数理解析研究所講究録
479巻 1983年 1-10

Truncated Weil Algebra の有理ホモトピー型

埼玉大教養部 柴田勝征 (Katsuyuki Shibata)

§1. 葉層構造の双対ホモトピー不変量 (d'après S. Hurder)

C^∞多様体M上に余次元qの葉層構造$\mathcal{F}$が与えられると、その法束$\nu_{\mathcal{F}}$に付随した主束に対して、Weil準同型写像

$$\omega:\ I^*(GL(q,\mathbb{R})) \longrightarrow \Omega^*(M)$$

が定義され、更にAdapted (Bott) 接続を用いれば上のωは

$$\bar{\omega}:\ I^*(GL(q,\mathbb{R}))_q \longrightarrow \Omega^*(M)$$

によってfactorされる。ただし、一般にGをLie群、$\mathfrak{g}$をそのLie環とする時、$I^*(G)$は$\mathfrak{g}$上の$Ad(G)$不変な多項式全体の作る環を表わすものとし、$I^*(G)_q \equiv I^*(G)/(\deg > 2q)$と定義する。具体的には、$I^*(GL(q,\mathbb{R})) \cong I^*(GL(q,\mathbb{C})) \cong \mathbb{R}[c_1, c_2, \cdots, c_q]$ (c_iはi次普遍Chern類) となっている。簡単のため、以後$I^*(GL(q,\mathbb{R}))_q$を$I(q)$と略記する。

$\bar{\omega}$はdifferential graded algebra (DGAと略記する) 準同型だから、両辺のSullivanの意味の極小モデルの間の写像を引き起こす。

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}(I(\mathfrak{g})) & \xrightarrow{\mathcal{M}(\overline{\omega})} & \mathcal{M}(\Omega^*(M)) \\
\xi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \eta_M \\
I(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\overline{\omega}} & \Omega^*(M)
\end{array}
$$

一般に、DGA A^*が $H^0(A^*) \cong \mathbb{R}$ を満たす時、A^*の双対ホモトピー群 $\Pi^*(A^*)$ を、$\overline{\mathcal{M}}(A^*)/(\overline{\mathcal{M}}(A^*))^2$ により定義する。ここに $\overline{\mathcal{M}}(A^*)$ は $\mathcal{M}(A^*)$ の augmentation 核（$= \mathcal{M}(A^*)$ の正の degree の元全体）である。

故に、Mを連結と仮定しておくと、$\mathcal{M}(\overline{\omega})$ は準同型

$$\Pi^*(\overline{\omega}) \ : \ \Pi^*(I(\mathfrak{g})) \longrightarrow \Pi^*(M) = \Pi^*(\Omega^*(M))$$

を定義する。もともと、Weil 準同型は、接続の曲率形式を用いて定義されていたが、$\Pi^*(\overline{\omega})$ は接続の取り方によらず、$\mathcal{F}$の concordance class にのみ依存する事が証明される。

特に、Mが単連結な時は、Sullivan の基本定理によって、$\Pi^*(M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_*(M), \mathbb{R})$ が成り立つ事に注意する。

上の $\Pi^*(\overline{\omega})$（およびその像）を Harder は葉層の双対ホモトピー不変量と呼んだ。([2]) これと、葉層の2次特性類とは、双対 Hurewicz 準同型写像によって結ばれているが、簡単の為、法束 $\nu_{\mathcal{F}}$ が自明の場合に限って説明する。$\nu_{\mathcal{F}}$ が自明の時は、DGA $\widehat{W}_{\mathfrak{g}} = I(\mathfrak{g}) \underset{\tau}{\otimes} E(h_1, h_2, \cdots, h_{\mathfrak{g}})$; $d(h_i) = c_i$ を用いて、第2特性類の写像 $\Delta_* : H^*(\widehat{W}_{\mathfrak{g}}) \longrightarrow H^*(M)$ が定

