

Some statement which implies \exists Ramsey ufs on ω

阪府大 総加茂静夫 (Shizuo Kamo)

§ 0. 序

Def. a, b を set とするとき,

$$a \sim b \stackrel{\Delta}{\iff} a \text{ is finite}$$

$$a \gtrsim b \stackrel{\Delta}{\iff} a - b \sim \phi$$

$$a \sim b \stackrel{\Delta}{\iff} a \gtrsim b \text{ and } b \gtrsim a$$

と記す。

\mathcal{F} を A filter on A とする。

Def. $g: A \rightarrow B$ に対し, $g(\mathcal{F}) \stackrel{\Delta}{=} \{X \subset B; g^{-1}X \in \mathcal{F}\}$.

Def. \mathcal{F} is free $\iff \phi \notin \mathcal{F}$ & $\bigcap \mathcal{F} = \phi$.

Def. \mathcal{F} is weakly ample

$$\iff \forall \mathcal{U}: \text{free ultrafilter (uf) on } \omega \exists g: \omega \rightarrow A (g(\mathcal{U}) \subset \mathcal{F})$$

Def. \mathcal{F} is ample $\iff \exists A_0 \subset A (A_0 \neq \phi \text{ \& } \forall X \in \mathcal{F} (A_0 \gtrsim X))$

容易に分かるが, free で ample な filter は weakly ample となる。

Def. κ を cardinal とするとき, statement $AN(\kappa)$ を,

"Any free, weakly ample filter on κ is ample."

で定める。

明らかに, cardinal κ, λ に対し,

$$\kappa \leq \lambda \ \& \ AN(\lambda) \Rightarrow AN(\kappa)$$

が成り立つ。

Statement $AN(\kappa)$ について, Puritz [1] は次の Proposition を示している。

Prop. 1 (Puritz) $c = 2^\omega$ と記す。

(i) Continuum hypothesis (CH) $\vdash AN(c)$.

(ii) $\neg AN(2^c)$.

(iii) $AN(\omega) \Rightarrow \exists P\text{-points on } \omega$.⁽¹⁾

(i) と (ii) から, $CH + 2^c = \omega_2$ の条件下では, $AN(\kappa)$ が成り立つ κ は, ω と ω_1 であることがわかる。

Question 1. $CH + 2^c = \omega_2$ が不成立の場合はどうなるか?

Question 2. (iii) の逆 (則ち, \Leftarrow) は成立するか?

以下, Q.1 と 2 について考察していく。

⁽¹⁾ Def. \mathcal{U} を a free uf on ω とするとき,

\mathcal{U} が P-point (Ramsey uf) である。

\Leftrightarrow " $\langle \alpha_n \mid n < \omega \rangle$: a partition of ω st. $\forall n < \omega (\alpha_n \notin \mathcal{U})$ "

$\Rightarrow \exists y \in \mathcal{U} [y \cap \alpha_n \sim \emptyset \ (|y \cap \alpha_n| \leq 1), \text{ for } \forall n < \omega]$ "

Def. Statement P を,

" $\forall k < \mathfrak{c} (=2^\omega) \forall \mathcal{F}$: free, k -generated filter on ω (\mathcal{F} is ample)"
で定める。

Statement P は Martin's Axiom (MA) から導かれる (則ち, $MA \vdash P$)。又, Proposition 1 (i) の証明は, そのまま,

$$P \vdash AN(\mathfrak{c})$$

の証明になっている。更に, 次の proposition が成り立つ。

Prop 2 (Shelah) $\text{not } \vdash \exists P\text{-points on } \omega$.

以上のことから, $AN(\mathfrak{c})$ は $\aleph_1\text{FC} + \neg CH$ から independent であることがわかる。

ここでは, 次の Theorems を示す。

Theorem 1. κ は cardinal とする。

$$(i) \quad AN(\kappa) \iff AN(\kappa^\omega).$$

$$(ii) \quad AN(\omega) \implies \exists \mathfrak{c}^+ \text{ Ramsey ufs on } \omega.$$

$$(iii) \quad 2^{\mathfrak{c}} \leq \kappa^\omega \implies \neg AN(\kappa).$$

Theorem 2. Theorem 1 (ii) の逆は成立しない。

Theorem 3. $AN(\omega_2)$ は, $\aleph_1\text{FC} + CH + 2^{\omega_1} = \omega_3$ から independent である。

Theorem 2 により, Question 2 は成立しないことがわかる。

Theorems の証明について, まず Theorem 1 は次の Lemma A から直接に導かれる。

Lemma A. κ を cardinal とすると, (a) と (b) は同値。

(a) $\neg AN(\kappa)$

(b) $\exists \langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa^\omega \rangle$: a partition of the set of Ramsey ufs on ω s.t., for $\forall \alpha < \kappa^\omega$, $X_\alpha = \emptyset$ or $\bigcap X_\alpha$: not ample.

又, Theorems 2 と 3 については, 次の Lemmas B ~ D を示せば十分である。

Lemma B. $\exists \mathcal{M}[G] \models \neg AN(\omega) + \exists C^+ \text{ Ramsey ufs on } \omega$."

Lemma C. $\exists \mathcal{M}[G] \models CH + 2^{\omega_1} = \omega_3 + AN(\omega_2)$."

Lemma D. $\exists \mathcal{M}[G] \models CH + 2^{\omega_1} = \omega_3 + \neg AN(\omega_2)$."

ここで, $\mathcal{M}[G]$ は countable transitive model \mathcal{M} of ZFC の generic extension を表わす。

§.1 で Lemma A を証明する。§.2 で Lemma B を証明する。

§.3 で Lemma C を証明する。§.4 は Lemma D を証明するための準備であり, §.5 で Lemma D は証明する。

§.1. Lemma A の証明.

