

Souslin tree の積について

埼玉大理 花沢正純 (Masazumi Hanazawa)

Tree T の元 x の高さ, $ht(x)$, とは T の initial segment $\hat{x} = \{y \in T : y < x\}$ の順序型を指す。高さが α であるような T の元の全体を T_α で表し T の α -level といい。高さが α より小さい T の元の全体は $T \setminus \alpha$ で表される。また $A \subseteq T$ であるとき $\{ht(x) : x \in A\}$ を A の台と呼ぶことにする。二個の tree T, U の積 $T \otimes U$ は次のようにして与えられる tree を意味する。まず field は $\{ \langle t, u \rangle \in T \times U : ht(t) = ht(u) \}$ である。順序は $\langle t_1, u_1 \rangle \leq \langle t_2, u_2 \rangle \iff t_1 \leq t_2 \wedge u_1 \leq u_2$ である。field をなぜ単純に $T \times U$ としたのかについては単に技術上の問題と考えよう。もともと tree の積は iterated forcing に関連して興味を持たれたものであり、forcing に際する限りは $T \otimes U$ でも $T \times U$ でも本質的に同じものだからである。($T \otimes U$ は forcing の意味で $T \times U$ の中で稠密になってくる)。さて Souslin tree の特徴は CCC にある。CCC とは ω_1 の tree に含まれる antichain は全て高々可算である

あるという条件である。早くから注目されていた Souslin tree T の性質の一つを示すものとして「 T 自身は CCC をみたすにもかかわらず、その中 $T \otimes T$ は CCC をみたさない」という事実がある。ところが本文で詳しく述べるようにこの事実に対する標準的な証明が与える $T \otimes T$ の非可算 anti-chain A は大変薄味な集合である。この観察が本稿の内容の動機づけになってくる。本稿では Souslin tree T の中 $T \otimes T$ 、更に一般に二つの Souslin tree T, U の積 $T \otimes U$ について、その antichain の濃さを眺めてみる。よく御存知の通り ZFC のみでは Souslin tree の存在性さえも保証されないので本稿の目的のためには何らかの強い仮定を必要とする。本稿では $V = L$ を仮定する。実際には \diamond が十分である。Souslin tree の存在性を仮定するだけで何処までできるかは面白い問題です。

1. $T \otimes T$ の型の場合.

二つの ω_1 -tree T, U の一方が Aronszajn なら $T \otimes U$ も Aronszajn に存ります。しかしここで Aronszajn を Souslin に置き換えるとこれは偽命題へと変わります。そこでこのが Souslin tree T の中 $T \otimes T$ は常に! Souslin でない。この事実の標準的な証明は次のように行なわれます。

まず T の各元 x に対して x の異なる拡張 y_x, z_x を同じ高さの所から取ります。このとき

$$A = \{ \langle y_x, z_x \rangle : x \in T \}$$

とおけば A が非可算な antichain になっている。□

さて、この証明で与えられた antichain A の注目すべき特徴は A の台が Non-stationary だということである。

なぜなら A の台 $S = \{ \text{ht}(a) : a \in A \}$ の各元 α に対して、その高さの A の元 a_α をひとつずつ選り出して固定する。今、関数 $g: S \rightarrow \omega_1$ を

$$g(\alpha) = \text{ht}(x), \text{ where } \langle y_x, z_x \rangle = a_\alpha$$

で定めると g は S 上 regressive である。とこそ $x \neq x'$ なら $\langle y_x, z_x \rangle \neq \langle y_{x'}, z_{x'} \rangle$ であるし、 T の各 β -level T_β は高々可算であるから $g^{-1}(\beta)$ は高々可算である。従って、pressing down lemma ([K] p. 80) により S は stationary ではありません。□

そこで Souslin tree T の巾 $T \otimes T$ の antichain の台は常に Non-stationary だろうかという疑問が頭をかすめます。しかしその前に確かめて置かねばならぬことがある。それは上の標準的な証明は拙い証明で、うまくやれば stationary な antichain が常に取れるのではなからうかという疑問です。次の定理はその可能性を消してしまいます。そこで almost Souslin という

言葉が出てきますが、これはどの antichain の台も Non-stationary だということの意味する言葉です。

定理 1. [Jensen] (\diamond) $T \otimes T$ が almost Souslin であるような Souslin tree T がある。

筆者は \diamond^* を用いてこれを示したが STEVO TODORČEVIĆ から次の指摘を受けた。その指摘の内容を述べるために、まず...