義され、双対フレビッチ準同型 $\bar{H}$ により、次の図式が可換となる。

$$\begin{tikzcd} \pi^*(I_{(q)}) \arrow[r, "\pi^*(\bar{\omega})"] & \pi^*(M) \\ H^*(\hat{W}_q) \arrow[u, "\zeta"', "(\mathrm{mono})"] \arrow[r, "\Delta_*"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & H^*(M) \arrow[u, "\bar{H}"'] \end{tikzcd}$$

ここに、ζは或る単射な線型写像であって、次節で述べるが、ある意味で双対フレビッチ準同型とみなせる自然な写像である。上の図式は葉層$(M, \mathcal{F})$に関して functorial なので、多様体Mの代りに分類空間 $B\Gamma^q$, $F\Gamma^q$ などを入れる事ができて、これらの空間のホモトピー，コホモロジーの研究に役に立つのである。双対ホモトピー不変量を考えるメリットは、上の図式で言うと、$H^*(\hat{W}_q)$ の積が trivial (Vey の結果)で、単なるベクトル空間としての意味しか無いのに対して、$\pi^*(I_{(q)})$ は(無限次元) Lie 環の dual としての構造が入っている点にある。その構造を完全に決定するには、極小モデル $\mathcal{M}(I_{(q)})$ を具体的に求めなければならない。

§2. Gelfand-Fuks コホモロジーとの関係

C^∞多様体M上のC^∞ベクトル場全体の作る位相 Lie 環を$\mathfrak{L}_M$とし、その連続な余鎖複体を$C_c^*(\mathfrak{L}_M)$と表わすと、その

コホモロジー$H_C^*(\mathcal{L}_M)$が Gelfand-Fuks のコホモロジーである。

さて、$\gamma_n: EU_n \longrightarrow BU_n$ を普遍U_n-束とし、$\gamma_n^{(2n)}: EU_n^{(2n)} \longrightarrow BU_n^{(2n)}$ を、BU_n の $2n$-skeleton $BU_n^{(2n)}$ 上への γ_n の制限として、γ_n と $\gamma_n^{(2n)}$ のファイバー積

$$\hat{\gamma}_n : EU_n^{(2n)} \longrightarrow EU_n^{(2n)} \underset{U_n}{\times} EU_n \longrightarrow BU_n$$

を考える。

C^∞-多様体Mの接バンドルの複素化$\tau_{\mathbb{C}}^M$が写像$f_M^{\mathbb{C}}: M \longrightarrow BU_n$ によって類別されるとき、induced束$(f_M^{\mathbb{C}})^*\hat{\gamma}_n$ の cross-sections 全体の作る位相空間$\Gamma((f_M^{\mathbb{C}})^*(\hat{\gamma}_n))$を考えると、

$$H^*(\Gamma((f_M^{\mathbb{C}})^*(\hat{\gamma}_n)); \mathbb{R}) \cong H^*(C_c^*(\mathcal{L}_M))$$

が成り立つ。(Bott-Fuks 予想, Haefliger, Bott-Segal, Fuks らにより肯定的に解決)

この結果を使って Gelfand-Fuks コホモロジーの計算を行なう為に、$\hat{\gamma}_n$ の (Sullivan の意味の) 代数的モデルを求めよう。そのために、まずγ_n のモデルを考えると、底 BU_n のモデルは $R[c_1, c_2, \cdots, c_n]$, $d(c_i)=0$ であり、fiber U_n のモデルは $E(h_1, h_2, \cdots, h_n)$, $d(h_i)=0$ であり、全空間EU_n のモデルは $R[c_1, c_2, \cdots, c_n] \underset{\tau}{\otimes} E(h_1, h_2, \cdots, h_n)$, $d(h_i)=c_i$ となる。記号$\underset{\tau}{\otimes}$ は differential d がネジレ (torsion) を持っている事を表わす。従って $\gamma_n^{(2n)}$ のモデルは $(R[c_1, c_2, \cdots, c_n]/(\deg > 2n)) \underset{\tau}{\otimes} E(h_1, h_2, \cdots, h_n)$,

