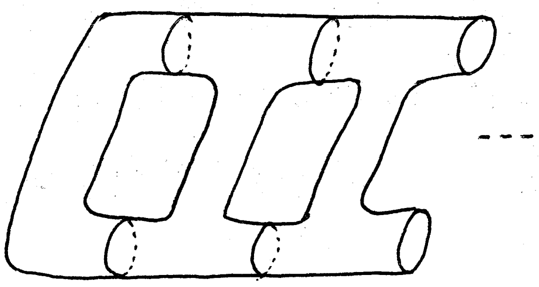
数理解析研究所講究録
479巻 1983年 11-28

Average Euler Characteristic

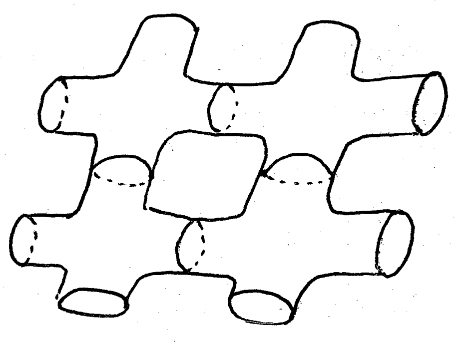
北大理　西森敏之
(Toshiyuki Nishimori)

§1. 序

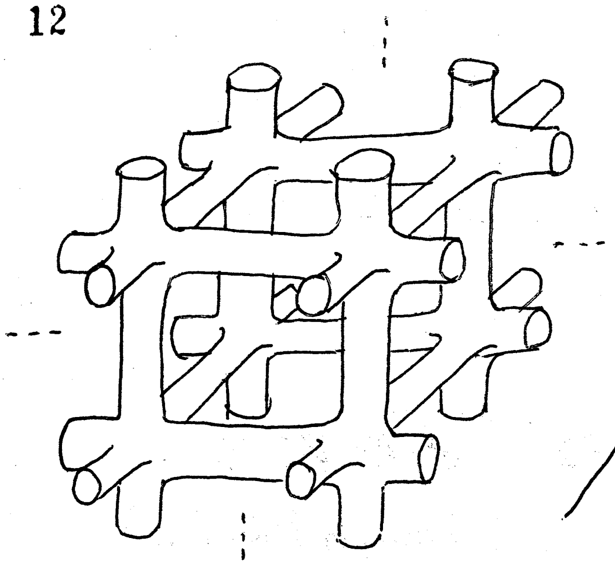
リーマン多様体(F_1, g_1)と(F_2, g_2)が quasi-isometric とは，微分同型$f: F_1 \to F_2$と正定数A, Bが存在して，$\forall v \in TF_1$に対し$A \cdot \|v\|_{g_1} \leqq \|f_* v\|_{g_2} \leqq B \cdot \|v\|_{g_1}$となることをいう。次の4例は多様体としてはどれも$T^2 \# T^2 \# \cdots$に微分同型であるが，3次元ユークリッド空間の部分空間としてのリーマン計量を与えるとそれぞれの quasi-isometry 型はすべて異なる。



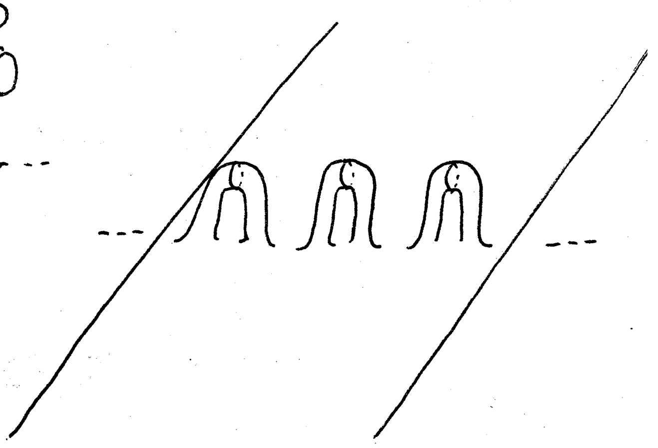
(a) Jacob's ladder



(b) Infinite jail cell window



(c) Infinite jungle gym



(d) Infinite Loch Ness monster

いま M を閉多様体, $\mathcal{F}$ を M の葉層, F を $\mathcal{F}$ の葉とし, M に任意に metric g を与えてリーマン多様体 $(F, g|F)$ を考えると, その quasi-isometry 型は g のとり方によらない。そこで次のような問題が定式化される。

