数理解析研究所講究録
481巻 1983年 178-187

無限次元ユニタリ群のPeter-Weylの定理について

福岡教育大　　櫻井　孝俊
Sakurai Takatoshi

コンパクト、リーマン多様体M上の複素数値C^∞関数のなす空間を$C^\infty(M)$、複素数値2乗可積分関数のなすヒルベルト空間を$L^2(M)$、$C^\infty(M)$の双対空間を$C^\infty(M)^*$で表わすことにする。以下では、E, H, E^*により、それぞれ$C^\infty(M)$, $L^2(M)$, $C^\infty(M)^*$を表わすことにする。Eの線型変換gで、Eの同相写像であり、Hのノルムを変えない(すなわち、$\|g\xi\| = \|\xi\|$, $\xi \in E$)もの全体からなる群を$U(E)$で表わし、無限次元ユニタリ群と呼ぶ。さて、積多様体$M\times M$上の複素数値関数空間$C^\infty(M\times M) \cong E\hat{\otimes}E$, $L^2(M\times M) \cong H\bar{\otimes}H$, $C^\infty(M\times M)^* \cong (E\hat{\otimes}E)^*$ ($E\hat{\otimes}E$はE⊗Eの完備化、$H\bar{\otimes}H$はH⊗Hの完備化を表わす)を考えよう。$\Omega = (E\hat{\otimes}E)^*$とおく。$U(E)$の元$g$に対して、$E\hat{\otimes}E$の線型写像$L_g$, R_gを、

$$L_g(\xi\otimes\eta) = g\xi\otimes\eta, \quad R_g(\xi\otimes\eta) = \xi\otimes g\eta$$

により定義し、gのΩへの作用gx, xg, を

$$\langle gz, \zeta\rangle = \langle z, L_{g^{-1}}\zeta\rangle, \quad \langle zg, \zeta\rangle = \langle z, R_g\zeta\rangle$$

により定義する。また、gは、

$$\langle g, \xi\otimes\eta\rangle = (\xi, g\eta)$$

と定義することにより、$E\hat{\otimes}E$ 上の線型変換と見なすことができる。このことより、$U(E)$をΩの部分集合と思うことができる。

Gel'fand triple

$$E\hat{\otimes}E \subset H\bar{\otimes}H \subset (E\hat{\otimes}E)^*$$

をつくれば、Bochner-Minlosの定理によりΩ上に複素ガウス測度νで、

$$e^{-\|\zeta\|^2} = \int_\Omega e^{i\{\langle z,\zeta\rangle + \overline{\langle z,\zeta\rangle}\}} d\nu(z) \qquad \zeta\in E\hat{\otimes}E$$

を満足するものが存在する。明らかに、測度νは、$U(E)$の左、右からの作用に対して不変ゆえ、$U(E)$の元gに対し、

$$(\pi_L(g)f)(z) = f(g^{-1}z), \qquad (\pi_R(g)f)(z) = f(zg) \qquad f\in L^2(\Omega,\nu)$$

と定義することにより、$U(E)$のユニタリ表現$(\pi_L, L^2(\Omega,\nu))$、$(\pi_R, L^2(\Omega,\nu))$を得る。さらに、$U(E)\times U(E)$の元(g_1, g_2)に対し

$$(\omega_*(g_1,g_2)f)(z) = f(g_1^{-1}zg_2) \qquad f\in L^2(\Omega,\nu)$$

により、$U(E)\times U(E)$のユニタリ表現$(\omega_*, L^2(\Omega,\nu))$を得る。このω$_*$の既約分解(定理2)を与えることが目標である。

M上の実数値C^∞関数からなる、Hの正規直交基底を、$\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$とすれば、$\{\xi_i \otimes \xi_j \,;\, i, j \in N\}$により、$H \otimes H$の正規直交基底が得られる。Nは自然数全体を表わす。そこで、複素エルミート多項式

$$H_{p,q}(t,\bar{t}) = (-1)^{p+q} e^{t\bar{t}} \frac{\partial^{p+q}}{\partial \bar{t}^p \, \partial t^q} e^{t\bar{t}} \qquad (t \in \mathbb{C})$$

を用いて、$\mathcal{B}_{p,q}$を次で定義する。

$$\mathcal{B}_{p,q} = \Big\{ \prod_{i,j=1}^{\infty} (p_{ij}!\, q_{ij}!)^{-\frac{1}{2}} H_{p_{ij},q_{ij}}(\langle z, \xi_i \otimes \xi_j \rangle, \langle \bar{z}, \xi_i \otimes \xi_j \rangle) \,;$$

