数理解析研究所講究録
479巻 1983年 29-41

コンパクトリーマン葉層の特性類.

阪大. 教養　大和健二 (Kenji Yamato)

多様体 M 上の, 自明なノーマルバンドルを持つ余次元 q リーマン葉層 $\mathcal{F}$ に対する Lazarov-Pasternack ([1]), 森田 ([2]) の特性類について, その幾何学的意味, 又は, 定性的性質に及ぼす影響について考えたい。

ここでは, 最も簡単な $\dim M = 3$, $\operatorname{codim} \mathcal{F} = 2$ の場合に得られた結果 (定理 2-1) について述べる。 また, 一般の場合には, $\mathcal{F}$ がコンパクトであるとして考察する。(定理 3-1, 3-2).

§1. 準備.

向きづけ可能な n 次元閉多様体 M 上の, 余次元 q リーマン葉層 $\mathcal{F}$ を考える。即ち, $\mathcal{F}$ は次の様な横断的リーマン構造 τ により定義される葉層である。

$$\tau = \{(U_\alpha, f_\alpha), \gamma_{\alpha\beta}, (\mathbb{R}^q_\alpha, g_\alpha)\}$$

ここで，　$f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^q_\alpha\ (=\mathbb{R}^q)$ submersion,

g_α は $\mathbb{R}^q_\alpha\ (=\mathbb{R}^q)$ のリーマン計量，

$\gamma_{\alpha\beta} : (\mathbb{R}^q_\beta, g_\beta) \longrightarrow (\mathbb{R}^q_\alpha, g_\alpha)$　等長変換

s.t.　$f_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} \circ f_\beta$

この時，$\mathcal{F}$ のノーマルバンドル $\nu(\mathcal{F})$ 上の bundle-like 計量 g が局所的に，$g = f_\alpha^* g_\alpha$ で定まるので，$(\nu(\mathcal{F}), g)$ の正規直交枠束を $\pi : P \longrightarrow M$ とする。

以下，我々は，$\mathcal{F}$ を上の様な横断的リーマン構造 τ を持つ余次元 q リーマン葉層とし，$\pi : P \to M$ は，切断 $s : M \longrightarrow P$ を持つものとし，これらを固定して，組 $(\mathcal{F}, \tau, s)$ として考察する。また，以下で，リーマン葉層と言えば，組 $(\mathcal{F}, \tau, s)$ の事であるとする。

今，P_α を $(\tau(\mathbb{R}^q_\alpha), g_\alpha)$ の正規直交枠束とし，$\theta^\alpha = (\theta^\alpha_i)_{i=1,\cdots,q}$，$\omega^\alpha = (\omega^\alpha_{ij})_{i,j=1,\cdots,q}$ を各々 P_α 上の標準1次微分形式，リーマン接続形式とする。この時，P 上の，$\mathbb{R}^q$-値1次微分形式 $\theta = (\theta_i)_{i=1\cdots q}$ (resp. 接続形式 $\omega = (\omega_{ij})_{i,j=1\cdots q}$) が局所的に，

$$\theta_i = f_\alpha^* \theta^\alpha_i \ , \quad i = 1, \cdots, q$$

$$(\text{resp. } \omega_{ij} = f_\alpha^* \omega^\alpha_{ij} \ , \quad i,j = 1, \cdots, q)$$

で，

によって定まる。また，$\Omega=(\Omega_{ij})$ を ω の曲率形式とする。

リーマン葉層 $(\mathcal{F},\tau,s)$ に対する Lazarov－Pasternack 森田の特性類は，余次元 q の時，その一部として次の様に略記されるものがある([1],[2])。

$$I=\begin{cases}\{2,4,\dots,q-2,\chi\} & ;\ q=\text{偶数}\\ \{2,4,\dots,q-1\} & ;\ q=\text{奇数},\end{cases}$$

とする時，$\forall J\subset I$ に対して，$H^{*}_{DR}(M)$ の元として，

(1-1). $(h_J\cdot\chi)(\mathcal{F},\tau,s)$ （但，$q=$偶数，$J\neq\phi$）

$(h_J\cdot v)(\mathcal{F},\tau,s)$.

