数理解析研究所講究録
480巻 1983年 230-236

Nonstandard arithmetic of function fields over H-convex subfields of ${}^*\mathbb{Q}$

名大理 安本雅洋 (Masahiro Yasumoto)

$\mathbb{Q}$を有理数体，${}^*\mathbb{Q}$を$\mathbb{Q}$の nonstandard model，Hを${}^*\mathbb{Q}$上の height，すなわち

$$H\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\max(|\alpha|,|\beta|)\qquad(\alpha,\beta\in{}^*\mathbb{Z},\ (\alpha,\beta)=1)$$

とする。

${}^*\mathbb{Q}$の部分体Q_1が，H-convex であるとは，$x\in Q_1$で，$H(y)\leq H(x)$ならば，$y\in Q_1$が成立することとする。

H-convex subfield Q_1は，${}^*\mathbb{Q}$の中で，代数的に閉じている。(Lemma 1) 従って，$x\in{}^*\mathbb{Q}-Q_1$とし，$y\in{}^*\mathbb{Q}$を$Q_1(x)$上，代数的な元とすると，$Q_1(x,y)$は，Q_1を constant field とする，一変数代数関数体になる。 この論文においては，${}^*\mathbb{Q}$の divisor theory と，$Q_1(x,y)$の divisor theory との関係についての結果を証明する。 これらの結果の，不定方程式論への応用については，[2] を参照されたい。

Lemma 1. ${}^*\mathbb{Q}$の，H-convex subfield Q_1は，

$^*Q$の中で、代数的に閉じている。

［証明］ $\alpha/\beta \in {}^*Q - Q_1$ とする。ただし $\alpha, \beta \in {}^*Z$ で、$(\alpha, \beta) = 1$。そうすると、$\alpha \notin Z_1 = Q_1 \cap {}^*Z$ か又は、$\beta \notin Z_1$。$\alpha \notin Z_1$ としても、一般性を失なわない。

α/β が、Q_1上、代数的ならば、$c_0, c_1, \cdots, c_n \in Z_1$ が存在して、

$$c_0\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + c_1\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

で、$c_n \neq 0$ になる。

$$c_0\alpha^n + c_1\alpha^{n-1}\beta + \cdots + c_n\beta^n = 0$$

$$c_n\beta^n \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \alpha$$

$(\alpha, \beta) = 1$ であるから、

$$c_n \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \alpha$$

Z_1は、convexで、$\alpha \notin Z_1$ だから、$|c_n| < |\alpha|$。従って

$$c_n = 0$$

これは矛盾である。//

$R = \{\beta/\alpha \in {}^*Q \mid \alpha \in Z_1,\ \beta \in {}^*Z\}$，$I$を$R$の maximal ideal とする。そうすると、I の local ring R_I は、valuation ring になる。実際 $\beta/\alpha \notin R_I$, $(\alpha, \beta) = 1$ とすると、$\alpha \in I$、従って $(\alpha, \beta) = 1$ より、$\beta \notin I$ となり、$\alpha/\beta \in R_I$ がいえる。

$$R_\infty = \{\beta/\alpha \in {}^*Q \mid |\beta/\alpha| < \gamma \text{ for some } \gamma \in Z_1\}$$

とおくと R_∞ は valuation ring で その maximal ideal は $\{\beta/\alpha \in {}^*Q \mid |\beta/\alpha| < 1/|\gamma| \text{ for all } \gamma \in Z_1\}$。

$F \subseteq {}^*Q$ を Q_1 を constant field とする一変数代数関数体とする。$F \cap R_\infty$ が trivial でないなら(すなわち $F \not\subseteq R_\infty$ なら) $F \cap R_\infty$ は valuation ring になる。$Q_1 \subset F \cap R_\infty$ より これは F の functional prime P を引き越こす。この時 P は archimedean prime によって引き越こされると呼ぶ。

I を R の maximal ideal とする。もし $F \cap R_I$ が trivial でないなら 前と同様 これは F の functional prime P を引きおこす。

p を ${}^*Z$ の素数とする。

$$I_p = \{\beta/\alpha \in R \mid |\beta/\alpha|_p < 1/|\gamma| \text{ for all } \gamma \in Z_1\}$$

とおくと I_p は R の maximal ideal になる。functional prime P が I_p によって引きおこされる時 単に P は p によって引き起こされるという。