Lemma 1. \exists free, not ample filter \mathcal{F} on ω which satisfies (*1).

" \mathcal{U} を free uf on ω とすると, 次の (a) と (b) は同値。

(*1) (a) \mathcal{U} is Ramsey.

(b) $\forall f: \omega \rightarrow \omega$ ($f(\mathcal{U}) \not\subseteq \mathcal{F}$). "

Proof. $\omega \times \omega$ と ω の one to one onto map を考えることに

より, $(*1)'$ をみたす $\omega \times \omega$ 上の free, not ample filter \mathcal{F} が存在することを示せば十分である。

" \mathcal{U} を free uf on ω とすると, 次の (a) と (b)' は同値。

$(*1)'$ (a) \mathcal{U} is Ramsey.

(b)' $\forall g: \omega \rightarrow \omega \times \omega$ ($g(\mathcal{U}) \neq \mathcal{F}$). "

def. $f: \omega \rightarrow \omega$ に対し,

$$a(f) = \omega \times \omega - f (= \{ (l, m) \in \omega \times \omega; f(l) \neq m \})$$

とおき, $n < \omega$ に対し,

$$b(n) = (\omega - n) \times \omega (= \{ (l, m) \in \omega \times \omega; l \geq n \})$$

とおく。

\mathcal{F} を, $\{ a(f); f: \omega \rightarrow \omega \} \cup \{ b(n); n < \omega \}$ で generate される $\omega \times \omega$ 上の filter とすれば, これが $(*1)'$ をみたす $\omega \times \omega$ 上の free, not ample な filter である。 \square

Lemma 2. κ を cardinal とすると, $\exists A \subset \mathcal{P}_\omega(\kappa)$ ⁽²⁾ s.t.

(i) $|A| = \kappa^\omega,$

(ii) $\forall \alpha, \beta \in A$ ($\alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta \sim \emptyset$).

Proof. Standard. \square

Proof of Lemma A. κ を cardinal とする。

(a) \Rightarrow (b): $\neg AN(\kappa)$ とし, \mathcal{F} として free, weakly ample, not ample filter on κ をとっておく。

⁽²⁾ $\mathcal{P}_\omega(C) = \{ \alpha \subset C; |\alpha| = \omega \}$

\mathcal{U} を Ramsey uf on ω とする。

\mathcal{F} が weakly ample だから, $\exists g: \omega \rightarrow k$ st. $g(\mathcal{U}) \supset \mathcal{F}$.

\mathcal{U} が Ramsey であり, \mathcal{F} が free であることから, g を変形

して, $\exists f: \omega \rightarrow k$ (one to one) st. $f(\mathcal{U}) \supset \mathcal{F}$.

そこで, 各 Ramsey uf \mathcal{U} on ω に対し, $f_{\mathcal{U}}: \omega \rightarrow k$ を,

$$f_{\mathcal{U}} \text{ is one to one \& } f_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) \supset \mathcal{F}$$

となるようにとっておく。

$\langle g_{\alpha} \mid \alpha < k^{\omega} \rangle$ を, $\{f; f: \omega \rightarrow k \text{ (one to one)}\}$ の monotone enumeration とし, 各 $\alpha < k^{\omega}$ に対し,

$$X_{\alpha} = \{ \mathcal{U}; \mathcal{U} \text{ is a Ramsey uf on } \omega \text{ \& } f_{\mathcal{U}} = g_{\alpha} \}$$

とおく。このとき,

$\langle X_{\alpha} \mid \alpha < k^{\omega} \rangle$ が (b) をみたす。」

(b) \Rightarrow (a): $\langle X_{\alpha} \mid \alpha < k^{\omega} \rangle$ を (b) をみたす sequence とする。

\mathcal{F} として, Lemma 1 (*1) をみたす free, not ample filter on ω

をとる, A として, Lemma 2 (i) と (ii) をみたす $P_{\omega}(k)$ の subset

をとる。 $\langle a_{\alpha} \mid \alpha < k^{\omega} \rangle$ を, A の monotone enumeration

とする。 $\langle \mathcal{F}_{\alpha} \mid \alpha < k^{\omega} \rangle$ を,

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{\alpha+1} = \bigcap X_{\alpha} & , \quad X_{\alpha} \neq \emptyset \text{ のとき.} \\ \mathcal{F}_{\beta} = \mathcal{F} & , \quad \text{それ以外 のとき.} \end{cases}$$

で定める。任意の $\alpha < k^{\omega}$ に対し,

\mathcal{F}_{α} is free & not ample

がなりたつ。 $\langle h_\alpha \mid \alpha < \kappa^\omega \rangle$ を, for $\forall \alpha < \kappa^\omega$,

$$h_\alpha: \omega \rightarrow \alpha \quad (\text{one to one onto})$$

となるようにとっておき, 各 $\alpha < \kappa^\omega$ に対し,

$$\mathcal{O}_\alpha = h_\alpha(\mathcal{F}_\alpha) \quad (\text{ただし, } h_\alpha: \omega \rightarrow \kappa \text{ とみなす})$$

とおく。各 $\alpha < \kappa^\omega$ に対し,

\mathcal{O}_α is free, not ample filter on κ

がなりたつ。

$$\mathcal{O}_\beta = \bigcap_{\alpha < \kappa^\omega} \mathcal{O}_\alpha$$

とおく。 $\langle \alpha_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ が almost disjoint であることから,

\mathcal{O}_β は free, not ample filter on κ である。 \mathcal{O}_β が weakly ample であることを示すため, \mathcal{U} を任意にとられた free uf on ω とする。

Case 1. \mathcal{U} が Ramsey のとき。

$$\exists \alpha < \kappa^\omega \text{ s.t. } \mathcal{U} \in X_\alpha.$$

そこで, $h = h_{\alpha+1}$ とすれば, $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}_{\alpha+1}$ より,

$$h(\mathcal{U}) \supset h(\mathcal{F}_{\alpha+1}) = \mathcal{O}_{\alpha+1} \supset \mathcal{O}_\beta.$$

Case 2. \mathcal{U} が not Ramsey のとき。

\mathcal{F} が (*1) をみたすことから, $\exists g: \omega \rightarrow \omega$ s.t. $g(\mathcal{U}) \supset \mathcal{F}$.

