

Generic Bifurcations of Varieties I.

奈良女子大 理 泉屋 周一

Shuichi Izumiya

§0. 序

$f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^∞ -写像芽とする時, 任意の $u \in (\mathbb{R}^r, 0)$ に対して, "variety" の芽 $f_u^{-1}(0)$ が定まる. ただし, $f_u(x) = f(x, u)$ と定義する. 本稿では, $f_u^{-1}(0)$ の分岐に関していくつかの結果を紹介する.

定義 1. $f, g: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^∞ -写像芽とする. f, g が P - \mathcal{K} -equivalent (resp. $S.P$ - \mathcal{K} -equivalent) とは, $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0)$ からそれ自身の上への diffeo 芽で $\Phi(x, u) = (\Phi_1(x, u), \Phi_2(u))$ (resp. $\Phi(x, u) = (\Phi_1(x, u), u)$) の形をした物が存在して, $\Phi^*(I(f)) = I(g)$ をみたす事である. ここで, $I(f)$ は, f_1, \dots, f_p で生成される局所環 $C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r) = \{h \mid h: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow \mathbb{R}: C^\infty\text{-函数芽のイテリアルをあらわす}\}$ のイテリアルをあらわす. ただし, $f = (f_1, \dots, f_p)$ とする.

定義 2. $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して,

$$\pi_f: (f^{-1}(0), 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0) \quad ; \quad \pi_f(x, u) = u \quad \text{を } f \text{ の}$$

分岐写像芽とよぶ。

さらに, $f, g: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して π_f, π_g が \mathcal{A} -equivalent とは, $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0)$ からそれ自身への diffeo 芽 Φ で, $\Phi(f(0)) = g(0)$ をみたすものと, $(\mathbb{R}^p, 0)$ からそれ自身の上の diffeo 芽 ϕ が存在して, $\phi \circ \pi_f = \pi_g \circ \Phi$ をみたすこととする。

注意, 定義からあきらかに, f, g が $\mathcal{E}-\mathcal{K}$ -equivalent の時 π_f と π_g は \mathcal{A} -equivalent である。さらに, \mathcal{A} -equivalent class が π_f の等高線の位置と形を記述するので, それは, π_f の等高線即ち, $f^{-1}(0)$ の分岐を記述する。

さて, 純粹な幾何学的興味以外の Motivations について, いくつかの例を挙げる。

1) $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ とし \mathcal{C}^0 -写像芽に対して, $\frac{dx}{dt} = f(x, u)$ とし λ 係数付き常微分方程式系を考える, この方程式の定常解とは $\frac{dx}{dt} = 0$ (ie $f(x, u) = 0$) とし λ 集合 $\{(x, u)\}$ の事である。

2) m 種の商品があるとして, $P = (P_1, \dots, P_m)$ とそれぞれの価格とすると, 価格 P に対して, 超過需要関数 $f(P) = (f_1(P), \dots, f_m(P))$ が定まるか。Debreu [1] によると, f は smooth にしてよければ, $f(P_0) = 0$ となる点 $P_0 = (P_{01}, \dots, P_{0m})$ が均衡価格である。従って, 他の外力が加った経済状態における均衡価格

が、ちょうど径数付けられた写像芽 $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ の "varieties" $f^{-1}(0)$ の点である。

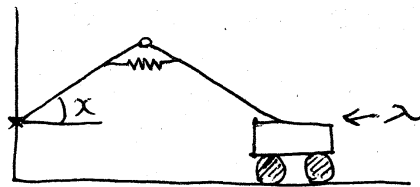
その他、偏微分方程式の解の分岐の研究や、Legendre 特異点の研究への応用の可能性もある。

§1. Simple example.