定義 T が thin tree であるとは、 T が $\langle \omega_1, \subseteq \rangle$ の subtree であって且つ initial segment であるとして

$$\forall \alpha \forall x, y \in T_\alpha \{ \beta < \alpha : x(\beta) \neq y(\beta) \} < \aleph_0$$

をみたすことを意味する。

指摘 1. Jensen は (\diamond^* より弱い仮定) \diamond を用いて thin Souslin tree の存在を示した。([DJ] 参照)

指摘 2. 実は Souslin tree T が thin ならば $T \otimes T$ は almost Souslin である。

証明 [S. Todorčević] $A = \{ \langle t_\alpha, t'_\alpha \rangle : \alpha \in E \}$ を $T \otimes T$ の antichain とする, ここで E は ω_1 の stationary 部分集合で t_α, t'_α は高さが α であるとする。 T が Souslin tree から、 $t_\alpha \neq t'_\alpha$ ($\alpha \in E$) であると初めから仮定しておいてよい。 Pressing down lemma からある有限集合 $F \subseteq \omega_1$ とある stationary 集合 $D \subseteq E$ をとると $\{ \xi : t_\alpha(\xi) \neq t'_\alpha(\xi) \} = F$ ($\forall \alpha \in D$)。 F は有限なので或る stationary 集合 $D' \subseteq D$ をとれば、すべて

$\alpha, \beta \in D'$ について $t'_\alpha \upharpoonright F = t'_\beta \upharpoonright F$. とするで T は Souslin tree なので $t_\alpha \subseteq t_\beta$ となるような $\alpha < \beta$ を D' の中から見つけられる。このとき F の取り方から $t'_\alpha \subseteq t'_\beta$ を得る。したがって $\langle t_\alpha, t'_\alpha \rangle \subseteq \langle t_\beta, t'_\beta \rangle$ を得るが、これは A が antichain であることに反する。□

このようにして定理 1 は \diamond を仮定するだけで証明されていた。実際、筆者の証明も \diamond で実行できることがわかった。しかもその方法からもう少し強い結果が出て来た。それを次に挙げる Jensen & Johnsbraten の定理のあとに述べる。

定理 2 ([JJ] 参照) (\diamond) $\{\langle t, u \rangle \in T \otimes T : t \neq u\}$ が \mathcal{Q} に埋め込める (従って $T \otimes T$ は almost Souslin でない) ような Souslin tree T がある。

以上から、 $T \otimes T$ が almost Souslin になるか否かは T 次第というわけである。ところで定理 2 の \mathcal{Q} を \mathbb{R} に置き換えると、 $T \otimes T$ が almost Souslin でないとは直ちに言えない。事実、次の結果を得た。上述の「もう少し強い結果」である。

定理 3. (\diamond) $\{\langle t, u \rangle \in T \otimes T : t \neq u\}$ が \mathbb{R} に埋め込めてしかも $T \otimes T$ は almost Souslin であるような Souslin tree T が有る。

注意: $\{\langle t, u \rangle \in T \otimes T : t \neq u\}$ は ω_1 -tree にさえならないが、 $T \otimes T$ a subtree としての tree であり、 \mathcal{Q} または \mathbb{R} への

