

## 順序半群によるセマンティクス

広島大 総合科 小野 寛晰 (Hiroakira Ono)

静岡大 理学部 古森 雄一 (Yuichi Komori)

Gentzen の直観主義論理体系  $\mathcal{L}_J$  から contraction を取り除いて  
も cut 除去定理が成り立つ。また、この体系 ( $\mathcal{L}_{BCK}$  と呼ぶ  
) は Łukasiewicz の無限値多値論理よりも弱い論理になり、とい  
える。すなわち、 $\mathcal{L}_{BCK}$  で証明できる論理式は Łukasiewicz の有  
限値モデルで恒等真になり、といえる。更に、 $\mathcal{L}_{BCK}$  は井関清志 (神  
戸大) 氏等によって研究されていた BCK 代数の Gentzen 流の  
formulation になり、古森によりそれが提出されたことから  
その影響を受け、論文がいくつか現れた (cf. [1], [3], [4])。  
その後、我々は  $\mathcal{L}_{BCK}$  および  $\mathcal{L}_{BCK}$  から更に exchange を取り除い  
て得られる体系  $\mathcal{L}_{BCC}$  のクリフケ流のモデルを何とか考えられ  
ないものだろうか、と思い続けていた。もしそのようなもの  
があれば、Łukasiewicz 論理のクリフケ流のモデルも与える  
であろうし、従来の直観主義論理のクリフケモデルの一般化  
になっていると考えられた。しかし、アイデアに欠けてい  
たため、なかなかうまくいかなかったが、Idziak の論文が

らヒントを得て、1982年の9月頃に  $L_{BCC}$ ,  $L_{BCK}$  のクリフケ流のセマンティクスが完成した。その詳しい内容——  $L_{BCC}$  のヘルベルト流の形式化、従来の直観主義命題論理のクリフケモデルとの関係、Łukasiewicz 論理のクリフケモデル、BCK タイプの代数への応用等——については [2] を参照して下さい。ここでは、[2] で total strong Kripke model と呼ばれている（ここでは、単にクリフケモデルと言うことにする）モデルの  $L_{BCC}$  に対する完全性定理を主に論じる。

論理記号としては、次の5つを用いる； $\supset$  (implication),  $\vee$  (or),  $\wedge$  (かつ),  $\&$  (and),  $\perp$  (falsehood)。命題変数を表わすのに、 $p, q, r, s, \dots$  を用いる。論理式を表わすのには、 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  を用いる。また、 $\supset$  による結びつきは他の論理記号による結びつきより弱いものとする。すなわち、 $\alpha \& \beta \supset \gamma$  は  $(\alpha \& \beta) \supset \gamma$  を意味している。また、それ以外の足りなりの場合は左から補うものとする。すなわち、 $\alpha \supset \beta \supset \gamma$ ,  $\alpha \wedge \beta \& \gamma$  は、それぞれ  $\alpha \supset (\beta \supset \gamma)$ ,  $\alpha \wedge (\beta \& \gamma)$  を意味する。 $\Gamma, \Delta, \Sigma, \dots$  によって論理式の有限列（空列でもよい）を表わす。

$L_{BCC}$  の始式 (initial sequent) は次の2つの型のものがみられる。

$L \rightarrow \alpha$  ( $\alpha$  は任意の論理式),

$p \rightarrow p$  ( $p$  は任意の命題変数).

