数理解析研究所講究録
480巻 1983年 53-63

Reflection Principles via Filter Quantifier

神戸大学教養部　角田　譲 (Yuzuru Kakuda)

Reflection Principle は the universe V を集合で、approximation するという原理である。formal には、次の scheme で表現できる：

(1) $$(\exists u)(u \text{ is transitive} \wedge (\forall \vec{x} \in u)(\bigwedge_{k=1}^{\ell} (\varphi_k \longleftrightarrow \varphi_k^{(u)})))$$

，但しここで各φ_kに現れる free variable は $\vec{x}$ の中にあるとする．

この Reflection Principle は，[1] (or [2]) で明らかにされたように，"almost all quantifier" aa (i.e. a filter quantifier with the axiom of diagonal intersections) で表現できる。一方，AC (実際には，DC で充分) を仮定すれば，ZFC において次の形の Reflection Principle が証明でき得る：

(2) $$(\forall s)(\exists t)(s \subseteq t \wedge (\forall \vec{x} \in t) \bigwedge_{k=1}^{\ell} (\varphi_k \longleftrightarrow \varphi_k^{(t)}))$$

，但し，ここで各φ_kに現れる free variable は $\vec{x}$ に現れるとして，variables s, t は countable sets を動くものとする．

(2) を (1) の形に書く時，次の定義が必要である：

<u>Def. 1.</u>　s を countable set とする．s が countably transitive であるとは，

$$(\forall t)(t \in s \wedge \bar{\bar{t}} \leq \aleph_0 \rightarrow t \subseteq s).$$

を意味する．

(2) は，次の形の Reflection Principle と ZF において，同値である：

(3)　$(\forall s)(s \text{ is countably transitive}$
$$\wedge \ (\forall \vec{x} \in s) \bigwedge_{k=1}^{\ell} (\varphi_k \longleftrightarrow \varphi_k^{(s)}))$$

(free variable の条件は，(1)，(2) に同じである)

(1) が，"for almost all <u>sets</u>" quantifier に，関連しているという事実から，我々は，(3) が "for almost all <u>countable sets</u>" なる quantifier と関連がある事を予測できる。その方向で，quantifier "aa" の集合論での意味を探るのが，目的である．

§1.

この節においては，後の応用の為できる限り一般的に，aa を持つ language の理論を展開しておく。この節において，$\mathcal{L}_U$ は predicate symbols U, $\in$ (U は 1-ary, $\in$ は 2-ary) を持つ first-order language とする．(但し，$\mathcal{L}_U$ は他の symbols を含んでも良い)．

$U(x)$の時，xをU-set という事にして，$s, t, s', t', \cdots$ 等は，U-sets を走る variables とする．

1.1. Definition (a) UB_U は $\mathcal{L}_U(aa)$ で formulate された theory で，次の axioms を持つものとする：

(Ax. 0) 通常の first-order logic axiom schemes，（equality axioms を含む）．

(Ax. 1) $(aax)\varphi(x) \longleftrightarrow (aay)\varphi(y)$，$\varphi(x)$ は $\mathcal{L}_U(aa)$ の formula で y は $\varphi(x)$ に現れないとする。

(Ax. 2) $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to ((aax)\varphi \to (aax)\psi)$,

(Ax. 3) $(aax)\varphi \wedge (aax)\psi \to (aax)(\varphi \wedge \psi)$,

(Ax. 4) $(aax)(x$ is a U-set$)$,

(Ax. 5) $\neg(aax)(x \neq x)$,

(Ax. 6) $(\forall x)(aay)(x \in y)$,

(Ax. 7) $(\forall x \in s)(aay)\varphi \longrightarrow (aay)(\forall x \in s)\varphi$.

(b) ST_U は $\mathcal{L}_U(aa)$ で formulate された theory で axioms は (Ax. 0) から (Ax. 6) に次の axioms を付け加えたものである：

(Ax. 8) $(\forall s)(aax)(s \subseteq x)$,

(Ax. 9) $(\forall x)(aay)\varphi \longrightarrow (aay)(\forall x \in y)\varphi$.