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} p_{ij} = p, \ \sum_{i,j=1}^{\infty} q_{ij} = q, \ p_{ij}, q_{ij} \geq 0 \Big\}$$

このとき、$\bigcup_{n=0}^{\infty} \big(\bigcup_{p+q=n} \mathcal{B}_{p,q} \big)$は、$L^2(\Omega, \nu)$の正規直交基底となる。$\mathfrak{H}_{p,q}$を$\mathcal{B}_{p,q}$により張られる閉部分空間とおけば、$L^2(\Omega, \nu)$のWiener-Itô分解

$$L^2(\Omega, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \sum_{p+q=n} \oplus \, \mathfrak{H}_{p,q}$$

が得られる。$\mathfrak{H}_{p,q}$が、$\omega_*(U(E) \times U(E))$不変部分空間であることに注意すれば、$U(E) \times U(E)$のユニタリ部分表現$(\omega_{p,q}, \mathfrak{H}_{p,q})$を得る。

次に、$U(E)$の既約ユニタリ表現を構成しよう。Mの$(p+q)$個の直積$M \times \cdots \times M$の点を$(u, v) = (u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$で表わすことにする。r次の対称群を$\mathfrak{S}_r$とする。$\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$は、次のよう

に $M\times\cdots\times M$ 上に右から作用する。

$$(u\cdot\sigma, v\cdot\tau)=(u_{\sigma(1)},\cdots,u_{\sigma(p)},v_{\tau(1)},\cdots,v_{\tau(q)})\quad(\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}_p\times\mathfrak{S}_q$$

(ρ, V_ρ) を $\mathfrak{S}_p$ の既約ユニタリ表現，(δ, V_δ) を $\mathfrak{S}_q$ の既約ユニタリ表現とし、$M\times\cdots\times M$（$p+q$ 個）の、$\mathrm{Hom}(V_\delta, V_\rho)$ に値をもつ、2乗可積分関数のなすヒルベルト空間を、$L^2(M:p+q,\mathrm{Hom}(V_\delta, V_\rho))$ で表わし、$\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}$ を

$$\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}=\{f\in L^2(M:p+q,\mathrm{Hom}(V_\delta, V_\rho))\ ;$$
$$f(u\cdot\sigma, v\cdot\tau)=\rho(\sigma)^{-1}f(u,v)\delta(\tau)\ ,\ \sigma\in\mathfrak{S}_p,\ \tau\in\mathfrak{S}_q\}$$

で定義する。ここで

$$\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}\subset L^2(M:p+q,V)\cong L^2(M:p+q)\otimes V\cong L^2(M)\bar{\otimes}\cdots\bar{\otimes}L^2(M)\otimes V$$

（但し、$V=\mathrm{Hom}(V_\delta, V_\rho)$）なる同型があるので、$U(E)$ の $\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}$ 上へのユニタリ表現を次のように構成する。g を $U(E)$ の元とし

$$\hat{\pi}_{p,q}(g)(\xi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{i_p}\otimes\xi_{k_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{k_q})=g\xi_{i_1}\otimes\cdots\otimes g\xi_{i_p}\otimes g^*\xi_{k_1}\otimes\cdots\otimes g^*\xi_{k_q}$$
$$(\xi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{i_p}\otimes\xi_{k_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{k_q}\in L^2(M)\bar{\otimes}\cdots\bar{\otimes}L^2(M))$$

と定義する。ここで g^* は g の随伴作用素を表わす。このとき次の可換な図式

$$\begin{tikzcd}
L^2(M:p+q,V) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_{p,q,\rho,\delta}(g)"] & L^2(M:p+q)\otimes V \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_{p,q}(g)\otimes I"] & L^2(M)\bar{\otimes}\cdots\bar{\otimes}L^2(M)\otimes V \arrow[d, "\hat{\pi}_{p,q}(g)\otimes I"] \\
L^2(M:p+q,V) \arrow[r, phantom, "\cong"] & L^2(M:p+q)\otimes V \arrow[r, phantom, "\cong"] & L^2(M)\bar{\otimes}\cdots\bar{\otimes}L^2(M)\otimes V
\end{tikzcd}$$