順序を保存する関数という概念は考えられるわけである。

定理3の証明、概略にとどめる。定理6の証明の読了後の方が理解し易いと思う。tree T を tree $\langle {}^\omega\omega, \leq \rangle$ の initial segment になるように作る。 α に関する帰納法で T_α を作る。従って $T|\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} T_\beta$ は構築済みとする。 $t, u \in {}^\alpha\omega$ に対して $\|t, u\|_\beta^\alpha = \sum_{\beta < \xi < \alpha} 1/(t(\xi)+1) \cdot (u(\xi)+1)$ と定める。さて T_α は次が成り立つように与えられる:

(1) どんな有限集合 $F \subseteq T_\alpha$, どんな $\beta < \alpha$, どんな t_0 in T_β , どんな正の有理数 q に対しても, 次をみたす t を T_α から選ぶことができる:

$$t > t_0 \text{ 且 } \|t, u\|_\beta^\alpha < q \text{ for all } u \in F,$$

(2) $t_1, t_2 \in T_\alpha$ 且 $t_1 \neq t_2$ ならば, $\beta \leq t_1 \upharpoonright \beta = t_2 \upharpoonright \beta$ をみたす最大の順序数 $< \alpha$ とするとき, $\|t_1, t_2\|_\beta^\alpha < \infty$ なり。

さて, まず $T_0 = \{\emptyset\}$, $T_{\beta+1} = \{x \frown \langle n \rangle : x \in T_\beta, n \in \omega\}$ と定める。次に α が極限数なる場合。 α に収束する上昇列 $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \dots$ を一つ固定し, 構築済みの $T|\alpha$ と \mathbb{Q}^+ の積

$T|\alpha \times \mathbb{Q}^+$ を ω 型に並べあげて $\{ \langle t_n, q_n \rangle : n \in \omega \}$ とする。

目的は各 $\langle t_n, q_n \rangle$ に対して次のような $u_n: \alpha \rightarrow \omega$ を作ることである: (以下において, $ht(t_n)$ を β_n で表す)

1. $t_n \subseteq u_n$,

2. $\forall k < n \quad \|u_k, u_n\|_{\beta_n}^\alpha < q_n$

n に関する帰納法で $\alpha_n \leq \gamma_n < \gamma_{n+1} < \alpha$ をみたす列 $\langle \gamma_n : n \in \omega \rangle$ を定義し、これと平行して $\langle u_k \upharpoonright \gamma_n : k \leq n \rangle$ 及び \mathbb{Q}^+ の元列 $\langle \hat{q}_k : k \leq n \rangle$ を $\hat{q}_k < q_k$ となるように定めて行く。

$n=0$ のとき、 x_0 を、 $x_0 \geq t_0$ 且 $ht(x_0) \geq \alpha_0$ 且 \diamond によつて指定されてゐる $T \upharpoonright \alpha$ の antichain \diamond_α を \hat{x}_0 が通過するよつうに、とる。 $\gamma_0 = ht(x_0)$, $u_0 \upharpoonright \gamma_0 = x_0$ と定める。

$n > 0$ のとき、まず (1) の性質を用いて $y_n^0 \in T_{\gamma_{n-1}}$ を $y_n^0 > t_n$ 且 $\|u_k \upharpoonright \gamma_{n-1}, y_n^0\|_{\beta_n}^{\gamma_{n-1}} < q_n$ ($k \leq n-1$) とするよつうにとる。(一般性を失わずに $\beta_n = ht(t_n) < \alpha_n$ を仮定してゐる) 次に x_n^0 を $x_n^0 \geq y_n^0$ 且 $ht(x_n^0) \geq \alpha_n$ をみたし、 \hat{x}_n^0 が \diamond_α を通過するよつうにとる。(T を Souslin にするためのマジナイです) $ht(x_n^0)$ を δ_0 と置く。各 $k < n$ によつて x_k^0 を $x_k^0 > u_k \upharpoonright \gamma_{n-1}$ 且 $ht(x_k^0) = \delta_0$ 且 $\|x_k^0, x_n^0\| < q$ 且 $\forall i < k \|x_i^0, x_k^0\|_{\beta_k}^{\delta_0} < \hat{q}_k$ をみたすよつうにとる。こつうしてできた x_k^0 ($k \leq n$) 達から出発して $i \leq n$ に関する帰納法で $\{x_k^i : k \leq n\}$ を次のよつうに定める。 $i > 0$ のとき x_n^{i-1} と x_{i-1}^{i-1} のそれぞれのはげ張 x_n^i, x_{i-1}^i を $ht(x_n^i) = ht(x_{i-1}^i)$ ($= \delta_i$ とおく) 且 $\|x_n^i, x_{i-1}^i\|_{\beta_n}^{\delta_i} < q$ をみたすよつうにとる。しかも可能ならば $\langle x_n^i, x_{i-1}^i \rangle \in T \upharpoonright \alpha \otimes T \upharpoonright \alpha$ が D_α (\diamond によつて指定されてゐる $T \upharpoonright \alpha \otimes T \upharpoonright \alpha$ の antichain) の或る元の上オにあるよつうにとる (T を almost Souslin にするためのマジ