Remark. $\mho B_{\mho}$, $ST_{\mho}$ の inference rules は共に, Modus Ponens と Generalization である。

1.2. Definition (a) $\mho$-Pair, $\mho$-Union, $\mho$-Collection でそれぞれ次を表わすものとする:

$\mho$-Pair : $(\forall x)(\forall y)(\exists s)(x \in s \wedge y \in s)$,

$\mho$-Union : $(\forall s)(\exists t)(\forall s' \in s)(s' \subseteq t)$,

$\mho$-Collection : $(\forall x \in s)(\exists y)\varphi \rightarrow (\exists t)(\forall x \in s)(\exists y \in t)\varphi$,

ここで φ は t を free variable として持たない formula である

(b) 集合 x が $\mho$-transitive であるとは, x が $\mho$-set でかつ $(\forall s \in x)(s \subseteq x)$ が成立する事である.

(c) $RF_{\mho}$ で, 次の reflection scheme を意味するものとする: $(\exists s)(s$ is $\mho$-transitive

$$\wedge (\forall \vec{x} \in s) \bigwedge_{k=1}^{l} (\varphi_k \longleftrightarrow \varphi_k^{(s)}))$$

ここで各 φ_k は $\mathcal{L}_{\mho}$ の formula で含まれる free variables は, $\vec{x}$ に現れるものとする.

Remark. $(\forall x)(\mho(x) \longleftrightarrow x = x)$ を axiom に付け加えた場合 (あるいは $\mho(x)$ が predicate $x = x$ を意味する場合), $\mho B_{\mho}$, $ST_{\mho}$ は [ ] の $\mho B$, ST と一致する.)

1.3. Lemma (a) $\mho$-pair, $\mho$-Union, $\mho$-Collection (ranging over all formulas in $\mathcal{L}_{\mho}(aa)$) は $\mho B_{\mho}$ において証明可能である。

(b) $\mho B_{\mho}$ の first-order part は $\mho$-Pair, $\mho$-Union, $\mho$-Collection を axioms として持つ first-order theory と一致する。

(c) $ST_{\mho}$ は $\mho B_{\mho}$ の extension である。

(d) $ST_{\mho}$ の first-order part は $RF_{\mho}$ を axioms として持つ $\mathcal{L}_{\mho}$ の上の first-order theory と一致する。

§2.

この節においては、$\mathcal{L}_{\mho}$ は ZF の language に unary predicate symbol $\mho$ を付け加えてできる language である。全ての theorems は、ZF relative to $\mathcal{L}_{\mho}$（即ち、Separation 及び Collection Scheme は $\mathcal{L}_{\mho}$ の formula 全てを動く）。さらに、$\mho$ は、$\subseteq$ に関して hereditary とする、即ち、

$$(\forall x)(\forall y)(x \text{ is a } \mho\text{-set and } y \subseteq x \rightarrow y \text{ is a } \mho\text{-set}).$$

2.1. Definition. A を set とする。$\mathcal{P}_{\mho}(A)$ で、次の集

合を意味する： $\{p : p \subseteq A$ and p is a U-set$\}$.

$\mathcal{P}_U(A)$ の subset X が unbounded であるとは、

$$(\forall p \in \mathcal{P}_U(A))(\exists q \in X)(p \subseteq q)$$

が成立する事を意味する。X が closed であるとは、X の全ての non-empty subset D で $\subseteq$ で directed されているもので $q = \bigcup D \in \mathcal{P}_U(A)$ となっている時、$q \in X$ が成立する事をいう。

2.2. Definition (a) U-Closure Principle とは、次を意味するものとする：

S を non-empty set, R を ~~S の上の~~ binary relation で次の条件を満足しているものとする：任意の有限列 $\langle x_i \mid i<n\rangle$ (from S) に対してある $x \in S$ が存在して、$\langle x_i \mid i<n\rangle R x$ となる。その時、$t \subseteq S$ なる任意の U-set t に対して $t \subseteq s \subseteq S$ なる U-set s が存在して、s からの有限列 $\langle x_i \mid i<n\rangle$ (任意) に対して $x \in s$ で

$\langle x_i \mid i<n\rangle R x$ なるものが存在する。

(b) The weak form of U-closure Principle とは、次を意味する：

S を non-empty set, R を ternary relation on S で $(\forall x \in S)(\exists y \in S)(\exists z \in S) R(x\,y\,z)$ を満足しているものとする。その時、non-empty U-set s, $s \subseteq S$ で

次の条件を満足するものが存在する：

$$(\forall x \in s)(\exists y \in s)(\exists z \in s)\, R(x\,y\,z).$$

2.3. Definition. U-set に対する Reflection Principle とは次の scheme を意味する：

$$(\forall t)(\exists s)\left(t \subseteq s \wedge (\forall \vec{x} \in s) \bigwedge_{k=1}^{\ell} (\varphi_k \longleftrightarrow \varphi_k^{(s)})\right),$$