そこで, $h = h_0 \circ g$ とおけば,

$$h(\mathcal{U}) \supset h_0(\mathcal{F}) = \mathcal{O}_{\beta_0} \supset \mathcal{O}_\beta. \quad \square$$

§ 2. Lemma B の証明.

このセクションを通して, \mathcal{M} は countable transitive model of ZFC + GCH とする。

$P = \{ p; \text{func}(p) \ \& \ \text{dom}(p) \subset \omega \ \& \ |p| < \omega \ \& \ \text{ran}(p) \subset \{0,1\} \}$
とし,

$G: \mathcal{M}$ -generic on P

とする。

次の Lemmas 1~3 は, well-known (又は standard) である。

Lemma 1. $x \in \mathcal{M}[G] \ \& \ x \subset \omega \ \& \ x \neq \emptyset$ とすると,
 $\exists y \in \mathcal{M} \ (y \subset \omega \ \& \ x \cap y \neq \emptyset \ \& \ x \cap (\omega - y) \neq \emptyset)$.

Lemma 2. $A, \langle x_n \mid n < \omega \rangle \in \mathcal{M}$ は,

- (i) $A \subset \mathcal{P}_\omega(\omega)$,
- (ii) $\forall x, y \in A \ (x \cap y \in A)$,
- (iii) $x_n \in A$, for $\forall n < \omega$,
- (iv) $x_{n+1} \subset x_n$, for $\forall n < \omega$,

をみたすとする。このとき, $\exists y \in \mathcal{M}[G]$ s.t.

- (v) $y \subset \omega$,
- (vi) $y \cap x \neq \emptyset$ for $\forall x \in A$,
- (vii) $|y \cap (x_n - x_{n+1})| \leq 1$ for $\forall n < \omega$.

Lemma 3. $\exists x \in \mathcal{M}[G] \cap \mathcal{P}(\omega)$ s.t.

$\forall y \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}_\omega(\omega) \ (y \cap x \neq \emptyset \ \& \ y \cap (\omega - x) \neq \emptyset)$.

poset $Q \in \mathcal{M}$ を,

$\mathcal{M} \models "Q = \{g; \text{fnc}(g) \& \text{dom}(g) \subset \omega \times \omega_2 \& |g| < \omega \& \text{ran}(g) \subset \{0,1\}\}"$

で定め,

$H = \mathcal{M}$ -generic on Q

とする。

Lemma B を,

$\mathcal{M}[H] \models "\neg AN(\omega) + \exists C^+ \text{ Ramsey ufs on } \omega"$

で示す。

def. $\alpha < \omega_2^{\mathcal{M}}$ に対し,

$$Q_\alpha = \{g \in Q; \text{dom}(g) \subset \omega \times \alpha\},$$

$$Q^\alpha = \{g \in Q; \text{dom}(g) \cap (\omega \times \alpha) = \emptyset\},$$

$$H_\alpha = H \cap Q_\alpha, \quad H^\alpha = H \cap Q^\alpha$$

と記す。

Def. Statement (*2) を, 次のものとする。

" $A, \langle \alpha_n \mid n < \omega \rangle$ が,

$$(i) \quad A \subset \mathcal{P}_\omega(\omega) \& |A| < 2^\omega \& \forall \alpha, \beta \in A (\alpha \cap \beta \in A),$$

$$(ii) \quad \forall n < \omega (\alpha_n \in A \& \alpha_{n+1} \subset \alpha_n),$$

(*2) をみたすとする, $\exists Y, Z \subset \omega$ st.

$$(iii) \quad Y \cap Z = \emptyset,$$

$$(iv) \quad Y \cap \alpha \neq \emptyset \& Z \cap \alpha \neq \emptyset, \text{ for } \forall \alpha \in A,$$

$$(v) \quad |Y \cap (\alpha_n - \alpha_{n+1})|, |Z \cap (\alpha_n - \alpha_{n+1})| \leq 1 \text{ for } \forall n < \omega. "$$

Lemma 4. $\mathcal{M}[H] \models (*2)$.

Proof. $A, \langle \alpha_n \mid n < \omega \rangle \in \mathcal{M}[H]$ が, $\mathcal{M}[H]$ の中で (i) と (ii) をみたすとする。

$\mathcal{M}[H] \models " |A| < 2^\omega = \omega_2 "$ だから, $\exists \alpha < \omega_2^{\mathcal{M}}$ s.t.

$A, \langle \alpha_n \mid n < \omega \rangle \in \mathcal{M}[H_\alpha]$.

$\mathcal{M}[H_{\alpha+1}]$ は, $\mathcal{M}[H_\alpha]$ の poset P に対する generic extension だから, Lemma 2 により, $\exists a \in \mathcal{M}[H_{\alpha+1}]$ s.t.

1. $a \subset \omega$,
2. $a \cap \alpha \neq \emptyset$, for $\forall \alpha \in A$,
3. $|a \cap (\alpha_n - \alpha_{n+1})| \leq 1$, for $\forall n < \omega$.

$\mathcal{M}[H_{\alpha+2}]$ は, $\mathcal{M}[H_{\alpha+1}]$ の poset P に対する generic extension だから, Lemma 3 により, $\exists y \in \mathcal{M}[H_{\alpha+2}]$ s.t.