Theorem 1. すべての functional prime P は archimedean prime か又は R の maximal ideal で引きおこされる。

[証明] Riemann-Roch の定理より P だけを pole に持つような $\beta/\alpha \in F$ が存在する。もし すべての $\gamma \in Z_1$

に対して、$|\beta/\alpha| > \gamma$ ならば、$\beta/\alpha \notin R_\infty$ となり、従って

$$\beta/\alpha \notin R_\infty \cap F.$$

よって archimedean prime によって引きおこされる functional prime は、β/α の pole になるが、β/α のとり方より、これは P になる。

もし $|\beta/\alpha| < \gamma$ となる、$\gamma \in Z_1$ が存在するならば、

$$\alpha \in {}^*\mathbb{Z} - Z_1$$

となる。I_α を、α を含むような R の maximal ideal とする。すると

$$\beta/\alpha \notin R_{I_\alpha}.$$

従って

$$\beta/\alpha \notin R_{I_\alpha} \cap F.$$

よって、前と同様、P が I_α によって、引き起こされることがわかる。//

$Z_1 = \mathbb{Z}$ の場合は、すべての functional prime が、archimedean prime か、又は ${}^*\mathbb{Z}$ の素数によって引き起こされることが、知られている。[1]　一般には、次のことが成立する。

Theorem 2.　ある $x \in F$ が存在して

$$H(x) > e^c$$

が、すべての $c \in Q_1$ に対して、成立しているとすると、

すべての functional prime P は archimedean prime か又は $^*\mathbb{Z}$ の素数で引き起こされる。

まず始めに、次の Lemma を証明する。

Lemma 2. ある $x \in F$ が存在して

$$H(x) > e^c$$

が、すべての $c \in Q_1$ について成立するならば、すべての $x \in F - Q_1$ に対しても、同じことが成立する。

[証明] $Q_2 = \{x \in {}^*Q \mid H(x) < e^c \text{ for some } c \in Q_1\}$ とおくと、Q_2 は H-convex subfield。従って、Lemma 1 より、Q_2 は $^*Q$ の中で代数的に閉じている。もし、Q_2 が $F - Q_1$ の元を一つでも含んでいれば、$F \subset Q_2$ となって、仮定に反する。従って、すべての $F - Q_1$ の元は、Q_2 の元にはならない。//

Lemma 3. $2 \leqq c \in \mathbb{Z}$ とする。

$$|x|_p \leqq c$$

が、すべての prime p (∞ を含む)で成立するなら、

$$H(x) \leqq e^{3c}$$

になる。

[証明] $S = \{p \mid p \text{ は素数で、} |x|_p > 1\}$

とおくと．

$$H(x) = \prod_{p} \max(1, |x|_p) \leqq c \cdot \prod_{p \in S} |x|_p$$

$p \in S$ なる素数 p に対して．

$$1 < |x|_p = p^{-v_p(x)} \leqq c$$

$$0 < -v_p(x) \leqq \log c / \log p$$

従って　　　$p \leqq c$．

$$\prod_{p \in S} |x|_p \leqq \prod_{p \leq c} p^{\log c / \log p} = \prod_{p \leq c} e^{\log c}$$

$$\leqq e^{\pi(c) \log c}$$

ただし．$\pi(c)$は．$p \leqq c$なる素数pの数とする。

素数定理より．

$$\pi(c) \log c < 2c \text{.}$$

従って

$$\prod_{p \in S} |x|_p < e^{2c}$$

$$H(x) < c e^{2c} < e^{3c} \quad //$$

[Theorem 2 の証明]

$x \in F - Q_1$ とすると．Lemma 2 より．すべての $0 < c \in Z_1$ に対して

$$H(x) > e^{3c} \text{.}$$

従って．Lemma 3 より．ある${}^*\mathbb{Z}$の prime p_c が存在して

$$|x|_{p_c} > c$$

従って ある $0<c\in Z_1$ に対して

$$|x|_p > c$$

となる prime p が存在する。

P を任意の functional prime とし、$x\in F-Q_1$ を P だけを pole に持つ元とする。そうすると、P は上の p によって引き起こされる。//

References.

[1] A. Robinson – P. Roquette, On the finiteness theorem of Siegel-Mahler concerning diophantine equations. J. Number Theory 7 (1975), 121–176.

[2] M. Yasumoto, Nonstandard arithmetic of function fields over H-convex subfields of $^*Q$ to appear in Crelle's Journal).