問題A. 非コンパクト多様体 F に対し quasi-isometry 型を指定したとき, F がいつ閉多様体上の葉層の葉として実現できるか?

quasi-isometry 不変量としては growth 型が知られているが, Phillips-Sullivan [2] はさらに "平均Euler数" を導入して問題Aを扱った。2次元リーマン多様体 (F, g) の平均Euler数が 0 であるとは, F のコンパクト連結部分多様体の列 $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$ が

(i) $\exists x_0 \in F, \exists Q>0, \exists r_1, r_2, \cdots \to \infty$ s.t. $D_{r_i}(x_0) \subset F_i \subset D_{Qr_i}(x_0)$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \chi(F_n)/vol(F_n) = 0$,

をみたすようにとれることをいう。ただし $D_r(x_0)$ は x_0 からの距離が r 以下であるような F の点の集合をあらわす。

定理B.(*Phillips-Sullivan* [2]). M を閉多様体, $\mathcal{F}$ を向きづけ可能な2次元葉層, F を $\mathcal{F}$ の葉とする。$H_2(M;\mathbb{R})=0$ とする。もし F が *non-exponential growth* ならば, F の平均 Euler 数は 0 である。□

上の4例について調べると, *growth* とは $\mathrm{vol}\,D_r(x_0)$ の $r\to\infty$ のときの増加の速さであったから, (a)(b)(c)(d) はそれぞれ1次, 2次, 3次, 2次の *polynomial growth* である。一方, $|\chi(D_r(x_0))|$ は大雑把にいえば r に関してそれぞれ1次, 2次, 3次, 1次の多項式のように増加する。実際に (a)(b)(c) は平均 Euler 数が 0 でなく, (d) は平均 Euler 数が 0 であることが証明できる。さらに *Cantwell-Conlon* [1] により (d) は S^3 の余次元1葉層の葉として実現されている。

本稿の目標は定理Bを高次元の葉に対して拡張することである。とりあえず *Phillips-Sullivan* の平均 Euler 数 0 の定義のままでは3次元以上のリーマン多様体に対して常に平均 Euler 数が 0 になることを注意しておく。それは (i) をみたす列 $F_1\subset F_2\subset\cdots$ に対して F^n 内の $\Sigma_g\times D^{n-2}$ と微分同型な部分多様体をいくつか各 F_i に境界連結和して $|\chi(F_i)|$ を小さくするが, $\mathrm{vol}(F_i)$ はあまり変えないという操作ができるか

らである。ただし Σ_g は種数 g の向きづけ可能な閉曲面である。

§2. 平均Euler数

この§では (F, g) を向きづけ可能で完備な n 次元リーマン多様体とする。(F, g) の C^∞ 単体分割 T が一様であるとは，正定数 v, V, d, N が存在して

(a) T の一次元以上のすべての単体 σ に対して，

$$v \leqq \mathrm{vol}\,\sigma \leqq V, \quad \mathrm{diam}\,\sigma \leqq d$$

(b) T のすべての頂点 α に対して，

$$\#\{\sigma : T\text{の単体} \mid \bar{\sigma} \ni \alpha\} \leqq N$$

がなりたつことをいう。

我々は Phillips-Sullivan の平均Euler数の定義を次のように修正する。3次元以上の (F, g) の平均Euler数が0であるとは，(F, g) の一様単体分割 T が存在し，T に関する部分複体の列 $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$ で各 F_i がコンパクト連結部分多様体であるものが存在し，