$L_{BCC}$  の推論規則は次の 12 の規則である。

$$\frac{\Gamma, \Delta \rightarrow \gamma}{\Gamma, \alpha, \Delta \rightarrow \gamma} \text{ (weakening)} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \Delta, \alpha, \Sigma \rightarrow \gamma}{\Delta, \Gamma, \Sigma \rightarrow \gamma} \text{ (cut)}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta}{\Gamma \rightarrow \alpha \supset \beta} (\supset \supset) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \Delta, \beta, \Sigma \rightarrow \gamma}{\Delta, \alpha \supset \beta, \Gamma, \Sigma \rightarrow \gamma} (\supset \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \alpha}{\Gamma \rightarrow \alpha \vee \beta} (\rightarrow \vee 1) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \beta}{\Gamma \rightarrow \alpha \vee \beta} (\rightarrow \vee 2)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \Delta \rightarrow \gamma \quad \Gamma, \beta, \Delta \rightarrow \gamma}{\Gamma, \alpha \vee \beta, \Delta \rightarrow \gamma} (\vee \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \Gamma \rightarrow \beta}{\Gamma \rightarrow \alpha \wedge \beta} (\rightarrow \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \Delta \rightarrow \gamma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \rightarrow \gamma} (\wedge \rightarrow 1) \quad \frac{\Gamma, \beta, \Delta \rightarrow \gamma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \rightarrow \gamma} (\wedge \rightarrow 2)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \Delta \rightarrow \beta}{\Gamma, \Delta \rightarrow \alpha \& \beta} (\rightarrow \&) \quad \frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \rightarrow \gamma}{\Gamma, \alpha \& \beta, \Delta \rightarrow \gamma} (\& \rightarrow)$$

$L_{BCK}$  は  $L_{BCC}$  に次の exchange をつけ加えたものである。

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \rightarrow \gamma}{\Gamma, \beta, \alpha, \Delta \rightarrow \gamma} \text{ (exchange)}.$$

$LJ^*$  は  $L_{BCK}$  に 次の contraction をつけ加えたものである。

$$\frac{\Gamma, \alpha, \alpha, \Delta \rightarrow \gamma}{\Gamma, \alpha, \Delta \rightarrow \gamma} \text{ (contraction)}$$

定理 1.  $L_{BCC}$ ,  $L_{BCK}$ ,  $LJ^*$  では cut 除去定理が成り立つ。

定義 2.  $\langle M, \cdot, 1; \leq \rangle$  が PO-monoid であるとは、次の 3 つの条件を満足することである；

- (i)  $\langle M, \cdot, 1 \rangle$  が 1 を単位元とする monoid である,
- (ii)  $\langle M, \leq \rangle$  が順序集合で、任意の  $a, b, c \in M$  について  $a \leq b$  ならば  $a \cdot c \leq b \cdot c$  かつ  $c \cdot a \leq c \cdot b$  が成り立つ,

- (iii) すべての  $a \in M$  に対して  $1 \leq a$  である。

定義 3.  $\langle M, \cdot, 1, \infty; \leq \rangle$  が SO-monoid であるとは次の 3 つの条件を満足すること；

- (i)  $\langle M, \cdot, 1; \leq \rangle$  が PO-monoid である,
- (ii)  $\langle M, \infty; \leq \rangle$  が順序  $\leq$  に関して下半束をなし、 $\infty$  を最大元として持つ。  $a, b \in M$  の下限を  $a \wedge b$  とかく,
- (iii) 任意の  $a, b, c \in M$  について

$$a \cdot (b \wedge c) = a \cdot b \wedge a \cdot c \quad \text{かつ} \quad (b \wedge c) \cdot a = b \cdot a \wedge c \cdot a.$$

$M = \langle M, \cdot, 1, \infty; \leq \rangle$  を SO-monoid とする.  $\Vdash$  が  $M$  上の forcing であるとは、 $\Vdash \subseteq M \times (\text{命題変数全体の集合})$  ( $(a, p) \in \Vdash$  を  $a \Vdash p$  とかく) で 任意の  $a, b \in M$ , 任意の命題変数  $p$  に対し (i)  $a \wedge b \Vdash p \iff a \Vdash p \text{ かつ } b \Vdash p$  (ii)  $\infty \Vdash p$  が成り立っていることである.

$M$  上の forcing  $\Vdash$  を次のようにして、任意の論理式にまで、論理式の構成により帰納的に定義してやる.

$$(a) \quad a \Vdash \perp \iff a = \infty,$$

$$(b) \quad a \Vdash \alpha \supset \beta \iff \forall b \in M (b \Vdash \alpha \text{ ならば } a \cdot b \Vdash \beta),$$

$$(c) \quad a \Vdash \alpha \vee \beta \iff \exists b, c \in M (a \geq b \cdot c \text{ かつ } b \Vdash \alpha \text{ かつ } c \Vdash \beta),$$

$$(d) \quad a \Vdash \alpha \wedge \beta \iff a \Vdash \alpha \text{ かつ } a \Vdash \beta$$

$$(e) \quad a \Vdash \alpha \& \beta \iff \exists b, c \in M (a \geq b \cdot c \text{ かつ } b \Vdash \alpha \text{ かつ } c \Vdash \beta).$$