（但し、I は V 上の恒等写像を表わす）

を満足するような、$L^2(M:p+q)$ 上のユニタリ作用素 $\tilde{\pi}_{p,q}(g)$ 及び、$L^2(M:p+q,\mathrm{Hom}(V_\delta,V_\rho))$ 上のユニタリ作用素 $\tilde{\pi}_{p,q,\rho,\delta}(g)$ が存在する。また、$\hat{\lambda}(\sigma,\tau)$, $\tilde{\lambda}(\sigma,\tau)$ をそれぞれ

$$\hat{\lambda}(\sigma,\tau)(\xi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{i_p}\otimes\xi_{k_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{k_q})$$
$$=\xi_{i_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes\xi_{i_{\sigma(p)}}\otimes\xi_{k_{\tau(1)}}\otimes\cdots\otimes\xi_{k_{\tau(q)}}$$

$$(\tilde{\lambda}(\sigma,\tau)f)(u,v)=f(u\cdot\sigma,v\cdot\tau)\qquad(f\in L^2(M:p+q,V))$$

と定義すれば、次の可換な図式

$$\begin{tikzcd}
L^2(M:p+q,V) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\tilde{\lambda}(\sigma,\tau)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & L^2(M)\,\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}\,L^2(M)\otimes V \arrow[d, "\hat{\lambda}(\sigma,\tau)\otimes I"] \\
L^2(M:p+q,V) \arrow[r, phantom, "\cong"] & L^2(M)\,\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}\,L^2(M)\otimes V
\end{tikzcd}$$

が得られる。$\tilde{\pi}_{p,q,\rho,\delta}(g)$ と $\tilde{\lambda}(\sigma,\tau)$ とが可換ゆえ、$\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}$ は、$\tilde{\pi}_{p,q,\rho,\delta}(g)$ 不変部分空間である。したがって、$U(E)$ のユニタリ表現 $(\pi_{p,q,\rho,\delta},\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta})$ が得られる。

定理1　1)　(ρ,V_ρ) を $\mathfrak{S}_p$ の既約表現，(δ,V_δ) を $\mathfrak{S}_q$ の既約表現とすれば、$(\pi_{p,q,\rho,\delta},\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta})$ は既約表現である。

2)　$\pi_{p,q,\rho,\delta}$ と $\pi_{p',q',\rho',\delta'}$ とが同値な表現となる必要十分条件は、$p=p'$, $q=q'$ かつ、ρ と ρ', δ と δ' とが、それぞれ同値な表現となることである。

$$(M:r)'=\{(u_1,\dots,u_r)\in M\times\cdots\times M;\ u_i\neq u_j\ (i\neq j)\}$$ とおく。

このとき、$M\times\cdots\times M$（p個）の開集合F_pと$M\times\cdots\times M$（q個）の開集合F_qを、次の写像

$$F_p\times F_q\times\mathfrak{S}_p\times\mathfrak{S}_q\ni(u,v,\sigma,\tau)\longmapsto(u\cdot\sigma,v\cdot\tau)\in(M:p)'\times(M:q)'$$

が全単射となるように、とることができる。$L^2(\mathfrak{S}_r)$を$\mathfrak{S}_r$上の関数全体とし、$\mathfrak{S}_r$に正規化されたハール測度を入れると、$\mathfrak{S}_r$に対するPeter-Weylの定理により、

$$L^2(\mathfrak{S}_r)=\sum_{\rho\in\hat{\mathfrak{S}}_r}\oplus(V_\rho\otimes V_\rho^*)$$

を得る。以上より次の同型が得られる。

$$\begin{aligned}
L^2(M:p+q)&\cong L^2(F_p\times F_q\times\mathfrak{S}_p\times\mathfrak{S}_q)\\
&\cong(L^2(F_p)\otimes L^2(\mathfrak{S}_p))\,\overline{\otimes}\,(L^2(F_q)\otimes L^2(\mathfrak{S}_q))\\
&\cong\Big(\sum_{\rho\in\hat{\mathfrak{S}}_p}L^2(F_p)\otimes V_\rho\otimes V_\rho^*\Big)\overline{\otimes}\Big(\sum_{\delta\in\hat{\mathfrak{S}}_q}L^2(F_q)\otimes V_\delta\otimes V_\delta^*\Big)\\
&\cong\sum_\rho\sum_\delta(L^2(F_p)\,\overline{\otimes}\,L^2(F_q)\otimes V_\rho\otimes V_\delta^*)\otimes V_\rho^*\otimes V_\delta\\
&\cong\sum_\rho\sum_\delta L^2(F_p\times F_q,\mathrm{Hom}(V_\delta,V_\rho))\otimes V_\rho^*\otimes V_\delta\\
&\cong\sum_\rho\sum_\delta\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}\otimes V_\rho^*\otimes V_\delta
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\sum_\rho\sum_\delta(\dim(V_\rho^*\otimes V_\delta))^2&=(\textstyle\sum_\rho(\dim V_\rho)^2)(\sum_\delta(\dim V_\delta)^2)\\
&=p!\,q!
\end{aligned}$$