4. $y \subset a$
5. $\forall \alpha \in \mathcal{M}[H_{\alpha+1}] \cap \mathcal{P}_\omega(a)$ ($\alpha \cap y \neq \emptyset$ & $\alpha \cap (a - y) \neq \emptyset$)

そこで, $z = a - y$ とおけば,

$y, z \in \mathcal{M}[H_{\alpha+2}] \subset \mathcal{M}[H]$

であり, $(*2)$ の (iii) ~ (iv) をみたす。 \square

Lemma 5. $(*2) \Rightarrow \exists 2^c$ Ramsey ufs on ω .

Proof. Standard. \square

Lemmas 4 と 5 により,

$\mathcal{M}[H] \models " \exists 2^c \text{ Ramsey ufs on } \omega "$

が示された。 $\mathcal{M}[H] \models \neg AN(\omega)$ を示すには, Theorem 1 と $\mathcal{M}[H] \models "2^\omega = \omega_2"$ により,

$$\mathcal{M}[H] \models \neg AN(\omega_2)$$

を示せば十分である。

Lemma 6. $\mathcal{U} \in \mathcal{M}[H]$ & $\mathcal{M}[H] \models " \mathcal{U} \text{ is a free uf on } \omega "$

$\Rightarrow \exists \mathcal{V} \in \mathcal{M}[H]$ s.t. $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ and

$\mathcal{M}[H] \models " \mathcal{V} \text{ is a free, } \omega_1\text{-generated, not ample filter on } \omega "$.

Proof. $\mathcal{U} \in \mathcal{M}[H]$ & $\mathcal{M}[H] \models " \mathcal{U} \text{ is a free uf on } \omega "$ とする。

$$X = \mathcal{U} \cap \mathcal{M} (\in \mathcal{M}[H])$$

とおく。 $\mathcal{V} \in \mathcal{M}[H]$ を,

$\mathcal{M}[H] \models " \mathcal{V} \text{ は } X \text{ から generate される } \omega \text{ 上の filter } "$ で定める。 $\mathcal{M}[H] \models " |X| \leq \omega_1 "$ と, Lemma 1 により, \mathcal{V} が求めるものである。 \square

$\mathcal{M}[H] \models \neg AN(\omega_2)$ を示すため, 以下 $\mathcal{M}[H]$ での議論。

$$\Gamma = \{ \mathcal{V} ; \mathcal{V} \text{ is a free, } \omega_1\text{-generated, not ample filter on } \omega \}$$

とおく。

$|\Gamma| \leq |\mathcal{P}(\omega)|^{\omega_1} = \omega_2$ だから, Γ の enumeration $\langle \mathcal{V}_\alpha \mid \alpha < \omega_2 \rangle$ をと, ておく。各 $\alpha < \omega_2$ に対し,

$$h_\alpha : \omega \rightarrow \omega \times \omega_2 \text{ を,}$$

$$h_\alpha(n) = (n, \alpha) \quad \text{for } \forall n < \omega$$

で定め,

$$\mathcal{O}_\alpha = k_\alpha(\sqrt{\alpha})$$

とおく。

$\mathcal{O}_\omega = \bigcap_{\alpha < \omega_2} \mathcal{O}_\alpha$ とすれば, \mathcal{O}_ω は free, not ample となる。

更に, Lemma 6 により, \mathcal{O}_ω は weakly ample である。 \square

§ 3. Lemma C の証明

Def. 各 $\alpha < \omega_1$ に対し, $S_\alpha = \{ \Delta; \Delta: \alpha \rightarrow \omega_1 \}$ と記す。

Lemma 1 (CH) $\exists \langle \langle \alpha_\Delta \mid \Delta \in S_{\alpha+1} \rangle \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ s.t.

(i) $\forall \Delta, t \in S_{\alpha+1} (\Delta \neq t \Rightarrow \alpha_\Delta \neq \alpha_t)$,

(ii) $\{ \alpha_\Delta; \Delta \in S_{\alpha+1} \}$ is a maximal almost disjoint subset of $\mathcal{P}_\omega(\omega)$,

(iii) $\exists \alpha < \omega$ & $\Delta \in S_{\alpha+1}$ & $t \in S_{\alpha+1}$ & $\Delta \subset t \Rightarrow \alpha_t \not\sim \alpha_\Delta$,

(iv) $\forall Y \subset \omega \exists \alpha < \omega_1 \forall \Delta \in S_{\alpha+1} (Y \cap \alpha_\Delta = \emptyset \text{ or } \alpha_\Delta \subset Y)$.

Proof. Standard. \square

$$P = \{ p; \text{func}(p) \ \& \ \text{dom}(p) \subset \omega_1 \ \& \ |p| \leq \omega \ \& \ \text{ran}(p) \subset \{0,1\} \}$$

$$B = \mathcal{P}(\omega)/I, \text{ where } I = \{ \alpha \subset \omega; \alpha \sim \emptyset \}$$

とおく。

Lemma 2 (CH) \mathcal{C} を poset P の regular open set 全体のなす complete Boolean algebra とすると,

$$\mathcal{C} \cong \text{the completion of } B$$

である。

Proof. 次の条件 1~3 をみたす X と Y の存在を示せば十分である。

1. X は dense subset of $B - \{0\}$.
2. Y は dense subset of P .
3. X と Y は order isomorphic.

$\langle \langle \mathcal{A}_\alpha \mid \mathcal{A} \in S_{\alpha+1} \rangle \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ を Lemma 1 (i) ~ (iv) をみたす sequence とし,

$$X = \{ \mathcal{A}_\alpha / I ; \exists \alpha < \omega_1, (\mathcal{A} \in S_{\alpha+1}) \}$$

$$Y = \{ p \in P ; \exists \alpha < \omega_1, (\text{dom}(p) = \omega_\alpha + \omega) \}$$