これらの定義は省略するが，例えば，余次元2の時は，次の3つの特性類を持つ。

(1-2) $(h_\chi\cdot\chi)(\mathcal{F},\tau,s)=\left[\frac{1}{4\pi^2}s^*(\omega_{12}\wedge\Omega_{12})\right]\ (\in H^3_{DR}(M))$

$(h_\chi\cdot v)(\mathcal{F},\tau,s)=\left[\frac{-1}{2\pi}s^*(\omega_{12}\wedge\theta_1\wedge\theta_2)\right]\ (\in H^3_{DR}(M))$

$v(\mathcal{F},\tau,s)=\left[s^*(\theta_1\wedge\theta_2)\right](\in H^2_{DR}(M))$.

一方，P 上に，$\{\theta_i=\omega_{ij}=0\ ;\ i,j=1,\dots,q\}$ によって定義される葉層が存在する。それを $\mathcal{F}^{(1)}$ とかく。$\mathcal{F}^{(1)}$ は次の様な性質を持っている([3])。

(1-3) (1) ホロノミーを持たない。かつ，ファイバーの $SO(q)$－作用で不変。

(2) $\pi:(P,\mathcal{F}^{(1)})\longrightarrow(M,\mathcal{F})$ は葉を保つ。

(3) $F^{(1)}$ を $\mathcal{F}^{(1)}$ の葉とし，$F=\pi(F^{(1)})$ とする。この時，$\pi|_{F^{(1)}} : F^{(1)} \longrightarrow F$ は被覆空間で，その被覆度は，葉 F のホロノミー群の位数に等しい。

一般に，葉層 $\mathcal{G}$ の全ての葉がコンパクトの時，葉層 $\mathcal{G}$ は<u>コンパクト</u>であるという。

今，リーマン葉層 $(\mathcal{F}, \tau, \Delta)$ がコンパクトである時，葉空間 $M/\mathcal{F}$ は自然に V-多様体([4])となり，M 上の q 次外微分形式 $\chi(\Omega)$ (但. χ は Euler 形式)，$v=\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_q$ は，各々，自然に $M/\mathcal{F}$ 上の q 次外微分形式と見做せるので，それらの $M/\mathcal{F}$ 上での積分が考えられるから，

(1-4) $$\chi_v(M/\mathcal{F}) := \int_{M/\mathcal{F}} \chi(\Omega) \quad (\text{但. } q=\text{偶数})$$

$$\mathrm{vol}(M/\mathcal{F}) := \int_{M/\mathcal{F}} v$$ とおく。

$\chi_v(M/\mathcal{F})$ を V-多様体としての Euler 数という([4])。例えば，余次元2の時，$\chi_v(M/\mathcal{F})$ は，$M/\mathcal{F}$ が種数 g の閉曲面と同相で，$\mathcal{F}$ のホロノミーを持つ全ての葉が $F_1, \dots, F_k$ で，各々のホロノミー群の位数が $N_1, \dots, N_k$ であるとすると，

(1-5) $$\chi_v(M/\mathcal{F}) = 2(1-g) + \sum_{i=1}^{k} (1/N_i - 1)$$

となる。

$\mathfrak{F}$ がコンパクトの時，$\mathfrak{F}^{(1)}$ について，さらに次の事が判る。

(1-6) (1) $\mathfrak{F}^{(1)}$ はコンパクトで，その葉空間 $P/\mathfrak{F}^{(1)}$ (= B とかく) は，向きづけ可能な閉多様体 ($\dim B = q + \dim SO(q)$) で，商写像 $q: P \longrightarrow B$ は $\mathfrak{F}^{(1)}$ の葉をファイバーとするファイバー束となる。

(2) P 上のファイバーの $SO(q)$-作用は，商写像 q によって B に射影され，その軌道を葉とする余次元 q 葉層 $\mathfrak{F}_B$ が存在するが，それは，自然に，リーマン葉層 $(\mathfrak{F}_B, \tau_B, \Delta_B)$ となる。

(3) $M/\mathfrak{F}$ と $B/\mathfrak{F}_B$ は自然な対応で V-多様体として同型。 従って，特に， $\chi_V(M/\mathfrak{F}) = \chi_V(B/\mathfrak{F}_B)$。
また， $\mathrm{vol}(M/\mathfrak{F}) = \mathrm{vol}(B/\mathfrak{F}_B)$ も成立する。

(4) P 上の2つのコンパクトリーマン葉層 $(\pi^*\mathfrak{F}, \pi^*\tau, \pi^*\Delta)$, $(q^*\mathfrak{F}_B, q^*\tau_B, q^*\Delta_B)$ について，

$$\pi^*\mathfrak{F} = q^*\mathfrak{F}_B, \quad \pi^*\tau = q^*\tau_B$$

しかし， $\pi^*\Delta \neq q^*\Delta_B$ である。

これらの事，特に (1-6) が，一般の場合に特性類を計算するのに役立つ。

§2. $\mathrm{Codim}\,\mathcal{F}=2$ の場合.