$d(h_i)=c_i$ となる。§1 で使った記号を用いれば、$\hat{W}_n$に等しい。故に$\hat{\gamma}_n$の（全空間の）モデルは $R[\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_n] \underset{\tau}{\otimes} \hat{W}_n$；$d(h_i)=c_i-\bar{c}_i$，$d(c_i)=d(\bar{c}_i)=0$ となる。（同じ普遍Chern類のコピーが底とfiberの両方に出て来るので、区別するために一方をc_iで、他方を$\bar{c}_i$で表わした。） $R[\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_n]$ を$\bar{I}^n$と略記する事にする。

さて$\hat{\gamma}_n$をBU_n上の$EU_n^{(2n)}$をfiberとするfiber束と考えて話を進めて来たが、見方を変えて、$EU_n^{(2n)} \underset{U_n}{\times} EU_n$ から才1成分への射影を考えると、$EU_n \longrightarrow EU_n^{(2n)} \underset{U_n}{\times} EU_n \longrightarrow BU_n^{(2n)}$ という、$BU_n^{(2n)}$上のEU_nをfiberとするfiber束が得られる。これは可縮なfiberを持つfiber束だから、上の射影は全空間と底とのホモトピー同値を与えている。$BU_n^{(2n)}$のモデルが$I_{(n)}$だから、§1 で残した課題「$\mathcal{M}(I_{(n)})$を求めよ」を解結するためには、$\hat{\gamma}_n$（の全空間）の極小モデルを求める事が必要かつ十分である事がわかった。この極小モデルの具体的表示を次節で与えるが、ここではひとまず、この極小モデルが存在するという「存在定理」を前提にして話を進めよう。

「モデルのファイバーは、ファイバーのモデルに等しい」という Grivel の定理を使うと、$\hat{\gamma}_n$の極小モデルは

$$\psi : \bar{I}^n \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{M}(\hat{W}_n) \xrightarrow{\ \simeq\ } \bar{I}^n \underset{\tau}{\otimes} \hat{W}_n$$

という quasi-isomorphism（コホモロジーの同型を与える準同型）

である。上に述べたホモトピー同値の関係から

$$\mathcal{M}(I_{(n)}) \cong \bar{I}^n \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{M}(\hat{W}_n) \underset{incl.}{\overset{proj.}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}(\hat{W}_n)$$

従って、

$$\Pi^*(I_{(n)}) \cong \{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_n\}_{\mathbb{R}} \oplus \Pi^*(\hat{W}_n) \underset{incl.}{\overset{proj.}{\rightleftarrows}} \Pi^*(\hat{W}_n)$$

となる。ところで、Vey の結果から $\hat{W}_n$ は球面の bouquet と同じ有理ホモトピー型を持つので、双対フレビッチ準同型写像 $\tilde{H}^*(\hat{W}_n) \longrightarrow \Pi^*(\hat{W}_n)$ が考えられる。これと上の inclusion を結合したものが、§1 で述べた $\zeta : \tilde{H}^*(\hat{W}_n) \longrightarrow \Pi^*(I_{(n)})$ (才2特性類と双対ホモトピー不変量の関係) である。具体的には、

$$\begin{aligned}\Pi^*(\hat{W}_n) &= \mathrm{Hom}(\sigma L(\sigma^{-1}\mathrm{Hom}(\tilde{H}^*(\hat{W}_n), \mathbb{R})), \mathbb{R}) \\ &\underset{incl.}{\overset{proj.}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}(\sigma(\sigma^{-1}\mathrm{Hom}(\tilde{H}^*(\hat{W}_n), \mathbb{R})), \mathbb{R}) \\ &\cong \tilde{H}^*(\hat{W}_n)\end{aligned}$$

であり、故に ζ は単射である。ここに σ (resp. σ^{-1}) は懸垂 (resp. 逆懸垂) を表わし、$L(\ldots)$ は自由 Lie 環を表わす。