とすれば, この X と Y が 1~3 をみたす。 \square

\mathcal{M} を countable transitive model of ZFC + GCH とする。

$Q \in \mathcal{M}$ を,

$$\mathcal{M} \models " Q = \{ \mathcal{F} ; \text{fnc}(\mathcal{F}) \& \text{dom}(\mathcal{F}) \subset \omega_1 \times \omega_3 \& |\mathcal{F}| \leq \omega \& \text{ran}(\mathcal{F}) \subset \{0,1\} \} "$$

と定め,

$H : \mathcal{M}$ -generic on Q

とする。

$\mathcal{M}[H] \models " CH + 2^{\omega_1} = \omega_3 "$ は明らかだから, $\mathcal{M}[H] \models AN(\omega_2)$ を示すため, $\mathcal{F} \in \mathcal{M}[H]$ を,

$\mathcal{M}[H] \models " \mathcal{F} \text{ is a free, not ample filter on } \omega_2 "$

が成り立つものとする (示したいこと: $\mathcal{M}[H] \models " \mathcal{F} \text{ is not weakly ample } "$)。

$\mathcal{O}_Y \in \pi[H]$ を,

$$\pi[H] \models " \mathcal{O}_Y = \mathcal{F} \cap \{ \omega_2 - \alpha ; \alpha \subset \omega_2 \ \& \ |\alpha| \leq \omega \} "$$

で定める。 $\pi[H] \models " |\mathcal{O}_Y| \leq \omega_2 "$ だから, $\exists \beta < \omega_3^{\aleph}$ st.

$$\mathcal{O}_Y \in \pi[H \cap \{ \mathcal{B} \in \mathcal{Q} ; \text{dom}(\mathcal{B}) \subset \omega_1^{\aleph} \times \beta \}].$$

$$\mathcal{Q}_1 = \{ \mathcal{B} \in \mathcal{Q} ; \text{dom}(\mathcal{B}) \subset \omega_1^{\aleph} \times \beta \}$$

$$\bar{\mathcal{Q}} = \{ \mathcal{B} \in \mathcal{Q} ; \text{dom}(\mathcal{B}) \subset \omega_1^{\aleph} \times \{ \beta \} \}$$

$$H_1 = H \cap \mathcal{Q}_1, \quad \bar{H} = H \cap \bar{\mathcal{Q}}, \quad \mathcal{N} = \pi[H_1]$$

とおく。

\bar{H} は \mathcal{N} -generic on $\bar{\mathcal{Q}}$ であり,

$\pi[H]$ は generic extension of $\mathcal{N}[\bar{H}]$ である。

Lemma 3. $\mathcal{N}[\bar{H}] \models " \mathcal{O}_Y \text{ is not weakly ample } "$

Proof. $\bar{\mathcal{B}} \in \mathcal{N}$ を,

$$\mathcal{N} \models " \bar{\mathcal{B}} = \mathcal{P}_\omega(\omega) / \mathcal{I} "$$

となるものとする。 $\mathcal{N} \models CH$ だから, Lemma 2 により,

\bar{H} は \mathcal{N} -generic on $\bar{\mathcal{B}}$

と考えてもよい (以下そう考える)。 $\mathcal{U} \in \mathcal{N}[\bar{H}]$ を,

$$\mathcal{N}[\bar{H}] \models " \mathcal{U} = \{ \alpha \subset \omega ; \alpha / \mathcal{I} \in \bar{H} \} "$$

で定める。 $\mathcal{N}[\bar{H}] \models " \mathcal{U} \text{ is a free uf on } \omega "$ となるから,

$$(*3) \quad \mathcal{N}[\bar{H}] \models " \forall f: \omega \rightarrow \omega_2 (f(\mathcal{U}) \supset \mathcal{O}_Y) "$$

を示せば, この lemma の証明は完了する。 (*3) を示すた

め, $f \in \mathcal{N}[\bar{H}]$ を,

$$\mathcal{N}[\bar{H}] \models "f: \omega \rightarrow \omega_2"$$

をみたすものとする。 $\mathcal{M} \models "Q \text{ is } \sigma\text{-closed}"$ だから,

$$f \in \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$$

である。 $D \in \mathcal{N}$ を,

$$\mathcal{N} \models "D = \{ \alpha/I \in \bar{B} ; \alpha/I > 0 \ \& \ \exists y \in \mathcal{O}_y (y \cap f^{-1}\alpha = \emptyset) \}"$$

で定める。 $\mathcal{N} \models " \mathcal{O}_y \text{ is free, not ample}"$ により,

$$\mathcal{N} \models "D \text{ is dense in } \bar{B} - \{0\}"$$

そこで, $\exists \alpha/I \in \bar{B}$ s.t.

$$\alpha \neq \emptyset \ \& \ \exists y \in \mathcal{O}_y (y \cap f^{-1}\alpha \neq \emptyset)$$

$$\therefore \omega_2^m - f^{-1}\alpha \in \mathcal{O}_y - f^{-1}(y)$$

$$\therefore \mathcal{N}[\bar{H}] \models "f^{-1}(y) \neq \emptyset" \quad \square$$

Lemma 3 と, $\mathcal{M} \models "Q \text{ is } \sigma\text{-closed}"$ により,

$$\mathcal{M}[\bar{H}] \models " \mathcal{O}_y \text{ is not weakly ample}"$$

これと, $\mathcal{O}_y \subset \mathcal{F}$ により,

$$\mathcal{M}[\bar{H}] \models " \mathcal{F} \text{ is not weakly ample}" \quad \square$$

§ 4. Theorem 4 (Lemma D 証明のために).