ここでは，向きづけ可能な閉多様体 M 上の，余次元２リーマン葉層 $(\mathcal{F},\tau,\Delta)$ について考える。

一般に，多様体 N 上の p-次元葉層 $\mathcal{G}$ が <u>r-拡張 $\mathcal{H}$ を持つ</u>とは，N 上の $p+r$ 次元葉層 $\mathcal{H}$ が存在して，$\tau(\mathcal{H})\supset\tau(\mathcal{G})$ である事と定義する。

<u>定理</u> 2-1.　$\dim M=3$，$\mathrm{codim}\,\mathcal{F}=2$ の時，次は同値である。

(1) $(h_\chi\cdot\chi)(\mathcal{F},\tau,\Delta)=0$

(2) $\mathcal{F}^{(1)}$ がファイバーに横断的なコンパクト 2-拡張を持つ。

(3) 有限被覆空間 $p:\hat{M}\longrightarrow M$ が存在して，$p^*\mathcal{F}$ が（$\hat{M}$ で）1-拡張をもつ。

(4)（$\mathcal{F}$ がコンパクトの時），$\chi_v(M/\mathcal{F})=0$

また，上の定理は，$\mathcal{F}$ がコンパクトであるという条件の下で次の様に一般化できる。

<u>定理</u> 2-2.　$\mathcal{F}$ はコンパクト，$\mathrm{codim}\,\mathcal{F}=2$ とする。さらに，$\mathcal{F}$ のホロノミーのない葉 F に対して，

$i_*: H_{n-3}(F;\mathbb{R}) \longrightarrow H_{n-3}(M;\mathbb{R})$ は単射

（但，$n=\dim M\,(\geqq 3)$）とする。 この下で，定理2-1の4条件(1)〜(4)は同値である。

以下，定理2-1について，証明の概略を述べる。

まず，我々は，[5]で次の事が判っていた。

(2-1). $(\mathcal{F},\tau,\Delta)$について，

(1) $\mathcal{F}$がコンパクトの時，

$$(\mathrm{tr}_x\cdot\chi)(\mathcal{F},\tau,\Delta)=0 \Leftrightarrow \chi_v(M/\mathcal{F})=0$$

(2) $\mathcal{F}$がコンパクトでない葉を持つ時，

$$(\mathrm{tr}_x\cdot\chi)(\mathcal{F},\tau,\Delta)=0 \Leftrightarrow \mathcal{F}\text{は1-拡張をもつ。}$$

定理2-1で，(2)と(3)は，一般に$\dim M\geqq 3$で，同値である事はすぐ判るので，我々は，(1)と(2)について，$\mathcal{F}$がコンパクトの時考えればよい。

コンパクトリーマン葉層$(\mathcal{F},\tau,\Delta)$に対応して決る，コンパクトリーマン葉層$(\mathcal{F}_B,\tau_B,\Delta_B)$(cf.(1-6))について，次の事が判る。

(2-2) (1) Bは$\mathcal{F}_B$の葉をファイバーとする，Seifertファイバー空間で，そのEuler数$e(B\to B/\mathcal{F}_B)$([6])は$\chi_v(B/\mathcal{F}_B)$と一致する([5])。

(2) ([6]) $e(B\to B/\mathcal{F}_B)=0$である必要十分

条件は，$\mathcal{F}_B$ が横断的なコンパクト2次元葉層 $\mathcal{H}_B$ を持つ事である。

ここで，(1-6)(3) より，$\chi_v(M/\mathcal{F}) = \chi_v(B/\mathcal{F}_B)$ であった事に注意すれば，もし $(\mathfrak{h}_X\cdot\chi)(\mathcal{F},\tau,\Delta)=0$ であれば上の事より $\mathcal{F}_B$ が横断的なコンパクト2次元葉層 $\mathcal{H}_B$ を持ち，従って $\mathcal{F}^{(1)}$ はファイバーに横断的なコンパクト1-拡張 $\mathcal{H} = g^*\mathcal{H}_B$ を持つ事となり，(1) から (2) を得る。また，これを，逆にたどれば (2) から (1) を得る。

定理2-2 の証明の概略は§3 で述べる。

§3. $\mathcal{F}$ がコンパクトで，$\operatorname{codim}\mathcal{F}\geqq 2$ の場合.