ここでは、Golubitsky - Scheffer [2] に従って、PK-equivalence theory の応用について、簡単な例をあげて解説する。残念ながら、経済学への応用は今のところ見出されておないので、弾性に関する例をあげる。

両端で圧縮力を受ける細棒の挙動をモデル化してみる。

今、以下の図の様なシステムを考える。



ここで、バネは2本の剛い棒を真直ぐに保とうとしているバネの "弾性係数" を適当にとると、このシステムのポテンシャル・エネルギーは

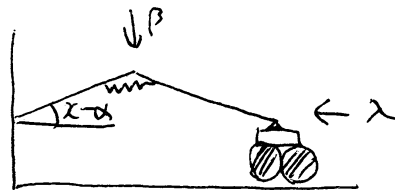
$$V = \frac{1}{2}x^2 + 2\lambda \cos x$$

であたえられる。このシステムがかりあっておくとすると、equilibrium condition

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x - 2\lambda \sin x = 0 \quad \text{--- (*)}$$

があたえられる。

さて、このシステムに、上から β の力を加えると。



上図の状況に作る。このときのポテンシャルエネルギーは

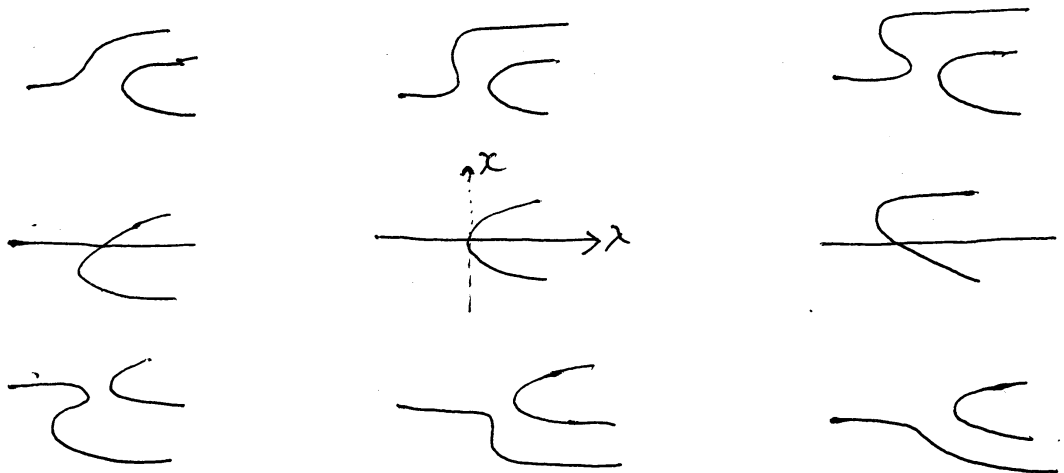
$$V = \frac{1}{2} (x - \alpha)^2 + 2\lambda \cos x + \beta \sin x$$

があたえられる。さらに、equilibrium conditionは、4次以上の項を無視すると、

$$\frac{1}{3} \lambda x^3 - \frac{1}{2} \beta x^2 + (1 - 2\lambda)x + (\beta - \alpha) = 0 \quad \text{--- (**)}$$

が与えられる。

このシステムは、理想的には $x^3 - \lambda x$ とその universal unfolding $x^3 + \beta x^2 - \lambda x + \alpha$ で実現される。この、 α, β を動かして、解の分岐を图示すると。



となる。

さて、このシステムは、E.C. Zeeman [3]によって、Catastrophe理論の応用として説明されているが、ここでは、それについてみてみよう。

上記のように、 $x^3 - \lambda x = 0$ というシステムの perturbation には、 α, β という2変数が必要であるが、Zeemanの議論では1変数で良いことになっている。それは以下の様に解釈される。このシステムをあるポテンシャルは

$$V_\lambda(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\lambda x^2$$

であるが、この函数を $\frac{1}{4}x^4$ の1変数変型とみてやる。この時、初等カタストロフ理論によると、 $\frac{x^4}{4}$ は codimension 2 であり、その universal unfolding (右同値に対する) は

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\lambda x^2 + bx$$

である。

即ち、このポテンシャルの equilibrium condition

$$x^3 - \lambda x + b = 0$$

が、 $x^3 - \lambda x = 0$ というシステムの universal perturbation であると Zeeman は主張している。

事実、

$$x^3 - \lambda x + \beta x^2 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