Def. $f, g: \omega_1 \rightarrow \omega_1$ に対し,

$$f \prec g \iff \exists \alpha < \omega_1 \ \forall \xi < \omega_1 (\alpha \leq \xi \Rightarrow f(\xi) < g(\xi)).$$

Def. $\langle f \delta \mid \delta < \omega_2 \rangle$ が ω_2 -scale on ω_1 であるとは, 次の (i) ~ (iii) が成り立つことである。

- (i) $\forall \delta < \omega_2 (f_\delta : \omega_1 \rightarrow \omega_1)$
 (ii) $\forall \delta < \forall \eta < \omega_2 (f_\delta < f_\eta)$
 (iii) $\forall g : \omega_1 \rightarrow \omega_1 \exists \delta < \omega_2 (g < f_\delta)$.

Theorem 4. (CH) $\exists \omega_2$ -scale on $\omega_1 \Rightarrow \neg AN(\omega_2)$.

このセクションでは, Theorem 4 を証明する。そこで, 以下 CH を仮定する。更に, $S_\alpha (\alpha < \omega_1)$ と $\langle \langle \alpha_\lambda \mid \lambda \in S_{\alpha+1} \rangle \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ は, §3 Lemma 1 (i) ~ (iv) をみたすものとする。

def. $h : \omega_1 \rightarrow \omega_1$ に対し,

$\mathcal{U}_h =$ the filter on ω which is generated by $\{ \alpha_{h \upharpoonright (\alpha+1)} ; \alpha < \omega_1 \}$

とおく。

Lemma 1. \mathcal{U}_h is a free uf on ω , for $\forall h : \omega_1 \rightarrow \omega_1$.

Proof. 明らか。 \square

def. $W = \{ f ; f : \omega_1 \rightarrow \omega_1 \}$ と記す。

def. $\emptyset \neq Y \subset W$ に対し, $\mathcal{F}(Y) = \bigcap_{h \in Y} \mathcal{U}_h$ とおく。

Lemma 1 により, $\mathcal{F}(Y)$ は a free filter on ω である。

Lemma 2. $\emptyset \neq Y \subset W$ とすると, 次の (a) と (b) は同値。

(a) $\mathcal{F}(Y)$ is not ample.

(b) $\forall \alpha < \omega_1 \forall \lambda \in S_{\alpha+1} \exists \beta < \omega_1 \exists t \in S_{\beta+1}$ st.

$\alpha \leq \beta$ & $\lambda \subset t$ & $\forall h \in Y (t \not\subset h)$.

Proof. $\emptyset \neq Y \subset W$ とする。

(a) \Rightarrow (b) $\mathcal{F}(Y)$ is not ample & $\alpha < \omega_1$ & $\lambda \in S_{\alpha+1}$ とする。

$\alpha_\Delta \neq \emptyset$ だから, $\exists y \in \mathcal{F}(Y)$ s.t. $\alpha_\Delta - y \neq \emptyset$.

$Q = \alpha_\Delta - y$ とおく。

$\langle \langle \alpha_u \mid u \in S_{\beta+1} \rangle \mid \gamma < \omega_1 \rangle$ が (iv) をみたすことから,

$\exists \beta < \omega_1, \exists t \in S_{\beta+1}$ s.t. $\alpha_t \subset Q$.

$\alpha_t \subset \alpha_\Delta$ となることから, $\alpha \leq \beta$ & $\Delta \subset t$ である。更に, $h \in Y$ なら, $y \in \mathcal{F}(Y) \subset \mathcal{U}_h$ より, $\alpha_t \not\subset \mathcal{U}_h$ である。そこで, $\forall h \in Y (t \not\subset h)$.」

(b) \Rightarrow (a) Y が (b) をみたすとし, $\alpha \subset \omega$ & $\alpha \neq \emptyset$ とする。 $\alpha < \omega_1$ と $\Delta \in S_{\alpha+1}$ を, $\alpha_\Delta \subset \alpha$ となるようにとる。 Y が, (b) をみたすことから, $\alpha \leq \exists \beta < \omega_1, \exists t \in S_{\beta+1}$ s.t.

$\Delta \subset t$ & $\forall h \in Y (t \not\subset h)$.

$y = \omega - \alpha_t$ とおく。 $\alpha - y \supset \alpha_\Delta \cap \alpha_t$ より,

$\alpha - y \neq \emptyset$

であり, $\forall h \in Y (\alpha_t \not\subset \mathcal{U}_h)$ より,

$y \in \mathcal{F}(Y)$

である。」 \square

def. $\alpha < \omega_1$ に対し,

$\mathcal{O}_\alpha =$ the filter on ω which is generated by $\{\omega - \alpha_\Delta; \Delta \in S_{\alpha+1}\}$

とおく。

\mathcal{O}_α は, free, not ample filter on ω である。

Lemma 3. \mathcal{U} を free uf on ω とすると, 次の (a) 又は (b)

が成り立つ。

$$(a) \quad \exists h \in W \quad (\mathcal{U} = \mathcal{U}_h)$$

$$(b) \quad \exists \alpha < \omega_1 \quad (\mathcal{U} \supset \mathcal{O}_\alpha).$$

Proof. easy. \square

Lemma 4. 次の (i) と (ii) をみたす ω_2 -sequence $\langle Y_\delta \mid \delta < \omega_2 \rangle$ が存在するとする。

$$(i) \quad \bigcup_{\delta < \omega_2} Y_\delta = W.$$

$$(ii) \quad \forall \delta < \omega_2 \quad (\mathcal{F}(Y_\delta) \text{ is not ample}).$$

このとき, $\neg AN(\omega_2)$ である。

Proof. $\langle Y_\delta \mid \delta < \omega_2 \rangle$ が (i) と (ii) をみたすとする。

$\omega \times (\omega_2 + \omega_1)$ 上の filter \mathcal{F} を, 任意の $\alpha \subset \omega \times (\omega_2 + \omega_1)$ に対し,

$$\alpha \in \mathcal{F}$$

$$\iff (a) \quad \forall \delta < \omega_2 \quad (\{n < \omega; \langle n, \delta \rangle \in \alpha\} \in \mathcal{F}(Y_\delta))$$

$$(b) \quad \forall \alpha < \omega_1 \quad (\{n < \omega; \langle n, \omega_2 + \alpha \rangle \in \alpha\} \in \mathcal{O}_\alpha)$$