(i) $\exists x_0 \in F$, $\exists Q > 0$, $\exists r_1, r_2, \cdots \to \infty$ such that

$$D_{r_i}(x_0) \subset F_i \subset D_{Qr_i}(x_0)$$

(ii) $\lim_{i\to\infty} \chi(F_i)/\mathrm{vol}\,F_i = 0$

(iii) $\lim_{i\to\infty} \mathrm{vol}\,\partial F_i/\mathrm{vol}\,F_i = 0$

がなりたつことをいう。ただし $D_r(x_0)$ は x_0 から r 以内の距離にある F の点の集合である。

奇数次元の閉多様体に関しては Euler 数は常に 0 であるが，上の定義を採用することにより平均 Euler 数についても同様のことがなりたつ。正確には次の結果を得る。

定理 1　(F, g) を奇数次元の向きづけ可能で完備なリーマン多様体とする。もし (F, g) が一様単体分割 T をもち，さらに non-exponential growth ならば，(F, g) の平均 Euler 数は 0 である。

証明　F の次元を n とし，T に対応する正定数を v，V，d，N とする。任意に $x_0 \in F$ をとる。T はある単体分割 T_0 の重心細分であると仮定してもよい。T^* を T_0 の双対 cell 分割とする。さて各 $r>0$ に対して

$$G_r = \bigcup \{\sigma^* : T^* \text{の } n\text{-cell} \mid \sigma^* \cap D_r(x_0) \neq \phi\}$$

とおくと，G_r は T の部分複体でありかつコンパクト連結部分多様体である。明らかに $G_r \subset D_{r+2d}(x_0)$。さらに

$$\partial^* G_r = \bigcup \{\sigma : T \text{の単体} \mid \sigma \cap \partial G_r \neq \phi\}$$

とおくと，$\partial^* G_r \subset D_{r+3d}(x_0) - D_{r-d}$

補題 2.1.　$vol\ \partial^* G_r \geqq \dfrac{v}{(n+1)V}\ vol\ \partial G_r$

証明.　∂G_r は少なくとも $[vol\ \partial G_r / V]$ 個の $(n-1)$ 単

体をもつ。1つのn単体は$(n+1)$個の$(n-1)$単体をもつから，$\partial^* G_r$は少なくとも$[\mathrm{vol}\,\partial G_r/(n+1)V]$個の$n$単体を含む。従って求める不等式を得る。□

次に部分複体の列$\{G_{3kd}\}_{k\in\mathbb{N}}$を考えると，$(F, g)$がnon-exponential growthであることより次のようになる。

補題2.2. $\alpha = \liminf_{k\to\infty} \mathrm{vol}\,\partial G_{3kd}/\mathrm{vol}\,G_{3kd} = 0$.

証明. $\alpha \neq 0$と仮定すると，$\nu\in\mathbb{N}$，$A>0$が存在して，$k\geqq\nu$ならば$\mathrm{vol}\,\partial G_{3kd}/\mathrm{vol}\,G_{3kd} \geqq A$がなりたつ。いま$x_k = \mathrm{vol}\,G_{3kd}$とおくと，

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} - x_{k-1} &\geqq \mathrm{vol}(D_{3kd+3d}(x_0) - D_{3kd-d}(x_0))\\
&\geqq \mathrm{vol}\,\partial^* G_{3kd} \geqq \frac{v}{(n+1)V}\mathrm{vol}\,\partial G_{3kd}\\
&\geqq \frac{vA}{(n+1)V}x_k
\end{aligned}
$$

となる。$B = \frac{vA}{(n+1)V}$とおけば，$x_{k+1} \geqq Bx_k + x_{k-1}$となる。したがって

$$x_{k+2} \geqq Bx_{k+1} + x_k \geqq (B^2 x_k + Bx_{k-1}) + x_k \geqq (1+B^2)x_k$$

より，$k\geqq\nu$なるkに対して，

$$x_k \geqq (1+B^2)^{\frac{1}{2}[k-\nu]} x_\nu$$

を得る。ところが$G_{3kd}\subset D_{3kd+2d}(x_0)$であったから

$$\mathrm{vol}\,D_{(3k+2)d}(x_0) \geqq (1+B^2)^{\frac{1}{2}[k-\nu]} x_\nu$$

となり，(F, g)がnon-exponential growthであることに矛盾する。ゆえに$\alpha = 0$が結論される。□

さて補題2.2により $\{G_{3kd}\}_{k\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{i\to\infty} \mathrm{vol}\,\partial F_i / \mathrm{vol}\,F_i = 0$ をみたすものがとれるが，$F_i = G_{r_i}$ により r_i をきめ $Q=2$ とおくと $r_1 \geqq 2d$ となるように $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を選んでおけば平均Euler数の定義の条件(i)がなりたつ。あと条件(ii)をチェックすればよい。