ナイです) $k \neq i-1$ なる $k < n$ には $x_k^i \leq x_k^i > x_k^{i-1}$
 $\& \text{ht}(x_k^i) = \delta_i \& \|x_k^i, x_n^i\| < q_n \& \|x_k^i, x_j^i\|_{\beta_k}^{\delta_i} < \tilde{q}_k$
 for all $j < k$, をみたすようにとる。以上で構築終了。
 $\gamma_n = \delta_n$ とおき, $u_k \upharpoonright \gamma_n = x_k^n$ ($k \leq n$) とおき, \tilde{q}_n を
 $\max \{ \|u_k \upharpoonright \gamma_n, u_n \upharpoonright \gamma_n\| : k < n \} < \tilde{q}_n < q_n$ をみたすよう
 にとる。こうして $\{u_n : n \in \omega\}$ が得られるがこれを T_α と
 おけばよい。 $T = \bigcup T_\alpha$ が目的の tree になっていること
 check は省略する。 \square

2. $T \otimes U$ の型の場合

T, U が Souslin tree であっても $T \otimes U$ は special Aronszajn
 となることがある(その場合必然的に stationary な台を持つ
 antichain を含む)。例えば前節の定理の tree T をとれば比較
 不可能な二元 $x, y \in T$ を取ると T^x, T^y は共に Souslin で
 しかも $T^x \otimes T^y$ は special Aronszajn である。 T^x というのは x の
 拡張の全体を指す。 Jensen & Johnsbråten が作った tree にお
 いては $T^x \otimes T^y$ が closed unbounded な台を持つ antichain を含むよ
 うにさえなっている。残る関心事は $T \otimes U$ 内の antichain が非
 常に小さくなる場合であるが、それも解決されていて、
定理 4. (常識 [K] の 92 頁参照) (\diamond) $T \otimes U$ が Souslin
 であるような Souslin tree の対 T, U がある。

この程度のことは Souslin tree の存在を仮定するだけで導かれるのではないだろうか？ この定理に関しては次のような興味ある結果もある。

定理 5. [M. Zakrzewski] (\diamond) 2^{\aleph_1} 個の Souslin tree T_ξ ($\xi < \omega_1$) が存在して、そのうちのどの有限個の $T_{\xi_1}, \dots, T_{\xi_n}$ に対しても $T_{\xi_1} \otimes \dots \otimes T_{\xi_n}$ が Souslin tree になる。

これら既成定理の形から推して $T \otimes U$ が Souslin になるような T というのは特殊な category を形成するものと考えていた。ところが意外にもそれは否定的だった。

定理 6. (\diamond) どんな Souslin tree T でもうまく Souslin tree U を取れば $T \otimes U$ が Souslin となるようにできる。