で定める。Lemma 3 により,

\mathcal{F} は free, weakly ample, not ample filter である。 \square

Proof of Theorem 4. $\langle f_\delta \mid \delta < \omega_2 \rangle$ を ω_2 -scale on ω_1

とする。各 $\langle \delta, \alpha \rangle \in \omega_2 \times \omega_1$ に対し, $Y_{\delta\alpha} \subset W$ を,

$$Y_{\delta\alpha} = \{h \in W; \alpha \leq \forall \xi < \omega_1 (h(\xi) < f_\delta(\xi))\}$$

で定める。 $\langle f_\delta \mid \delta < \omega_2 \rangle$ が ω_2 -scale on ω_1 より,

$$\bigcup_{\langle \delta, \alpha \rangle \in \omega_2 \times \omega_1} Y_{\delta\alpha} = W \quad \text{である。}$$

そこで, Lemma 4 により, 次の (*4) を示せば証明は完了する。

(*4) $\forall \langle \delta, \gamma \rangle \in \omega_2 \times \omega_1$ ($\exists(Y_{\delta\gamma})$ is not ample).

(*4) を示すため, $\langle \delta, \gamma \rangle \in \omega_2 \times \omega_1$ を任意にとる。

Lemma 2 により, 次の (*4)' を示せば十分である。

(*4)' " $\forall \alpha < \omega_1 \forall \Delta \in S_{\alpha+1} \exists \beta < \omega_1 \exists t \in S_{\beta+1}$ s.t.
 $\alpha \leq \beta$ & $\Delta \subset t$ & $\forall h \in Y_{\delta\gamma} (t \neq h)$. "

(*4)' を示すため, $\alpha < \omega_1$ と $\Delta \in S_{\alpha+1}$ を任意にとる。 $\beta < \omega_1$ と, $\Delta_1 \in S_{\beta}$ を,

$$\alpha \leq \beta \text{ \& \& } \gamma \leq \beta \text{ \& \& } \Delta \subset \Delta_1$$

となるようにとり, $t \in S_{\beta+2}$ を,

$$t \upharpoonright (\beta+1) = \Delta_1, \quad t(\beta+1) = f_{\delta}(\beta+1)$$

で定める。このとき, $\Delta \subset \Delta_1 \subset t$ であり, $h \in Y_{\delta\gamma}$ なら, $h(\beta+1) < f_{\delta}(\beta+1) = t(\beta+1)$ より, $t \neq h$ である。

そこで, (*4)' が成り立つ。 \square

§ 5. Lemma D の証明.

Section 4 の Theorem 4 より, \exists generic model \mathcal{M} s.t.

(*5) $\mathcal{M} \models "CH + 2^{\omega_1} = \omega_3 + \exists \omega_2\text{-scale on } \omega_1"$

を示せば十分である。この section を通して \mathcal{M} は countable transitive model of ZFC + CH + $2^{\omega_1} = \omega_3$ とする。

Def. $S = \{ \Delta ; \exists \alpha < \omega_1 (\Delta : \alpha \rightarrow \omega_1) \}$ と記す。

def. a complete Boolean algebra \mathcal{B} に対し, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathcal{B}) \in V^{\mathcal{B}}$ を,
 $\text{dom}(\mathcal{Q}) = \{ \langle \check{A}, \check{J} \rangle^{\mathcal{B}} ; \check{A} \in S \text{ \& } \check{J} \in V^{\mathcal{B}} \text{ \& } \parallel \check{J} \text{ is a set of function on } \omega_1 \text{ with } |\check{J}| \leq \omega \parallel = \mathbb{1} \}$,

$$\mathcal{Q}(x) = \mathbb{1}, \text{ for } \forall x \in \text{dom}(\mathcal{Q})$$

で定め, $\leq (= \leq(\mathcal{B})) \in V^{\mathcal{B}}$ を,

$$\parallel \leq \text{ is a relation on } \mathcal{Q} \parallel = \mathbb{1},$$

任意の $\langle \check{A}, \check{J} \rangle^{\mathcal{B}}, \langle \check{t}, \check{K} \rangle^{\mathcal{B}} \in \text{dom}(\mathcal{Q})$ に対し,

$$\parallel \langle \check{A}, \check{J} \rangle^{\mathcal{B}} \leq \langle \check{t}, \check{K} \rangle^{\mathcal{B}} \parallel$$

$$= \parallel \check{A} \supset \check{t} \text{ \& } \check{J} \supset \check{K} \text{ \& } \forall \alpha \in \text{dom}(\check{A} - \check{t}) \forall f \in \check{K} (f(\alpha) < \check{A}(\alpha)) \parallel$$

で定める。

$\parallel \langle \mathcal{Q}, \leq \rangle \text{ is a notion of forcing } \parallel = \mathbb{1}$ とする。 \mathcal{Q} と $\langle \mathcal{Q}, \leq \rangle$ を同一視する。

Lemma 1. $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$ は,

$\mathcal{M} \models \text{" } \mathcal{B} \text{ is an } \omega\text{-DL, } \omega_2\text{-saturated complete Boolean algebra"}$

をみたすとする。 G を \mathcal{M} -generic on \mathcal{B} とし, $\mathcal{Q} = i_G(\mathcal{Q}(\mathcal{B})^{\mathcal{M}})$ とおく。

(i) $\mathcal{Q} (\in \mathcal{M}[G])$ は,

$\mathcal{M}[G] \models \text{" } \mathcal{Q} = S \times \{ J ; J \text{ is a set of functions on } \omega_1 \text{ with } |J| \leq \omega \} \text{"}$