いま F_i の double $W_i = F_i \underset{\partial F_i}{\cup} F_i$ を考えると，W_i は奇数次元閉多様体だから，

$$\chi(W_i) = 2\chi(F_i) - \chi(\partial F_i) = 0$$

となる。

補題2.3. $|\chi(\partial F_i)| \leqq \dfrac{n!}{v} \mathrm{vol}\,\partial F_i$

証明. ∂F_i に含まれる $(n-1)$ 単体の個数は $\mathrm{vol}\,\partial F_i / v$ 以下である。1つの $(n-1)$ 単体は $(n!-1)$ 個の単体を含む。ゆえに ∂F_i に含まれる全単体の個数は $(n!/v)\,\mathrm{vol}\,\partial F_i$ より少ない。□

以上より

$$0 \leqq \lim_{i\to\infty} |\chi(F_i)|/\mathrm{vol}\,F_i = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{2}|\chi(\partial F_i)|/\mathrm{vol}\,F_i$$

$$\leqq \lim_{i\to\infty} \frac{n!}{2v}\cdot\frac{\mathrm{vol}\,\partial F_i}{\mathrm{vol}\,F_i} = 0$$

であるから $\lim_{i\to\infty} \chi(F_i)/\mathrm{vol}\,F_i = 0$ を得る。したがって，(F, g) の平均Euler数は 0 である。(定理1の証明終り)

§3. 概周期的リーマン多様体の平均Euler数

向きづけ可能で完備なn次元リーマン多様体(F, g)が<u>概周期的</u>であるとは，有限個のコンパクトなn次元リーマン多様体$(P_1, g_1), \cdots, (P_\nu, g_\nu)$が与えられ，$C, C'$をそれぞれ$\partial P_i$，$\partial P_j$の連結成分としたとき有限集合$\Phi(C, C') \subset \mathrm{Diff}(C, C')$が指定されていて，さらに正定数$A, B$と$F$のコンパクト多様体被覆$\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$が存在して

(i) $\{\mathrm{Int}\, K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$は*disjoint*，$K_\lambda \cap K_\mu$は閉多様体，

(ii) 各$\lambda \in \Lambda$に対して微分同型$\varphi_\lambda \in K_\lambda \to P_{j(\lambda)}$が存在して

$$A \cdot \|v\|_g \leqq \|\varphi_{\lambda *} v\|_{g_{j(\lambda)}} \leqq B \cdot \|v\|_g \quad (\forall v \in TM | K_\lambda),$$

(iii) さらに各連結成分$C \subset K_\lambda \cap K_\mu$に対し$C_1 = f_\lambda(C)$

$C_2 = f_\mu(C)$とおくと　$\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} | C_1 \in \Phi(C_1, C_2)$

がなりたつことをいう。このとき各(P_j, g_j)を<u>周期</u>という。周期(P_j, g_j)が<u>*essential*</u>とは　$\#\{\lambda \in \Lambda \mid j(\lambda) = j\} = \infty$となることをいう。周期$(P_j, g_j)$が<u>*frequent*</u>であるとは，ある$x_0 \in F$に対し　$f_j(r) = \#\{\lambda \in \Lambda \mid K_\lambda \subset D_r(x_0), j(\lambda) = j\}$　とおくとき

$$\limsup_{r \to \infty} f_j(r) / \mathrm{vol}\, D_r(x_0) > 0$$

となることをいう。

(F, g)が概周期的であるかどうかは*quasi-isometry*不変量である。概周期的な(F, g)は一様単体分割をもつ。それは

各周期(P_i, g_i)に対し∂P_iの単体分割を有限個とりどの$\varphi \in \Phi(C_1, C_2)$に対しても$C_1$のある単体分割が$\varphi$で$C_2$のある単体分割に対応するようにしておいて，それらをP_iの単体分割に拡張したものを準備しておいて，各K_λに対して他のK_μたちとのはりつけ具合をみてふさわしい$P_{j(\lambda)}$の単体分割をK_λに移せばよいからである。