Remark.  $\vee$  の解釈は ' $a \Vdash \alpha \vee \beta \iff a \Vdash \alpha$  又は  $a \Vdash \beta$ ' としたいのであるが、そうすると  $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$  が常に valid にならずにしまう。ところが、上の sequent は  $\mathcal{L}_{BCC}$  ( $\mathcal{L}_{BCK}$  でも) では証明できないので、完全性定理を成り立たせたいためには、(c) のような解釈をしなくてはならない。  
 $\mathcal{L}_{PBCC}$  を  $\mathcal{L}_{BCC}$  に更に、始式として  $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$  の型のものを追加したとすると、 $\mathcal{L}_{PBCC}$

では  $V$  の解釈を ' $a \models \alpha \vee \beta \Leftrightarrow a \models \alpha$  又は  $a \models \beta$ ' としこれも完全性定理がいえる。詳しくは [2] を参照して欲しい。

補題 4. 任意の論理式  $\varphi$  に対して

- (i) 任意  $a, b \in M$  について  $a \wedge b \models \varphi \Leftrightarrow a \models \varphi$  かつ  $b \models \varphi$ ,
- (ii)  $\omega \models \varphi$ .

証明. (ii) の証明は簡単なので略す。(i) は論理式の構成に関する帰納法で証明する。ここでは、 $\varphi$  が  $\alpha \supset \beta$  と  $\alpha \vee \beta$  の 2 つの型  $\alpha$  と  $\beta$  のみ証明しておく。

$$\begin{aligned} a \wedge b \models \alpha \supset \beta &\Leftrightarrow \forall c \in M (c \models \alpha \text{ ならば } (a \wedge b) \cdot c \models \beta) \\ &\Leftrightarrow \forall c \in M (c \models \alpha \text{ ならば } a \cdot c \wedge b \cdot c \models \beta) \\ &\quad [\text{帰納法の仮定により}] \\ &\Leftrightarrow \forall c \in M (c \models \alpha \text{ ならば } (a \cdot c \models \beta \text{ かつ } b \cdot c \models \beta)) \\ &\Leftrightarrow \forall c \in M (c \models \alpha \text{ ならば } a \cdot c \models \beta) \text{ かつ } \forall c \in M (c \models \alpha \\ &\quad \text{ならば } b \cdot c \models \beta) \\ &\Leftrightarrow a \models \alpha \supset \beta \text{ かつ } b \models \alpha \supset \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \wedge b \models \alpha \vee \beta &\Leftrightarrow \exists c, d \in M (a \wedge b \geq c \wedge d \text{ かつ } c \models \alpha \text{ かつ } d \models \beta) \\ &\Leftrightarrow \exists c, d \in M (a \geq c \wedge d \text{ かつ } b \geq c \wedge d \text{ かつ } c \models \alpha \text{ かつ } d \models \beta) \\ \textcircled{*} &\Rightarrow \exists c, d \in M (a \geq c \wedge d \text{ かつ } c \models \alpha \text{ かつ } d \models \beta) \text{ かつ } \\ &\quad \exists c, d \in M (b \geq c \wedge d \text{ かつ } c \models \alpha \text{ かつ } d \models \beta) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a \Vdash \alpha \vee \beta \quad \text{かつ} \quad b \Vdash \alpha \vee \beta$$

④ の逆は次のようにして示す。

$$a \geq c \wedge d \quad \text{かつ} \quad c \Vdash \alpha \quad \text{かつ} \quad d \Vdash \beta \quad \left. \vphantom{a \geq c \wedge d} \right\} \text{とす。}$$

$$b \geq c' \wedge d' \quad \text{かつ} \quad c' \Vdash \alpha \quad \text{かつ} \quad d' \Vdash \beta$$