ここでは，向きづけ可能な n 次元閉多様体 M 上の，余次元 $q(\geqq 2)$ コンパクトリーマン葉層 $(\mathcal{F},\tau,\Delta)$ について考える。

<u>定理</u>3-1. F，$F^{(1)}$ を各々 $\mathcal{F}$ のホロノミーのない葉，$\mathcal{F}^{(1)}$ の葉とする。この時，次の (1), (2) において (i) と (ii) とは同値である。

(1) (i) $\forall J \neq \phi$, $(\mathfrak{h}_J\cdot v)(\mathcal{F},\tau,\Delta)=0$

(ii) $\Delta_*([F]) = \varepsilon[F^{(1)}]$ $(\in H_*(\mathcal{L};\mathbb{R}))$

但，$[F]$，$[F^{(i)}]$ は各々 F，$F^{(i)}$ の表わす実ホモロジー類で，ε はそれらの向きづけにのみ依存する数で $\varepsilon=\pm 1$。

(2).(i) $\forall J \neq \phi$，$(h_J \cdot \chi)(\mathcal{F},\tau,s)=0$

(ii) $\chi_v(M/\mathcal{F})\cdot[F^{(i)}]=0$ $(\in H_*(L;\mathbb{R}))$

また，定性的性質への影響として，次を得る。

<u>定理</u> 3-2. F を $\mathcal{F}$ の任意の葉とし，$[F]$ でその実ホモロジー類を表わすものとする。この時，

(1) $\chi_v(M/\mathcal{F})\cdot[F]=0$ $(\in H_*(M;\mathbb{R}))$ (但，q=偶数)

(2) (i) $\exists J \neq \phi$，$(h_J \cdot \chi)(\mathcal{F},\tau,s)\neq 0$ 又は

(ii) $v(\mathcal{F},\tau,s)=0$，であれば，$[F]=0$ $(\in H_*(M;\mathbb{R}))$

となる。従って，特に，$\mathcal{F}$ の全ての葉の Euler 数，及び Pontjagin 数は全て零である。

定理 2-2，3-1，3-2 の証明は，以下の命題 1〜3 より得られる。

F，$F^{(i)}$ を定理 3-1 のように，各々，$\mathcal{F}$ のホロノミーのない葉，$\mathcal{F}^{(i)}$ の葉とする。

まず，$H^*(SO(q);\mathbb{R}) \cong \wedge(y_j)_{j\in I}$ (但，I は §1 と同じもの) において，y_j は Pontjagin 形式，又は，Euler 形式に対応する生成元としてとる。$\forall J=\{j_1<\cdots<j_k\}$

$\subset I$ に対して, $y_J := y_{j_1}\wedge\cdots\wedge y_{j_k}$ とおく。

また, $\pi : P \longrightarrow M$ に対する F 上の切断 σ で, 葉方向に沿って射影可能なものを1つとり, 写像 $\Phi : F \longrightarrow SO(8)$ を $\sigma(x) = s(x)\cdot\Phi(x)$ $(x \in F)$ により定義する。

この時, 次の事が判る。

<u>命題</u>1. 切断 s によって $P = M\times SO(8)$ と見做した時,

$$\varepsilon\,[F^{\nu)}] = [F]\times 1 + \sum_{J\neq\phi} i_*(\Phi^* y_J \cap [F]) \times (y_{J^c} \cap [SO(8)])$$

<u>命題</u>2. $Z = \chi$ (resp. v), $z = \chi_v$ (resp. vol) として, $\forall J \subset I$ に対して ($J = \phi$ も許す)。

$$(h_J \cdot Z)(\mathcal{F}, \tau, s) \cap [M] = \varepsilon\; z(M/\mathcal{F})\cdot i_*(\Phi^* y_J \cap [F])$$

(但, 上で, $i : F \longrightarrow M$ 包含写像, ε は F, $F^{\nu)}$ 等の向きづけにのみよる数で $\varepsilon = \pm 1$)

<u>命題</u>3. $\mathrm{Codim}\,\mathcal{F} = 2$ の時,

$\Phi^* y_\chi \cap [F] = 0$ $(\in H_{n-3}(F ; \mathbb{R}))$ ならば $\chi_v(M/\mathcal{F}) = 0$

定理2-2 の証明.