概周期的なリーマン多様体に対しては次のように平均Euler数が計算できる。

定理２　(F, g)を偶数次元の向きづけ可能で完備なリーマン多様体とする。(F, g)が*non-exponential growth*とし，さらに概周期的であるとしてその周期の族$\{(P_j, g_j)\}_{j=1}^{\nu}$などを１組とり固定しておく。

(1) もしすべての*frequent*な周期(P_j, g_j)に対し$\chi(P_j) = 0$ならば，(F, g)の平均Euler数は0である。

(2) もしすべての*essential*な周期(P_j, g_j)に対して$\chi(P_j) > 0$ (< 0)ならば　(F, g)の平均Euler数は0ではない。

証明．$x_0 \in F$とする。上の注意のように(F, g)の一様単体分割Tをとり，その正定数をv, V, d, Nとする。K_λはTに関する部分複体となっている。(F, g)が概周期的であることから，正定数v^*, V^*, d^*, N^*が存在して，

$$v^* \leqq vol\, K_\lambda \leqq V^*,\ diam\ K_\lambda \leqq d^*$$

CをK_λの連結成分とするとき，$v^* \leqq vol\, C \leqq V^*$

$$\#\{C \mid C: K_\lambdaの連結成分\} \leqq N^*$$

がなりたつ。

補題3.1. (F, g) に対し正定数 C_1, C_2 が存在して，F の余次元1 p.l.閉部分多様体 S が Tに関する部分複体になっているとき，Sから r以内の距離にある点の集合を $N_r(S)$ と表わせば

$$vol\ N_r(S) \leqq e^{C_1 r + C_2}\ vol\, S$$

証明. (F, g) の断面曲率が有界なことから，正定数 ε_0 と単調増加関数 $C: (0, \varepsilon_0] \longrightarrow R$ が存在して，

$\forall x \in F$ と $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ に対し $vol\ D_\varepsilon(x) \leqq C(\varepsilon)$

がなりたつ。必要ならば重心細分をくりかえして $15d \leqq \varepsilon_0$ と仮定しておいてよい。Sに含まれるTの頂点の集合を $\mathcal{V}(S)$ とおくと

$$N_{12d}(S) \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{V}(S)} D_{13d}(\alpha)$$

となる。いま $N^*(S) = \bigcup\{\sigma^* : T^*の\ n\text{-cell} \mid \sigma^* \cap N_{10d}(S) \neq \phi\}$ とおくと，$N^*(S)$ は Fのp.l.部分多様体であり

$$\partial N^*(S) \subset N_{12d}(S) - N_{10d}(S)$$

となる。したがって

$$vol\ N^*(S) \leqq vol\Big(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{V}(S)} D_{13d}(\alpha)\Big)$$

$$\leqq C(13d)\cdot \#\mathcal{V}(S) \leqq C(13d)\cdot \frac{n}{v}\cdot vol\, S$$

を使って

$$vol\, \partial N^*(S) \leqq V\cdot \#\{\sigma : (n-1)\text{単体} \mid \sigma \subset \partial N^*(S)\}$$
$$\leqq V\cdot \#\mathcal{V}(N^*(S))\cdot N$$
$$\leqq NV\cdot \frac{(n+1)}{v} vol\, N^*(S) \leqq \frac{n(n+1)}{v^2} NV\cdot C(13d)\cdot vol\, S$$

を得る。$K_1 = Max\{2, C(13d)\cdot \frac{n}{v}\}$, $K_2 = Max\{2, \frac{n(n+1)}{v^2}\cdot NV\cdot C(13d)\}$ とおく。

次に $S' = \partial N^*(S)$ に対して上と同じ操作をすれば,

$$vol\, N^*(S') \leqq K_1\cdot vol\, S', \quad vol\, \partial N^*(S') \leqq K_2\cdot vol\, S'$$