をみたす $\mathcal{M}[G]$ での a notion of forcing である。ただし, その order は, $\langle \check{A}, \check{J} \rangle, \langle \check{t}, \check{K} \rangle \in \mathcal{Q}$ に対し,

$$\langle \Delta, J \rangle \leq \langle t, K \rangle$$

$$\Leftrightarrow " \Delta \supset t \ \& \ J \supset K \ \& \ \forall \alpha \in \text{dom}(\Delta - t) \ \forall f \in K (f(\alpha) < \Delta(\alpha)) "$$

である。

そこで, H を $\pi[G]$ -generic on Q とし, $\mathcal{R} \in \pi[G, H]$ を,

$$\mathcal{R} = \cup \{ \Delta ; \exists J (\langle \Delta, J \rangle \in H) \}$$

で定めると,

$$(ii) \ \pi[G, H] \models " \mathcal{R} : \omega_1 \rightarrow \omega_1 "$$

$$(iii) \ \forall f \in \pi[G] (\pi[G] \models " f : \omega_1 \rightarrow \omega_1 " \Rightarrow \pi[G, H] \models " f < \mathcal{R} ")$$

が成り立つ。

Proof. Standard. \square

以下, Cor. まで, π における議論である。

def. $\alpha (\leq \omega_2)$ に関する induction により, poset R_α を以下に定める。

$\alpha \leq \omega_2$ に対し,

$B_\alpha =$ the algebra of regular open sets in R_α

$$Q_\alpha = Q(B_\alpha)$$

と記す。

Case 1. $\alpha = 0$ のとき.

$$R_0 = \{ \emptyset \} \text{ とする.}$$

Case 2. $\alpha = \gamma + 1$ のとき.

$$R_\alpha = \{ p \hat{\langle} x \rangle ; p \in R_\gamma \ \& \ x \in \text{dom}(Q_\gamma) \} \text{ とおき,}$$

$p \hat{<} x \rangle, q \hat{<} y \rangle \in R_\alpha$ に対し,

$$p \hat{<} x \rangle \leq q \hat{<} y \rangle \iff " p \leq q \ \& \ q \Vdash x \leq y "$$

とする。(注: $p, q \in R_\alpha$ が, $p \leq q \ \& \ q \leq p$ となるときは, p と q を同一視する。 $e: R_r \rightarrow R_\alpha$ を, $p \in R_r$ に対し,

$$e(p) = p \hat{<} \langle \check{\phi}, \check{\phi} \rangle^{B_r} >$$

で定めると, e は *order embedding* となるから, p と $e(p)$ を同一視して, $R_r \subset R_\alpha$ とみなす。)

Case 3. α が *limit* のとき.

任意の $p = \langle p_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$ に対し,

$$p \in R_\alpha \iff " \forall \xi < \alpha (p \upharpoonright \xi \in R_\xi) \ \& \ | \{ \xi < \alpha \mid \| p \upharpoonright \xi \| < 1 \| \} | \leq \omega "$$

とし, $p, q \in R_\alpha$ に対し,

$$p \leq q \iff \forall \xi < \alpha (p \upharpoonright \xi \leq q \upharpoonright \xi)$$

とする。(注: Case 2 の場合の注と同じ同一視をする。そして, $R_\xi \subset R_\alpha$ for $\forall \xi < \alpha$ とみなす。)

Lemma 2. $\alpha \leq \omega_2$ とすると,

(i) $|R_\alpha| \leq \omega_3$

(ii) R_α is σ -closed, ω_2 -saturated.

Proof. Standard. \square

def. $R = R_{\omega_2}$ と記す。

Cor. R is σ -closed, ω_2 -saturated & $|R| = \omega_3$.

Proof of (*5). G を \mathcal{M} -generic on R とし, $\mathcal{N} = \mathcal{N}[G]$ とおく。Cor. により, $\mathcal{N} \models "CH + 2^{\omega_1} = \omega_3"$ である。

各 $\alpha < \omega_2^{\mathcal{M}}$ に対し,

$$G_\alpha = G \cap R_\alpha, \quad \mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}[G_\alpha]$$

とおき, $\langle h_\alpha \mid \alpha < \omega_2^{\mathcal{M}} \rangle \in \mathcal{N}$ を, $\alpha < \omega_2^{\mathcal{M}}$ に対し,

$$h_\alpha = \cup \{ A \mid \exists p \in G \exists J (p(\alpha) = \langle \check{A}, J \rangle^{\mathcal{B}_\alpha}) \}$$

で定める。

$\mathcal{N} \models " \langle h_\alpha \mid \alpha < \omega_2 \rangle \text{ is an } \omega_2\text{-scale on } \omega_1 "$

を示せば, (*5) の証明は完了する。Lemma 1 (i) により,

$\mathcal{N} \models " \forall \alpha < \omega_2 (h_\alpha : \omega_1 \rightarrow \omega_1) \ \& \ \forall \alpha < \forall \beta < \omega_2 (h_\alpha < h_\beta) "$

である。 $f \in \mathcal{N}$ を, $\mathcal{N} \models "f : \omega_1 \rightarrow \omega_1"$ とする任意の f のとする。

R が ω_2 -saturated in \mathcal{M} より,

$$\exists \alpha < \omega_2^{\mathcal{M}} \text{ s.t. } f \in \mathcal{N}_\alpha.$$

Lemma 1 (ii) により, $\mathcal{N}_{\alpha+1} \models "f < h_\alpha"$

$$\therefore \mathcal{N} \models "f < h_\alpha" \quad \square$$

Reference

- [1] C.W. Puritz, Skies, Constellations and Monads, in:
Contributions to Nonstandard Analysis, ed. W.A. Luxemburg
(North-Holland; Amsterdam, 1972).