条件 (2), (3), (4) が同値である事は, §2 で述べた事と全く同じである。 従って (1) と (4) が同値である事を示せばよいが, それは, 命題2と3 及び仮定より明らかである。

定理3-1 の証明.

(1) は，命題1,2 より明らかである。

(2) については，$\chi(\mathcal{F},\tau,s)$（即ち，$(\mathfrak{h}_J\cdot\chi)(\mathcal{F},\tau,s)$ で $J=\phi$ の場合）は，切断 $s: M \longrightarrow \underline{P}$ が存在する事より常に零であるので，この事に注意すれば，命題1,2 より，明らかである。

定理3-2 の証明．

F_0 をホロノミーのない$\mathcal{F}$の葉とし，F のホロノミー群の位数を k とすると，$H_*(M;\mathbb{R})$ の元として，$[F]=\frac{\pm 1}{k}[F_0]$ である。この事に注意すれば，$\chi(\mathcal{F},\tau,s)=0$ より，命題2 から (1) を得る。また，(2) も同様で，$\chi_v(M/\mathcal{F})[F]=0$ と命題2 より，$[F]=0$ を得る。

以下で，命題1,2 について，証明の方針を述べる。

命題1 について．

まず，F に対して，$F^{(1)}$ を $F^{(1)}\subset\pi^{-1}(F)$ ととってよい。この時，$\sigma: F \longrightarrow \pi^{-1}(F)$ は，$F^{(1)}$ への微分同相写像である事に注意して計算すればよい。

命題2 について．

$(\mathcal{F},\tau,s)$ に対応する，(1-6) のような，$(\mathcal{F}_B,\tau_B,s_B)$ を考える。これについて，

(3-1) $(\mathfrak{h}_I\cdot Z)(\mathcal{F}_B,\tau_B,s_B)\cap[B]$

$$= \pm\, \chi(B/\mathcal{F}_B)$$

$$= \pm\, \chi(M/\mathcal{F}) \quad ((1\text{-}6)(3)).$$

従って，ファイバー束 $g: P \longrightarrow B$ に対して，

(3-2) $$(g^*(h_I \cdot Z)(\mathcal{F}_B, \tau_B, \Delta_B)) \cap [P]$$

$$= \pm\, \chi(M/\mathcal{F}) \cdot [F^{(1)}]$$

ところで，(1-6)(4) より，特性類の自然性から，

(3-3) $$g^*(h_I \cdot Z)(\mathcal{F}_B, \tau_B, \Delta_B)$$

$$= (h_I \cdot Z)(g^*\mathcal{F}_B, g^*\tau_B, g^*\Delta_B)$$

$$= (h_I \cdot Z)(\pi^*\mathcal{F}, \pi^*\tau, g^*\Delta_B)$$

及び，$^\forall J \subset I$ に対して，

(3-4) $$\pi^*(h_J \cdot Z)(\mathcal{F}, \tau, \Delta) = (h_J \cdot Z)(\pi^*\mathcal{F}, \pi^*\tau, \pi^*\Delta)$$

であるが，(1-6)(4) における，$g^*\Delta_B$ と $\pi^*\Delta$ との違いにより，

(3-5) $$(h_I \cdot Z)(\pi^*\mathcal{F}, \pi^*\tau, g^*\Delta_B)$$

$$= \sum_{J \subset I} (h_J \cdot Z)(\pi^*\mathcal{F}, \pi^*\tau, \pi^*\Delta) \cup y_{J^c}$$

となる。

以上により，命題1とあわせれば，命題2を得る。

文献

[1] C.Lazarov, J.Pasternack : Secondary characteristic classes for riemannian foliations. J. Differential Geometry 11 (1976) 365-385.

[2] S.Morita : On characteristic classes of riemannian foliations. Osaka J.Math., 16 (1979) 161-172.

[3] P.Molino : Etude des feuilletages transversalement complets et applications. Ann. Sci. Ecole Norme. Sup., 10 (1977) 289-307.

[4] I.Satake : The Gauss-Bonnet theorem for V-manifolds. J. math. Soc. Japan. 9 (1957) 464-492.

[5] K.Yamato : Sur la classe caractéristique exotique de Lazarov-Pasternack en codimension 2 II. Japan J. Math., 7 (1981) 227-256.

[6] D.Eisenbud, U.Hirsch, W.Neumann : Transverse foliations of Seifert bundles and self homeomorphism of the circle. Comment. Math. Helvetici 56 (1981) 638-660.