$c \wedge c'$  と  $d \wedge d'$  を考えよと。

$$a \geq (c \wedge c') \wedge (d \wedge d') \quad \text{かつ} \quad b \geq (c \wedge c') \wedge (d \wedge d') \quad \text{かつ}$$

$$c \wedge c' \Vdash \alpha \quad \text{かつ} \quad d \wedge d' \Vdash \beta$$

となり逆が成り立つ。

証明終

定義 5. (1)  $\langle M, \Vdash \rangle$  がクリフスケモデルとは、 $M$  が SO-monoid で  $\Vdash$  が  $M$  上の forcing となること。これを  $M$  をクリフスケ構造という。

(2) 論理式  $\varphi$  がクリフスケモデル  $\langle M, \Vdash \rangle$  で valid であるとは  $1 \Vdash \varphi$  となること。

(3)  $\forall a \in M$

$$a \Vdash \alpha_1, \dots, \alpha_n \rightarrow \beta \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall a_1, \dots, a_n \in M \left( (a_1 \Vdash \alpha_1 \quad \text{かつ} \quad \dots \quad \text{かつ} \quad a_n \Vdash \alpha_n) \text{ ならば } a \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_n \Vdash \beta \right)$$

$$(n=0 \text{ のときは } a \Vdash \beta)$$

(4)  $\Gamma \rightarrow \delta$  がクリフスケモデル  $\langle M, \Vdash \rangle$  で valid であるとは  $1 \Vdash \Gamma \rightarrow \delta$  となること。

定理 6. sequent  $\Gamma \rightarrow \delta$  が  $\perp_{BCC}$  で証明できるならば、任意のクリフトモデルで  $\Gamma \rightarrow \delta$  は valid.

証明.  $\perp_{BCC}$  での証明の長さに関する帰納法で証明すればよい。すなわち、始式がすべて valid であること、推論規則の上式が valid ならば下式も valid であることを示せばよい。ここでは、 $(\rightarrow V1)$  と  $(V \rightarrow)$  についてだけ示しておく。

$(\rightarrow V1)$   $\Gamma = \gamma_1, \dots, \gamma_m$  とする。  $a \models \Gamma \rightarrow \alpha$  ① とする。

また  $c_i \models \gamma_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) ② とする。 ① ② より

$a \cdot c_1 \dots c_m \models \alpha$  とする。  $a \cdot c_1 \dots c_m \geq a \cdot c_1 \dots c_m \wedge \infty$  かつ  $\infty \models \beta$  (補題 4 (ii) による) だから

$a \cdot c_1 \dots c_m \models \alpha \vee \beta$ 。ゆえに  $a \models \Gamma \rightarrow \alpha \vee \beta$ 。

$(V \rightarrow)$   $\Gamma = \gamma_1, \dots, \gamma_m$ ,  $\Delta = \delta_1, \dots, \delta_n$ ,  $a \models \Gamma, \alpha, \Delta \rightarrow \gamma$  ①,  
 $a \models \Gamma, \beta, \Delta \rightarrow \gamma$  ②,  $c_i \models \gamma_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) ③,  $d_i \models \delta_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )  
 ④,  $e \models \alpha \vee \beta$  ⑤ とする。

⑤ より  $\exists f, g \in M$   $e \geq f \wedge g$   $f \models \alpha$  かつ  $g \models \beta$ 。

$f \models \alpha$  と ① ③ ④ より  $a \cdot c_1 \dots c_m \cdot f \cdot d_1 \dots d_n \models \gamma$ 。

$g \models \beta$  と ② ③ ④ より  $a \cdot c_1 \dots c_m \cdot g \cdot d_1 \dots d_n \models \gamma$ 。

補題 4 (i) より  $a \cdot c_1 \dots c_m \cdot f \cdot d_1 \dots d_n \wedge a \cdot c_1 \dots c_m \cdot g \cdot d_1 \dots d_n \models \gamma$ 。

よって  $a \cdot c_1 \dots c_m \cdot (f \wedge g) \cdot d_1 \dots d_n \models \gamma$ 。 補題 4 (ii)

と  $a \cdot c_1 \dots c_m \cdot e \cdot d_1 \dots d_n \geq a \cdot c_1 \dots c_m \cdot (f \wedge g) \cdot d_1 \dots d_n$  かつ