また、$\hat{\gamma}_n$ のモデルにおいて、$\bar{I}^n$ の代りに $\bar{I}^n/(c_{2i-1}\,;\,2i-1 \leqq n)$ で置き換えて上と同様の議論をすると、

$$\bar{I}^n/(c_{odd}) \underset{\tau}{\otimes} \hat{W}_n = \underset{\underset{\hat{W}O_n}{|||}}{(I_{(n)} \underset{\tau}{\otimes} E(h_{2i-1}\,;\,2i-1 \leqq n))} \otimes \underset{\underset{\mathbb{R}}{\wr|}}{(\bar{I}^n/(c_{odd}) \underset{\tau}{\otimes} E(h_{2i}\,;\,2i \leqq n))}$$

だから $\mathcal{M}(\hat{W}O_n) \cong \bar{I}^n/(c_{odd}) \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{M}(\hat{W}_n)$ である事がわかる。

Kamber-Tondeur は Truncated Weil Algebra $W(\mathfrak{g}, H)_q \equiv (\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes I^*(G)_q)^H$ を定義したが、特に、$\mathcal{M}(\hat{W}_q) \cong \mathcal{M}(W(\mathfrak{gl}(q;\mathbb{R}),$

$\{e\})_{\mathfrak{g}}$), $\mathcal{M}(\hat{W}O_{\mathfrak{g}}) \cong \mathcal{M}(W(gl(\mathfrak{g};\mathbb{R}), O_{\mathfrak{g}})_{\mathfrak{g}})$ である事に注意しておく。

§3. Sullivan-Quillen 混合型 fibration

この節では、§1, §2 で述べた極小モデルを explicit に記述するマシンを与える。

一般に、A^*を non-negatively graded かつ augmented (すなわち、$A^* \underset{u}{\overset{\varepsilon}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}$) な DGA とする時、$A_{-*} \equiv A^*$ と定義する。

[定義] A_* 上の graded Lie環 L_* が、A_* 上の <u>Sullivan-Quillen混合型 fibration</u> であるとは、

(i) L_* は自由 A_*-加群 (すなわち、$L_* \cong A_* \otimes \bar{L}_*$)

(ii) $(\mathbb{R} \underset{A_*}{\otimes} L_*)_i = 0$ $(i<0)$, $\dim(\mathbb{R} \underset{A_*}{\otimes} L_*)_i < \infty$ $(i \geq 0)$

(iii) L_* には、次の性質を満たす $\chi \in L_{-2}$ (オイラー元) と A_*-Lie derivation $D : L_* \to L_{*-1}$ (共変外微分) が与えられている。

① (Bianchi 等式) $D(\chi) = 0$

② (曲率公式) $D^2(y) + [\chi, y] = 0$ $(^\forall y \in L_*)$

これに対して、A^*上の Sullivan 型 fibration は次の様に定義する。

[定義] A^* 上の DGA E^* が <u>Sullivan 型 fibration</u> である、とは

(i) E^* は自由 A^*−加群 (すなわち $E^* \cong A^* \otimes \bar{E}^*$)

(ii) $(\mathbb{R} \otimes_{A^*} E^*)^i = 0 \ (i<0)$, $(\mathbb{R} \otimes_{A^*} E^*)^0 \cong \mathbb{R}$,

$$\dim (\mathbb{R} \otimes_{A^*} E^*)^i < \infty \quad (i>0)$$

また、A^*−alg. homo $e : E^* \to A^*$ で、unit map $u : A^* \to E^*$ の左逆元 ($e \circ u = id_{A^*}$) となるものを、この fibration の<u>局所切断</u>と言う。

A^* 上の Sullivan−Quillen 混合型 fibration (L_*, χ, D) に対して、局所切断を持つ Sullivan 型 fibration $C_A^*(L_*, \chi, D)$ を対応させる、<u>Generalized Koszul cochain complex functor</u> と、A^* 上の Sullivan 型 fibration E^* とその局所切断 e に対して、Sullivan−Quillen 混合型 fibration $L_*^A(E^*, e)$ を対応させる <u>Generalized Quillen L functor</u>、およびそれらの adjunction homo が定義できる。[3]