となる。この操作を $([r/10d]+1)$ 回くりかえせば, $N_r(S)$ を覆う p.l. 部分多様体

$$N^*(S) \cup N^*(\partial N^*(S)) \cup \cdots \cup N^*(\partial N^*(\cdots(\partial N^*(S))\cdots))$$

を得るから, $r' = ([r/10d]+1)$ とおけば

$$vol\, N_r(S) \leqq K_1(K_2 + K_2^2 + \cdots + K_2^{r'})\, vol\, S$$
$$< K_1 K_2^{r'} \frac{1}{1-\frac{1}{K_2}}\, vol\, S < \frac{K_1 K_2}{K_2 - 1} K_2^{\frac{r}{10d}+1}\, vol\, S$$

従って

$$C_2 = \log \frac{K_1 K_2^2}{K_2 - 1}, \quad C_1 = \frac{\log K_2}{10d}$$

とおけば求める不等式を得る。□

(1) の証明. いま $r>0$ に対して $G_r = \cup\{K_\lambda \mid K_\lambda \cap D(x_0) \neq \phi\}$ とおくと, 定理1の証明と同様にして $\{G_{3kd^*}\}_{k\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{F_i\}_{\in\mathbb{N}}$ が

(i) $\exists r_1, r_2, \cdots \to \infty$ s.t. $D_{r_i}(x_0) \subset F_i \subset D_{r_i+d^*}(x_0)$

(iii) $\lim_{i\to\infty} \mathrm{vol}\,\partial F_i / \mathrm{vol}\,F_i = 0$

をみたすようにとれる。さらに $\partial^* D_{r_i}(x_0) = \bigcup \{ K_\lambda \mid K_\lambda \cap \partial D_{r_i}(x_0) \neq \phi \}$ とおくと

$$\partial^* D_{r_i}(x_0) \subset N^*_{2d}(\partial F_i)$$

となる。いま $f_{j,i} = \# \{ K_\lambda \subset F_i \mid j(\lambda) = j \}$ とおくと，

$$| f_j(r_i) - f_{j,i} | \leqq \# \{ K_\lambda \mid K_\lambda \subset \partial^* D_{r_i}(x_0) \}$$
$$\leqq \mathrm{vol}\, N^*_{2d}(\partial F_i)/v^* \leqq \frac{1}{v^*} e^{C_1 \cdot 2d + C_2}\, \mathrm{vol}\,\partial F_i$$

となる。

補題 3.2. $\lim_{i\to\infty} \mathrm{vol}\,\partial D_{r_i}(x_0) / \mathrm{vol}\,F_i = 1$.

証明. $F_i - D_{r_i}(x_0) \subset \partial^* D_{r_i}(x_0)$ より，

$$|\mathrm{vol}\,F_i - \mathrm{vol}\,D_{r_i}(x_0)| \leqq \mathrm{vol}\,N^*_{2d}(\partial F_i)$$
$$\leqq e^{C_1 \cdot 2d + C_2}\, \mathrm{vol}\,\partial F_i$$

となるから

$$\left| 1 - \frac{\mathrm{vol}\,D_{r_i}(x_0)}{\mathrm{vol}\,F_i} \right| \leqq e^{C_1 \cdot 2d + C_2} \cdot \frac{\mathrm{vol}\,\partial F_i}{\mathrm{vol}\,F_i} \to 0 \quad (i \to \infty)$$

を得る。□

以上のことを使えば，

$$\limsup_{i\to\infty} \frac{|\chi(F_i)|}{\mathrm{vol}\,F_i} = \limsup_{i\to\infty} \frac{\left| \sum_{j=1}^{\nu} f_{ji} \cdot \chi(P_j) \right|}{\mathrm{vol}\,F_i}$$

$$\leqq \limsup_{i\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}\,F_i}\cdot\sum_{j=1}^{\nu}\left(f_j(r_i)+\frac{1}{v^{\star}}e^{c_1\cdot 2d+c_2}\mathrm{vol}\,\partial F_i\right)|\chi(P_j)|$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{\nu}\left(\limsup_{i\to\infty}\frac{f_j(r_i)}{\mathrm{vol}\,F_i}\right)|\chi(P_j)|$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\limsup_{i\to\infty}\frac{f_j(r_i)}{\mathrm{vol}\,D_{r_i}(x_0)}\right)\cdot|\chi(P_j)| = 0.$$