$a \cdot c_1 \cdots c_m \cdot e \cdot d_1 \cdots d_n \vdash \gamma$  となる。ゆえに

$a \vdash \Gamma, \alpha \vee \beta, \Delta \rightarrow \gamma$ 。 証明終

次に、定理6の逆を証明しなければならない。論理式全体の集合を  $W$  とする。 $\hat{W}$  により、論理式の有限列(空列も含む。空列を  $\phi$  で表わす)全体の集合を表わす。任意の  $\Gamma \in \hat{W}$  に対し  $[\Gamma]$  を次のように定義する。

$[\Gamma] \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha \in W \mid \Gamma \rightarrow \alpha \text{ が } L_{BCC} \text{ で証明できる} \}$

また、 $T \stackrel{\text{def}}{=} \{ [\Gamma] \mid \Gamma \in \hat{W} \}$  とする。明らかに、

$T$  は  $\subseteq$  に関して  $[\phi]$  を最小元、 $W$  を最大元とする順序集合になり、 $\cdot$  による。

$[\Gamma] \cdot [\Delta] \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha \mid \Gamma, \Delta \rightarrow \alpha \text{ が } L_{BCC} \text{ で証明できる} \}$

で定義すると、 $\cdot$  は well-defined ( $\Gamma, \Delta$  のえらびかたによらない) である。

補題7.  $\langle T, \cdot, [\phi]; \subseteq \rangle$  は PO-monoid である。

補題8.  $\langle T, \cdot, [\phi], W; \subseteq \rangle$  は SO-monoid である。

証明.  $\Gamma = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  とする。  $\Gamma^{\&}$  により論理式

$\alpha_1 \& \alpha_2 \& \dots \& \alpha_n$  を表わす。ただし  $\Gamma$  が空列のときは、

$\Gamma^{\&} = p \supset p$  とする。  $[\Gamma] \cap [\Delta]$  は  $[\Gamma^{\&} \vee \Delta^{\&}]$  となること

が簡単に分り、  $[\Gamma] \cap [\Delta] \in T$  となる。次に、

$$[\Sigma] \cdot ([\Gamma] \cap [\Delta]) = [\Sigma] \cdot [\Gamma] \cap [\Sigma] \cdot [\Delta]$$

となることを示す。補題 7 (特に  $PO$ -monoid の (ii)) により、

$$[\Sigma] \cdot ([\Gamma] \cap [\Delta]) \subseteq [\Sigma] \cdot [\Gamma] \cap [\Sigma] \cdot [\Delta] \quad \text{はあかである。}$$

逆向きを示す。  $\alpha \in [\Sigma] \cdot [\Gamma] \cap [\Sigma] \cdot [\Delta]$  とすると、

$\Sigma, \Gamma \rightarrow \alpha$  と  $\Sigma, \Delta \rightarrow \alpha$  の両方が  $L_{BCC}$  で証明できる。これから  $\Sigma, \Gamma^{\&} \rightarrow \alpha$  と  $\Sigma, \Delta^{\&} \rightarrow \alpha$  がともに  $L_{BCC}$  で証明できる。ゆえに、 $\Sigma, \Gamma^{\&} \vee \Delta^{\&} \rightarrow \alpha$  が  $L_{BCC}$  で証明できる。よって、 $\alpha \in [\Sigma] \cdot ([\Gamma] \cap [\Delta])$  となる。同様に  $([\Gamma] \cap [\Delta]) \cdot [\Sigma] = [\Gamma] \cdot [\Sigma] \cap [\Delta] \cdot [\Sigma]$  も証明できる。

証明終

$SO$ -monoid  $\mathbb{T} = \langle T, \cdot, [\phi], W; \leq \rangle$  上に forcing  $\Vdash$  を次のように定義する。任意の命題変数  $p$ , 任意の  $[\Gamma] \in T$  に対して、 $[\Gamma] \Vdash p \iff p \in [\Gamma]$  (すなわち、 $\Gamma \rightarrow p$  が  $L_{BCC}$  で証明できる)