そこで、§1, 2 のファイバー束 $\hat{\delta}_n$、およびそのモデル $I^n \to I^n \otimes_\tau \hat{W}_n$ について考える。$I_n \otimes H^*(\hat{W}_n)$ に (non-trivial な) 積と微分 d を定義し、また準同型 $\psi_V : I_n \otimes_\tau H^*(\hat{W}_n) \to I_n \otimes \hat{W}_n$ で quasi-isomorphism となるものが定義される。そして、$\hat{\delta}_n$ の極小モデル (従って、$\mathcal{M}(I_{(n)})$) は次の形で与える事ができる。

$$\psi_V \circ \beta : C_{I^n}^* \circ L_*^{I^n} (I^n \otimes_\tau H^*(\hat{W}_n)) \to I_n \otimes_\tau H^*(\hat{W}_n) \to I_n \otimes \hat{W}_n$$

ここに、β は上に述べた 2 つの functors の adjunction homo を

表わす。これらの functors の定義は [3] で explicit に与えてあるから、上の結果により、極小モデルが explicit に計算可能となった。

また、$I^r/(C_{odd}) \cong P_n \equiv R[p_1, p_2, \cdots, p_i ; i \leqq 2n]$ の同一視により、Haefliger が [1] で出した問題「P_n 上の Sullivan 型 fibration $P_n \underset{\tau}{\otimes} \hat{W}_n$ の極小モデルを explicit に表現せよ」の解答が与えられる。すなわち、その極小モデルは

$$\hat{\psi}_V \circ \beta : C^*_{P_n} \circ L^{P_n}_* (P_n \underset{\tau}{\otimes} H^*(\hat{W}_n)) \to P_n \underset{\tau}{\otimes} H^*(\hat{W}_n) \to P_n \underset{\tau}{\otimes} \hat{W}_n$$

である。

さて、上の Haefliger の問題は次のような意味をもっている。C^∞ 多様体 M の i 次 Pontrjagin 類の代表元 $\tilde{p}_i \in \Omega^{4i}(M)$ を固定すると、$p_i \mapsto \tilde{p}_i$ の写像により、$\Omega^*(M)$ は P_n ー加群となる。これを用いて、DGA $\Omega^*(M) \underset{\tau}{\otimes} H^*(\hat{W}_n) \cong \Omega^*(M) \underset{P_n}{\otimes} (P_n \underset{\tau}{\otimes} H^*(\hat{W}_n))$ を考え、$L^{\Omega^*(M)}_* (\Omega^*(M) \underset{\tau}{\otimes} H^*(\hat{W}_n))$ について考えると、これは、定義から $\Omega^*(M)$ 上の微分 Lie 環であるが、$\Omega^*(M)$ − 加群である事を忘れれば、$\mathbb{R}$ 上の微分 Lie 環であって、$\Omega^*(M)$ の C^∞ 位相から来る位相が入っている。そこで、この位相微分 Lie 環の連続 cochain complex $C^*_{\mathbb{R}}(L^{\Omega^*(M)}_*(\Omega^*(M) \underset{\tau}{\otimes} H^*(\hat{W}_n)))$ を取ると、これから、Gelfand-Fuks の cochain $C^*_c(\mathcal{L}_M)$ への DGA homo で、コホモロジーの同型を induce するものが存在する。これが Haefliger の基本定理(の我々による精密化)である。

[引用文献]

[1] A. Haefliger: Sur la cohomologie de Gelfand-Fuks, Lecture Notes Math., No. 484, p. 121-152

[2] S. Hurder: Dual homotopy invariants of G-foliations, Topology, vol 20, No. 4 (1981), p. 365-387

[3] K. Shibata: Sullivan-Quillen mixed type model for fibrations, preprint