ゆえに $\lim \chi(F_i)/\mathrm{vol}\,F_i = 0$ となり，(F, g) の平均 Euler 数は 0 である。□

(2) の証明. 平均 Euler 数の定義におけるような列 $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$ で (i)(iii) をみたすものがあったとする。いま $F_i^{\star} = \cup\{K_\lambda \mid F_i \cap K_\lambda \neq \phi\}$ とおくと，

$$F_i^{\star} - F_i \subset N^{*}_{d^{\star}}(\partial F_i)$$

となる。補題 3.2. と同様にして

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{vol}\,F_i^{\star}/\mathrm{vol}\,F_i = 1 \text{ となる。}$$

補題 3.3. $\liminf_{i\to\infty} \chi(F_i^{\star})/\mathrm{vol}\,F_i^{\star} = \liminf_{i\to\infty} \chi(F_i)/\mathrm{vol}\,F_i$

証明.

$$\left|\liminf_{i\to\infty}\frac{\chi(F_i^{\star})}{\mathrm{vol}\,F_i^{\star}} - \liminf_{i\to\infty}\frac{\chi(F_i)}{\mathrm{vol}\,F_i}\right|$$

$$\leqq \limsup_{i\to\infty}\frac{|\chi(F_i^{\star})-\chi(F_i)|}{\mathrm{vol}\,F_i}$$

$$\leqq \limsup_{i\to\infty}\frac{(n+1)!}{v}\cdot e^{c_1 d^{\star}+c_2}\cdot\frac{\mathrm{vol}\,\partial F_i}{\mathrm{vol}\,F_i} = 0 \qquad \square$$

さて $\chi_{min} = \mathrm{Min}\{\chi(P_j) \mid P_j$: essential な周期$\}$ とおくと仮定より $\chi_{min} > 0$ であるから

$$\liminf_{i\to\infty} \frac{\chi(F_i^{\star})}{\mathrm{vol}\, F_i^{\star}} = \liminf_{i\to\infty} \frac{\sum_{K_\lambda \subset F_i^{\star}} \chi(K_\lambda)}{\sum_{K_\lambda \subset F_i^{\star}} \mathrm{vol}\, K_\lambda}$$

$$\geqq \frac{\chi_{min}}{V^{\star}} > 0.$$

ゆえに $\lim_{i\to\infty} \dfrac{\chi(F_i)}{\mathrm{vol}\, F_i} = 0$ とはならない。したがって $(\mathcal{F}, g)$ の平均 Euler 数は 0 ではない。

§4 主定理

定理Bの拡張として次の結果を得る。

定理3. M を次元 $2n+1$ ($\geqq 5$) の向きづけ可能な C^∞ 閉多様体とし，$\mathcal{F}$ を余次元1の向きづけ可能な C^∞ 葉層とし F をその葉とする。

(1) $H_1(M; \mathbb{R}) = 0$ ($\Leftrightarrow H^{2n}(M; \mathbb{R}) = 0$)

(2) $\overline{F}$ は有限枚の葉の和 ($\Leftrightarrow F$: finite depth)

と仮定すると，F の平均 Euler 数は 0 である。

証明. まず次のことに注意する。

補題4.1. 定理3の仮定のもとで F' を $\mathcal{F}$ の閉葉とすると，$\chi(F') = 0$ である。

証明. e を $T\mathcal{F}$ の Euler form とすると，仮定(1)より

eのコホモロジー類は0である。したがって

$$\chi(F') = \langle [\iota^* e], [F'] \rangle = \int_{F'} e = 0$$

となる。ただし $\iota : F' \subset M$ は包含写像。□

我々の証明のアイデアは基本的に次の土屋[3,4]の定理から出ている。

定理C (N. Tsuchiya) 向きづけ可能なC^∞閉多様体上の向きづけ可能な余次元1 C^∞葉層の葉Fが*finite depth*であれば，Fは*tame*である。さらにFは*polynomial growth*である。□