証明. Souslin tree T を固定する。 T は $({}^\omega \omega, \subseteq)$ の部分 tree で initial segment になっているとしてよい。このような tree を標準的 tree と呼び。以下で作る U も標準的 tree である。 U を作る際にダイヤモンド \diamond を用いる。 \diamond というのは、 ω_1 の長さを持つ集合列 $\langle D_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ であって次の性質を持っている。

(*) U が標準的な ω_1 -tree で $S \subseteq T \otimes U$ であるならば、それら U, S がどのようなものであろうと \diamond のどこか α 番目に $\{x \in S : ht(x) < \alpha\}$ ($= S_\alpha$ と置く) が記載されている。しかもそのような場所 α は沢山有る。即ちそのような α の全

体 $\{\alpha: S_\alpha = D_\alpha\}$ は ω_1 の stationary 部分集合をなす。
 さて α に関する帰納法で U_α を定義して行く。 $U_0 = \{\emptyset\}$,
 $U_{\beta+1} = \{x \frown \langle n \rangle : x \in U_\beta, n \in \omega\}$ と定める。 $\text{Lim}(\alpha)$ の
 ときが肉題。 α へ収束する上昇列 $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ をとる。 T
 の α -level T_α の元を並べあげて $\langle t_i : i \in \omega \rangle$ と置く。 帰
 納法の仮定により $U[\alpha] = \bigcup_{\beta < \alpha} U_\beta$ (可算集合) はすでに構
 築済み。 \diamond の α 番目の元 D_α が $T[\alpha] \otimes U[\alpha]$ の部分集合である
 と仮定する (そうでない場合は $D_\alpha = T_0 \otimes U_0$ とおけ)。
 $U[\alpha]$ の各元 y に対して $u(y) \in {}^\alpha \omega$ を定義する。 まず $y_0 = y$
 とおき $U[\alpha]$ の元から成る上昇列 $\langle y_i : i \in \omega \rangle$ を (補助的に、
 $\langle \tilde{y}_i : i \in \omega \rangle$ も) 帰納的に次の如く定める。 y_n が定まっ
 たとして、 $\tilde{y}_n > y_n$ を $\text{ht}(\tilde{y}_n) > \alpha_n$ 且つ $\tilde{y}_n \in U[\alpha]$ にとる。
 次に $\tilde{y}_n < u$ 且つ $v < t_n$ ($\{t_n : n \in \omega\} = T_\alpha$ を思い起こせ)
 をみたす pair u, v のうち $\langle v, u \rangle \in D_\alpha$ なるものがあるとき
 はそのような u の一つを y_{n+1} と定める。 なければ $y_{n+1} = \tilde{y}_n$
 とする。 かくしてできた y_n 達の和 $u(y) = \bigcup_{n \in \omega} y_n$ は α
 から ω への関数となる。 ここで $U_\alpha = \{u(y) : y \in U[\alpha]\}$ と
 定める。 以上で $U = \bigcup_{\alpha < \omega_1} U_\alpha$ が定まった。 あとは $T \otimes U$ が
 Souslin なることを示すことだけである。 ($T \otimes U$ が Souslin
 なら必然的に U も Souslin でなければならぬ。 従って U が
 Souslin なることのチェックは不要) ところで、 A が $T \otimes U$

の非可算 antichain だったとせよ。 U の各点 y に対して T の部分集合 $B_y = \{x \in T : \exists u \in U \ y < u \ \& \ \langle x, u \rangle \in A\}$ を考え B_y の極小元の全体を M_y とする。 M_y は antichain なので可算集合である (ここで T が Souslin であることを用いる)。従って、次の性質を持つ λ の全体を C とすると C は ω_1 の club subset となる:

$$(1) \ \lambda < \omega_1 \ \& \ \text{Lim}(\lambda),$$

$$(2) \ y \in U \ \& \ \text{ht}(y) < \lambda \Rightarrow M_y \subseteq T \upharpoonright \lambda.$$

