebra とする。$B(X, \mathcal{B})$ によって有界な $\mathcal{B}$-measurable functions の作るノルム空間とし，$B^*(X, \mathcal{B})$ によって $\mathcal{B}$ 上の有界な finite additive set functions の作る空間を表すこと

にする。$v \in V(X, \mathcal{B})$ が game であるとは $v: \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+$ であり，$v(\phi) = 0$ のときである。game v の core とはすべての $A \in \mathcal{B}$ に対して $\mu(A) \geq v(A)$ であり，$\mu(X) = v(X)$ である $\mu \in B^*(X, \mathcal{B})$ の全体のことである。これを $\mathcal{C}(X, \mathcal{B}, v)$ で表す。次の定理は Schmeidler [24] によって得られたものであるが，定理13を用いることによって非常に簡単に証明することができる。

定理17　v を game としたとき，次の条件(1)と(2)は同値である。

(1)　$\mathcal{C}(X, \mathcal{B}, v) \neq \phi$ である。

(2)　$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \geq 0$ と $A_1, A_2, \cdots, A_m \in \mathcal{B}$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v(A_i) \leq v(X) \| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i 1_{A_i} \|$$

が成立する。

証明　(1)は $\mu(A) \geq v(A)$, $A \in \mathcal{B}$ で $\|\mu\| \leq v(X)$ なる $\mu \in B^*(X, \mathcal{B})$ の存在のことであるから，定理13を使えば定理は明らかである。

§7　おわりに

不動点定理と現状について書き残した問題が沢山ある。

非線形計画の問題は非線形発展方程式[4]を介在にするとそれは不動点定理や解の挙動を研究するエルゴード定理にな

り，それは現在非線形解析学の話題となっているところである。

生態学におけるTube flow problemはSchauderの不動点を使うとうまく証明できる[11]。

ロシアの高校生Lomonosov[21]は完全連続作用素の不変部分空間の問題を不動点定理を用いてそれまでの結果より一般的にそして簡単に解いている。

集合値写像の不動点定理を用いて偏微分方程式論でかなり沢山の結果が出ている。

その他，不変測度の存在と不動点定理の関係，情報理論における不動点定理の役目，共通不動点定理とセミグループの関係等々・・・・・。それ等は次の機会にまわしたい。

References

[1] J.B.Baillon, Un theorème de type ergodic pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert, C.R. Acad. Sci. Paris, 280 (1975), 1511-1514.

[2] V.Barbu, Nonlinear semigroups and evolution equations in Banach spaces, Editura Academiei R. S. R., Bucuresti, 1976.

[3] V.Barbu-Th.Precupanu, Convexity and optimization in Banach spaces, Editura Academiei R. S. R., Bucuresti, 1978.

[4] H.Brézis, Operateurs maximaux monotones et semi-groups de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland Publishing Company, Amsterdom, 1973.

[5] F.E.Browder,The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, Math. Ann., 177 (1968), 283-301.

[6] R.E.Bruck Jr., Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space, J. Functional Analysis, 18 (1975), 15-26.

[7] K.Fan, Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci., 38 (1952), 121-125.

[8] K.Fan, On systems of linear inequalities, in Linear Inequaliti and Related Systems, Annals of Math. Studies, No. 38 (1956), 99-156.

[9] K.Fan, Existence theorems and extreme solutions for inequaliti concerning convex funcitons or linear transformations, Math. Z., 68 (1957), 205-217.

[10] K.Fan, Applications of a theorem concerning sets with convex sections, Math. Ann., 163 (1966), 189-203.

[11] J.B.Garner-R.B.Kellogg, A one tube flow problem arising in Physiology, Bull. Math. Bio., 42 (1980), 295-304.

[12] N.Hirano-W.Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive mappings in Hilbert spaces, Kodai Math. J., 2 (1979), 11-25.

[13] N.Hirano-W.Takahashi, Existence theorems on unbounded sets in Banach spaces, Proc. Amer. Soc., 80 (1980), 647-650.

[14] N.Hirano-W.Takahashi, The sets of fixed points of families of affine continuous mappings, Fund. Math., 113 (1981), 113-117.

[15] N.Hirano,H.Komiya-W.Takahashi, A generalization of the Hahn-Banach extension theorem, J. Math. Anal. Appl., 88 (1982), 333-340.

[16] S.Itoh-W.Takahashi, Single-valued mappings, multivalued mappings and fixed point theorems, J. Math. Appl., 59 (1977), 514-521.

[17] S.Itoh-W.Takahashi, The common fixed point theory of singlevalued mappings and multivalued mappings, Pacific J. Math., 79 (1978), 493-508.

[18] S.Itoh,W.Takahashi-K.Yanagi, Variational inequalities and complementarity problems, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 23-2

[19] T.Kato, Demicontinuity, hemicontinuity and monotonicity, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 548-550 and 73 (1967), 886-889.

[20] H.Komiya-W.Takahashi, Systems of linear inequalities on normed linear spaces, Linear & Multilinear algebra, to appear.

[21] V.J.Lomonosov, Invariant subspaces for operators commuting with compact operators, Func. Anal. i Prilozen 7 (1973), 55-56.

[22] K.Naito, On the almost periodicity of solutions of a reaction diffusion system, J.Diff. Equ., 44 (1982), 9-20.

[23] K.Sakamaki-W.Takahashi, Systems of convex inequalities and their applications J. Math. Anal. Appl., 70 (1979), 445-459.

[24] D.Schmeidler, On balanced games with infinitely many players, Research program in game theory and mathematical economics; RM 28 (June 1967), The Hebrew University of Jerusalen, Israel.

[25] M.Sion, On general minimax theorems, Pacific J. Math., 8 (1958), 171-176.

[26] W.Takahashi,Fixed point theorem for amenable semigroup of nonexpansive mappings, Kodai Math. Sem. Rep., 21 (1969) 383-386.

[27] W.Takahashi, A convexity in metric space and nonexpansive

mappings 1, Kodai Math. Sem. Rep., 22 (1970), 142-149.

[28] W.Takahashi, Invariant functions for amenable semigroups of positive contractions on L^1, Kodai Math. Sem. Rep., 23 (1971), 131-143.

[29] W.Takahasni, Ergodic theorems for amenable semigroups of positive contractions on L^1, Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ., 19 (1972), 5-11.

[30] W.Takahashi, Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 168-181.

[31] W.Takahashi, Nonlinear complementarity problem and systems of convex inequalities, J. Optimization Theory and Appl., 24 (1978), 499-506.

[32] W.Takahashi, Recent results in fixed point theory, SA Bull. Math., 4 (1980), 59-85.

[33] W.Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.