という、 $x^3 - \lambda x = 0$ の perturbation を考えてみると、

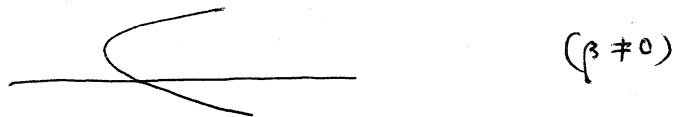
$$(\star) \begin{cases} X = \lambda + \frac{1}{3}\beta \\ \Lambda = \lambda + \frac{1}{3}\beta^2 \\ \alpha = \frac{1}{3}\lambda\beta + \frac{2}{27}\beta^3 \end{cases}$$

と変換してやると, (1) は

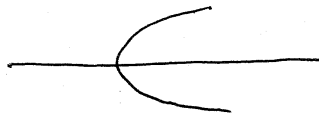
$$X^3 - \Lambda X + \alpha = 0 \quad \text{--- (2)}$$

になる.

ところが, ここで, (1) の分岐状態を図示すると



となり, また, (2) の分岐状態を図示すると



となる. これらの分岐状態は明らかに異なっている. これは, (\star) という変数変換の時に, β と λ を mix して変換したためにおこったのである. β と λ を mix して変換してよいというのは, 初等カタストロフ理論を採用した事により保障されている. この様に, 種々の分岐問題を研究するにあたり, 本質的にそのシステムに名まれているパラメータ (この場合は λ にあたる) と perturb するパラメータを区別した, モデルを構成する必要がある.

§2. 分類結果

この節では、径数付けられた写像芽の P - \mathcal{K} -同値による、部分的分類の結果を報告する。証明は、この研究集会の性格上、いつかおこなう。

C^0 -写像芽 $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して、

$$df_x: T_0 \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \rightarrow T_0 \mathbb{R}^p \quad df_x(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r) = \left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right),$$

$$df_{x_l}: T_0 \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \rightarrow T_0 \mathbb{R}^p \quad df_{x_l}(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r) = \left(\sum_{j=1}^r w_j \frac{\partial f_l}{\partial u_j} \right)$$

($l=1, \dots, p$) で定義する。さらに $df_x^k: \ker df_x \rightarrow \text{Coker } df_x$

$$\text{E} \quad df_x^k = \pi \circ df_x / \ker df_x \quad (\pi: T_0 \mathbb{R}^p \rightarrow \text{Coker } df_x: \text{canonical projection})$$

で定義する。

定義3. f が原点において Σ_s^k -型であるとは、

$$\text{rank}(df_x) = \min(m, p) - k, \quad \text{rank}(df_x^k) = \min(r, p - \text{rank}(df_x)) - s$$

である事とする。さらに f が原点で Σ_0^0 -型の時、 f は非特異であるという。

以下の定理は、 P - \mathcal{K} -同値に対応する複素函数定理である。

定理4. $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を非特異 C^0 -写像芽とする。

3.

1) $m \geq p$ のとき、 f は $(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r) \mapsto (x_1, \dots, x_p)$ に

s - P - \mathcal{K} -同値

2) $m < p$ かつ $r \leq p - m$ のとき、 f は $(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r)$

$\mapsto (x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r, 0, \dots, 0)$ に P - \mathcal{K} -同値。

3) $m < p$ か $r > p - m$ のとき, f は $(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r)$
 $\mapsto (x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_{p-m})$ に P - \mathcal{K} -同値.

この定理により, 非特異な写像芽は分類が終った. しか
 らすの Varieties は原点で分岐したることわかる. 従って
 原点が特異点と \square である写像芽の分類が問題である.

Notations: $C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r) = \{ f \mid f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow \mathbb{R} : C^\infty \}$: 局所環
 $\mathcal{M}_{m+r} = \{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r) \mid f(0) = 0 \}$: $C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r)$ の maximal イデアル
 $C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r; \mathbb{R}^p) \ni g_1, \dots, g_k$ に対して,

$\langle g_1, \dots, g_k \rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r)}$: g_1, \dots, g_k で生成される $C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r)$ -加群.
 また, $C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r; \mathbb{R}^p) = \{ f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p : C^\infty\text{-写像芽} \}$.