ところで \diamond の性質から $A_\alpha = \{y \in A : \text{ht}(y) < \alpha\}$ と D_α が一致してゐるような α は stationary にある。従って特に $\alpha \in C \ \& \ A_\alpha = D_\alpha$ をみたす α が有る。この α を固定する。 A は非可算であったから α より高い level に A の元がある。その元を $\langle t, u \rangle \in T \otimes U$ とする, $\text{ht}(t) = \text{ht}(u) > \alpha$ 。 U_α の定義のとき用いた T_α の元の enumeration $\langle t_i : i \in \omega \rangle$ を持つてくる。 $t_n < t$ となる t_n がある。また U_α の元は或る $y \in U \upharpoonright \alpha$ を以って $u(y)$ の形で定められてゐる。従って $y \in U \upharpoonright \alpha \ \& \ u(y) < u$ をみたす y がある。さて y_{n+1} の定義を思い起さう, $u(y) = \bigcup_{n \in \omega} y_n$ であった。まず $\langle t, u \rangle \in A \ \& \ u > \tilde{y}_n$ であることから $t \in B_{\tilde{y}_n}$ である。よって $\exists t' \leq t$ s.t. $t' \in M_{\tilde{y}_n}$. (一方 $\text{ht}(\tilde{y}_n) < \alpha$ であるから ($\alpha \in C$ とする性質, 特に (2), から) $M_{\tilde{y}_n} \subseteq T \upharpoonright \alpha$ が成立し, $t' \in T \upharpoonright \alpha$ を得

る。このことと $t' < t$ & $t_n < t$ & $ht(t_n) = \alpha$ とから $t' < t_n$ を得る。よって次が成り立っている:

$$\exists u' > \tilde{y}_n \exists t' < t_n \text{ s.t. } \langle t', u' \rangle \in A$$

ところで $A_\alpha = D_\alpha$ であるから, y_{n+1} の取り方を思い出せば, $y_{n+1} > \tilde{y}_n$ & $\exists t'' < t_n$ s.t. $\langle t'', y_{n+1} \rangle \in D_\alpha = A_\alpha \subseteq A$. これはしかし変である。なぜなら $\langle t'', y_{n+1} \rangle < \langle t, u \rangle$ であるにもかかわらず両者とも antichain A の元であるというのだから。□

3. 残されている問題.

定理6の型の命題は他のものについても考慮されてよい。

すなわち

問題1. どんな Souslin tree T に対してもうまく Souslin tree U をとれば $T \otimes U$ が club の台を持つ antichain を含むようにできるか?

或る T については肯定的であることは既に述べた通りである。(オ2節の冒頭を参照)。次の問題も同様の状況にある。

問題2. どんな Souslin tree T に対しても、うまく Souslin tree U をとれば $T \otimes U$ が special になるか?

もちろん両問とも、少なくとも Souslin tree が存在する状況のもとでの解答が希望されている。問題2については「大変に

面白い問題である。多くの人がこの質問を発している。これが $V=L$ で肯定的に答えられると Jensen の $GCH + SH$ の無矛盾性証明を簡明にできる可能性が高い」と Todorćević が書き送って来た。最後に角田譲氏からの質問を挙げておく。
問題 3。どんな Souslin tree T, U の積 $T \otimes U$ も Souslin とならないような non-trivial (即ち Souslin tree が存在するような) model があるか?

面白い問題と思います。iterated forcing のよい演習問題になるかもしれません。(定理 4 の後の文章と抵触!?)

文 献

- [DJ] K. J. Devlin と H. Johnsbråten, The Souslin Problem, Lecture Notes in Math. 405, Springer-Verlag (1974).
 [JJ] R. B. Jensen と H. Johnsbråten, A new construction of a non-constructible Δ_3^1 subset of ω , Fund. Math. 81 (1974) 279-290; [DJ] pp. 122-125 参照。
 [K] K. Kunen, Set Theory, North-Holland (1980)
 [Z] M. Zakerzewski, Weak product of Souslin trees can satisfy the CCC, Bull. d. l'Acad. Polon. d. Sci. 29 (1981) 99-102.