ここで、各 φ_k は free variables が $\vec{x}$ の中に現われる formula とする。

2.4. Lemma. U-Pair, U-Union を仮定する。その時，次の事はそれぞれ同値となる：

(i) U-Collection, the weak form of U-Closure Principle；

(ii) 各集合 A に対して，closed unbounded subsets of $P_U(A)$ の collection が diagonal intersection に対して閉じている；

(iii) U-Closure Principle；

(iv) $\mathfrak{A}$ を non-logical symbols の集合全体が U-set になる language の structure とする。その時，$\mathfrak{A}$ の universe A の U-set subset C に対して universe B が，C を含む $\mathfrak{A}$ の elementary substructure 𝔅 で B が U-set

なる γ の が存在する;

(v) $\mho$-set に関する Reflection Principle.

2.5. Lemma 次のものは equivalent である。

(i) $\mho$-Pair, $\mho$-Union, $\mho$-Closure Principle;

(ii) $RF_{\mho}$.

§3.

$\mathcal{L}_{\mho}$ に関しては、§2 と同じ仮定を置くものとする。

3.1. Definition. (a) $\mho B_{\mho}$ に、ZF (relative to $\mathcal{L}_{\mho}(aa)$) の axioms を付け加えてできる $\mathcal{L}_{\mho}(aa)$ の上の theory を $ZF_{\mho}^{\mho B}$ で示す。

(b) $ZF_{\mho}(aa)$ は、ZF (relative to $\mathcal{L}_{\mho}(aa)$ + $ST_{\mho}$ による $\mathcal{L}_{\mho}(aa)$ の theory を意味するものとする。

(c) $ZF_{\mho}^{W^+}(aa)$ を Collection Scheme を $\mathcal{L}$ に制限して $ZF_{\mho}(aa)$ から得られる $\mathcal{L}_{\mho}(aa)$ の上の theory とする。

(d) $ZF_{\mho}^{W}(aa)$ を Separation Scheme を $\mathcal{L}$ に制限して $ZF_{\mho}^{W^+}(aa)$ から得られる $\mathcal{L}_{\mho}(aa)$ の上の theory とする。

Case I. "$U(x) \longleftrightarrow x$ is countable" で $U(x)$ が define される predicate である場合：

ZF_U^{UB}, $ZF_U(aa)$, ... をそれぞれこの場合、$ZF_{\aleph_1}^{UB}$, $ZF_{\aleph_1}(aa)$, ... で示す。

§2 の結果より次の事がいえる。

3.2. Proposition. (a) $ZF_{\aleph_1}^{UB}$ は、$ZF + AC_\omega$ の conservative extension となる。但し、AC_ω は、the axiom of choice for countable sets を意味する。

(b) $ZF_{\aleph_1}^{W}(aa)$ は $ZF + DC$ の conservative extension である。

(c) $ZF_{\aleph_1}^{W^+}(aa)$ は $ZF + FL_{\aleph_1}$ の conservative extension である。但し、$FL_{\aleph_1}$ は、non-empty set x に対して、$P_{\omega_1}(x)$ は fine normal filter をもつ。

Remark. $ZF_{\aleph_1}(aa)$ は、$ZF(aa)$ が強い theory である様に、$ZF + DC$ に対して本質的な強さをもつ。

Problem. $DC \not\rightarrow FL_{\aleph_1}$ を証明せよ。($DC \rightarrow FL_{\aleph_1}$ は不可能と思える)

Case II. κを infinite cardinal とする時,

"$U(x) \longleftrightarrow \bar{\bar{x}} < \kappa$"

が成立する時 //

この場合, ACを仮定すると, $ZF_\kappa(aa)$ + Dual の理論は Large cardinal と結びついて興味がある. ここでは一つの結果のみについて述べてみる.

Theorem. $ZD^1_\kappa + Col^1_\kappa + Sep^1_\kappa + AC \vdash \varphi$

iff

$ZFC_\kappa +$ "κ is Mahlo" $\vdash \varphi$

for every formula φ of $\mathcal{L}_\kappa$.

参考文献.

[1]. Y. Kakuda, Set theory based on the language with the additional quantifier "for almost all". To appear.

[2]. ~~M~~. Kaufmann, Set theory with a filter quantifier. To appear in JSL.