この時, C^∞ -写像芽 $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して,

$$T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right\rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r)} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_r} \right\rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^r)} + \mathcal{I}(f)_{C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r; \mathbb{R}^p)}$$

とみく.

定義5. $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^∞ -写像芽とすると,

$$P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r; \mathbb{R}^p)}{T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f)}$$

を f の P - \mathcal{K} -codimension と呼ぶ.

ここでは, $r = 1$ の場合に, P - \mathcal{K} -codimension が 4 以下の
 f の分類結果を報告する. P - \mathcal{K} -codimension を 4 以下とした
 のは, R. Thom 氏が初等カタストロフの分類の折に right-
 codimension を 4 以下としたという歴史的動機以外にもなにもない.

従って, もっと P - \mathcal{K} -codimension が高い f のまで, 分類する

必要はモテる人スレにある。

定理6. $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ ($m \geq p$) を P - \mathcal{K} -codim(f) が4以下の \mathbb{C}^p -写像芽とする。

1) f が原点において $\Sigma_0^!$ -型を τ するとき、 f は以下の写像芽のいずれかに P - \mathcal{K} -同値である。

P - \mathcal{K} -codimension	標準型
0	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u + Q(x_p, \dots, x_m))$
1	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u + x_p^3 + Q(x_{p+1}, \dots, x_m))$
2	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u \pm x_p^4 + Q(x_{p+1}, \dots, x_m))$
3	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u + x_p^5 + Q(x_{p+1}, \dots, x_m))$
4	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u + x_p^3 + x_{p+1}^3 + Q(x_{p+2}, \dots, x_m))$ $(x_1, \dots, x_{p-1}, u + x_p^3 - x_p x_{p+1}^2 + Q(x_{p+2}, \dots, x_m))$ $(x_1, \dots, x_{p-1}, u \pm x_p^6 + Q(x_{p+1}, \dots, x_m))$ $(x_1, \dots, x_{p-1}, u \pm (x_p^2 x_{p+1} + x_{p+1}^4) + Q(x_{p+2}, \dots, x_m))$

2) f が原点において $\Sigma_1^!$ -型を τ するとき、 f は以下の写像芽のいずれかに P - \mathcal{K} -同値である。

P-K-codimension	標準型
1	$(x_1, \dots, x_{p-1}, \pm u^2 + Q(x_p, \dots, x_n))$
2	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u^3 + Q(x_p, \dots, x_n))$
	$(x_1, \dots, x_{p-1}, \pm u^2 + x_p^3 + Q(x_{p+1}, \dots, x_n))$
	$(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p^3 \pm u x_p + Q(x_{p+1}, \dots, x_n))$
3	$(x_1, \dots, x_{p-1}, \pm u^4 + Q(x_p, \dots, x_n))$
	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u^3 + x_p^3 + Q(x_{p+1}, \dots, x_n))$
	$(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p^4 \pm u x_p + Q(x_{p+1}, \dots, x_n))$
4	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u^5 + Q(x_p, \dots, x_n))$
	$(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p^5 \pm u x_p + Q(x_{p+1}, \dots, x_n)).$

$$\text{ここで, } Q(x_0, \dots, x_n) = \pm x_0^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

注意: P-K-codim(f) ≤ 4 なる f のには, 上記の他, $\Sigma_5^5, \Sigma_4^4, \Sigma_3^3, \Sigma_2^2, \Sigma_1^1, \Sigma_1^3, \Sigma_1^2$ の各型がある. 従って完全に分類するにはこれらの各型の分類を行はる必要がある.

また, これらの分類がわかれる現象のモデルになるかは, その方面の研究者の判断が必要であろう.

以上.

文献

- [1] G. Debreu : Excess demand functions, J. Math. Econom. 1 (1974), 15-22.
- [2] M. Golubitsky and D. Schaeffer : A theory for imperfect bifurcation via singularity theory, Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979), 21-98.
- [3] E. C. Zeeman : Euler buckling in Structural Stability, in the Theory of Catastrophes, and Applications in the Science, Lecture Notes in Math., No. 525, Springer (1976), 373-395.