紙数の都合で残念ながら "*tame*" の定義を省略せざるを得ないが，定理Cおよびその証明を詳しくみれば，次の事実が示せる。

補題4.2. 定理3の仮定((1)はのぞく)のもとで，Mのリーマン計量gを1つとれば，$(F, g|F)$は概周期的である。さらにその周期の族$\{(P_j, g_j)\}_{j=1}^{\nu}$，コンパクト多様体被覆$\{K_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$，$C^\infty$微分同型$\varphi_\lambda : K_\lambda \to P_{j(\lambda)}$ 等の組が次のようにとれる。すなわち $j = 1, \cdots, \nu$ に対して，

$$f_j(r) = \#\{ K_\lambda \subset D_r(x_0) \mid j(\lambda) = j \}$$

とおくとき，上のp_j次多項式$a_j(r)$, $A_j(r)$が存在して

$$a_j(r) \leqq f_j(r) \leqq A_j(r)$$

となり，Fをp次の*polynomial growth*とするとき，

(イ) 各 j に対し，$p_j \leqq p$ であり，

(ロ) 少なくとも1つの j に対し，$p_j = p$ となり，

(ハ) $p_j = p$ ならば，P_j は $\mathcal{F}$ のあるコンパクトな葉 F_j の余次元1閉部分多様体 N_j で F_j を切り開いてできる境界をもつコンパクト多様体 $C(F_j, N_j)$ と同相である。□

さて上の補題を使って $\mathcal{F}$ が定理2の(1)の条件をみたすことを示す。まず F が p 次の *polynomial growth* であるから，r の p 次多項式 $a(r)$, $A(r)$ が存在して

$$a(r) \leqq vol\, D_r(x_0) \leqq A(r)$$

となる。このことから $p_j < p$ をみたす j に対して，

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{f_j(r)}{vol\, D_r(x_0)} \leqq \limsup_{r\to\infty} \frac{A_j(r)}{a(r)} = 0$$

となり，$p_j = p$ をみたす j に対しては，

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{f_j(r)}{vol\, D_r(x_0)} \geqq \liminf_{r\to\infty} \frac{a_j(r)}{A(r)} > 0$$

となる。以上より *frequent* な周期 (P_j, g_j) に対しては，$p_j = p$ となり補題4.2 (ハ) より

$$\begin{aligned}\chi(P_j) &= \chi(C(F_j, N_j)) \\ &= \chi(F_j) + 2\chi(N_j) - \chi(N_j \times [0,1]) \\ &= \chi(F_j) \quad (\because N_j \text{ は奇数次元閉多様体}) \\ &= 0 \quad (\because F_j \text{ は } \mathcal{F} \text{ のコンパクトな葉})\end{aligned}$$

を得る。ゆえに定理2(1)によりFの平均Euler数は0である。(定理3の証明終り)□

§5. 予想

定理2の(2)を使えば，§1の例にS^{2n}をかけたもののうち，(a)$\times S^{2n}$，(b)$\times S^{2n}$，(c)$\times S^{2n}$は平均Euler数が0でないことが示せる。(d)$\times S^{2n}$については$S^3\times S^{2n}$のある余次元1葉層のfinite depthの葉として実現されることが前述のCantwell-Conlon[1]の結果よりわかる。このことより我々の平均Euler数の定義と定理3がnon-trivialであることがわかる。さらに定理1，2，3とその証明をみれば我々の平均Euler数の定義が妥当であると思えてくる。そこで我々は次のように予想する。

予想 定理3の条件(2)を次の条件

(2′) "Fはnon-exponential growthである"

に変えてもFの平均Euler数は0であろう。

参考文献

[1] Cantwell-Conlon, Leaves with isolated ends in foliated 3-manifolds, Topology 16 (1977), 311-322.

[2] Phillips-Sullivan, Geometry of leaves, Topology 20 (1981), 209-218.

[3] N. Tsuchiya, Growth and depth of leaves, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA 26 (1979), 473-500.

[4] N. Tsuchiya, Leaves of finite depth, Japan J. Math. 6 (1980), 343-364.