このとき、 $\Vdash$  は forcing の条件 (i) (ii) を満たす。

補題 9.  $\Vdash$  を上で定義した  $\mathbb{T}$  上の forcing とする。任意の  $[\Gamma] \in T$  と任意の論理式  $\varphi$  に対して

$$[\Gamma] \Vdash \varphi \iff \varphi \in [\Gamma]$$

証明. 次の (a) ~ (c) を示せばよい。 ( $\Gamma \rightarrow \alpha$  が

$L_{BCC}$  で証明できること (  $\vdash \Gamma \rightarrow \alpha$  とかく )

$$(a) \quad \vdash \Gamma \rightarrow \perp \iff [\Gamma] = W,$$

$$(b) \quad \vdash \Gamma \rightarrow \alpha \supset \beta \iff \forall \Delta \in \hat{W} ( \vdash \Delta \rightarrow \alpha \text{ ならば } \vdash \Gamma, \Delta \rightarrow \beta ),$$

$$(c) \quad \vdash \Gamma \rightarrow \alpha \vee \beta \iff \exists \Delta_1, \Delta_2 \in \hat{W} ( [\Delta_1] \cap [\Delta_2] \subseteq [\Gamma] \text{ かつ}$$

$$\vdash \Delta_1 \rightarrow \alpha \text{ かつ } \vdash \Delta_2 \rightarrow \beta ),$$

$$(d) \quad \vdash \Gamma \rightarrow \alpha \wedge \beta \iff \vdash \Gamma \rightarrow \alpha \text{ かつ } \vdash \Gamma \rightarrow \beta,$$

$$(e) \quad \vdash \Gamma \rightarrow \alpha \& \beta \iff \exists \Delta_1, \Delta_2 \in \hat{W} ( [\Delta_1] \cdot [\Delta_2] \subseteq [\Gamma] \text{ かつ}$$

$$\vdash \Delta_1 \rightarrow \alpha \text{ かつ } \vdash \Delta_2 \rightarrow \beta ).$$

ここでは、(c)のみを示しておく。  $\vdash \Gamma \rightarrow \alpha \vee \beta$  とする。

$\Delta_1 = \alpha$ ,  $\Delta_2 = \beta$  とすると、 $[\Delta_1] \cap [\Delta_2] \subseteq [\Gamma]$  かつ  $\vdash \Delta_1 \rightarrow \alpha$  かつ  $\vdash \Delta_2 \rightarrow \beta$  が成立している。逆に、 $\hat{W}$  の元  $\Delta_1$  と  $\Delta_2$  が存在して  $[\Delta_1] \cap [\Delta_2] \subseteq [\Gamma]$  かつ  $\vdash \Delta_1 \rightarrow \alpha$  かつ  $\vdash \Delta_2 \rightarrow \beta$  となつておくとする。そのとき、 $\vdash \Gamma \rightarrow \Delta_1^k \vee \Delta_2^k$  かつ  $\vdash \Delta_1^k \rightarrow \alpha$  かつ  $\vdash \Delta_2^k \rightarrow \beta$  となる。これより  $\vdash \Gamma \rightarrow \alpha \vee \beta$  がいえる。 証明終

系 10.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rightarrow \beta$  が  $L_{BCC}$  で証明できないならば、 $\langle \mathcal{T}, \mathcal{F} \rangle$  で valid でない。

証明.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rightarrow \beta$  が証明できないとすると、補題 9 により  $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \not\models \beta$  ( '  $[\Gamma] \not\models \alpha$  でない' こと  $\exists [\Gamma] \not\models \alpha$  とかく ) となる。  $[\alpha_i] \not\models \alpha_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) かつ

$[\alpha_1] \cdot [\alpha_2] \cdots [\alpha_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$  故に

$[\phi] \nVdash \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rightarrow \beta$  . 証明終.

定理 6 と系 10 により

定理 11 (完全性定理).

$\Gamma \rightarrow \delta$  が  $\mathcal{L}_{BCC}$  で証明できる

$\Leftrightarrow \Gamma \rightarrow \delta$  がすべてのクリフモデルで valid.

$\mathcal{L}_{BCC}$ ,  $\mathcal{L}_{BCK}$  についての研究は、始ま、たばかりであります。興味深い問題も残っています。我々が興味をもっている問題のリストが [2] にありますので参照して下さい。

### 参考文献

- [1] P. M. Idziak, Lattice operation in BCK-algebras.
- [2] H. Ono and Y. Komori, Logics without the contraction rule.
- [3] A. Wroński, Interpolation and amalgamation property of BCK-algebras.
- [4] A. Wroński and P. S. Krzyszek, On pre-Boolean algebras.