となる。したがって、定理１の証明は、$L^2(M:p+q)$上のintertwining作用素の空間$\mathrm{Hom}_{U(E)}(L^2(M:p+q),L^2(M:p+q))$の次元が$p!\,q!$であることを示せばよい。しかし、この為には

まだ準備が必要なので、ここでは省略する（［４］を参照）。

ω_* の既約成分は、"Peter-Weylの定理"の類似として、次の定理２により与えられる。

定理２ （Peter-Weylの定理）　ω_* は、次の既約分解をもつ。

$$L^2(\Omega,\nu)=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus\sum_{p+q=n}\oplus\sum_{\rho\in\hat{\mathfrak{S}}_p}\sum_{\sigma\in\hat{\mathfrak{S}}_q}\oplus(\mathcal{H}_{p,q,\rho,\sigma}\,\overline{\otimes}\,\mathcal{H}^*_{p,q,\rho,\sigma})$$

ここで、$\omega_{p,q}(g_1,g_2)$ は、$\pi_{p,q,\rho,\sigma}(g_1)\otimes\pi^*_{p,q,\rho,\sigma}(g_2)$ と対応している。

（証明）　$L^2(\Omega,\nu)$ のWiener-Itô分解は、

$$L^2(\Omega,\nu)=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus\sum_{p+q=n}\oplus\mathcal{H}_{p,q}$$

であった。ここに現われる $\mathcal{H}_{p,q}$ は、以下のような特徴づけがなされる。$L^2(\Omega,\nu)$ の元 f を、$E\hat{\otimes}E$ 上の汎関数に写す写像 $\mathcal{J}$ を、

$$(\mathcal{J}f)(\zeta)=\int_{\Omega}e^{i\{\langle z,\zeta\rangle+\overline{\langle z,\zeta\rangle}\}}\,\overline{f(z)}\,d\nu(z)$$

で定義する。例えば、$\mathcal{H}_{p,q}$ の元として

$$\varphi=\prod_{i,j=1}^{\infty}(p_{ij}!\,q_{ij}!)^{-\frac{1}{2}}H_{p_{ij},q_{ij}}(\langle\cdot,\xi_i\otimes\xi_j\rangle,\overline{\langle\cdot,\xi_i\otimes\xi_j\rangle})$$

をとれば、

$$(\mathcal{J}\varphi)(\zeta)=e^{-\|\zeta\|^2}i^{p+q}\prod_{i,j=1}^{\infty}\overline{(\zeta,\xi_i\otimes\xi_j)}^{p_{ij}}(\zeta,\xi_i\otimes\xi_j)^{q_{ij}}$$

となる。$\sum_{i,j} p_{ij}+\sum_{i,j} q_{ij}=p+q$ ゆえ $\prod_{i,j}\overline{(\zeta,\xi_i\otimes\xi_j)}^{p_{ij}}(\zeta,\xi_i\otimes\xi_j)^{q_{ij}}$ は、$(M\times M)\times\cdots\times(M\times M)$（$p+q$ 個）上の積分となる。そこで、$(M\times M)$ の $p+q$ 個の積多様体 $(M\times M)\times\cdots\times(M\times M)$ の2乗可積分関数のなすヒルベルト空間を $L^2(M\times M:p+q)$ で表わし、$L^2(M\times M:p+q)^\wedge$ を、

$$L^2(M\times M:p+q)^\wedge=\{F\in L^2(M\times M:p+q);$$
$$F((u^1_{\alpha(1)},u^2_{\alpha(1)}),\cdots,(u^1_{\alpha(p)},u^2_{\alpha(p)}),(v^1_{\tau(1)},v^2_{\tau(1)}),\cdots,(v^1_{\tau(q)},v^2_{\tau(q)}))$$
$$=F((u^1_1,u^2_1),\cdots,(u^1_p,u^2_p),(v^1_1,v^2_1),\cdots,(v^1_q,v^2_q)),\ \alpha\in\mathfrak{S}_p,\ \tau\in\mathfrak{S}_q\}$$

とおく。このとき、$\mathfrak{H}_{p,q}$ の任意の元 f に対して、$L^2(M\times M:p+q)^\wedge$ の元 F が唯ひとつ存在して

$$(\mathcal{J}f)(\zeta)=e^{-\|\zeta\|^2}i^{p+q}\int_{(M\times M)\times\cdots\times(M\times M)}F((u^1_1,u^2_1),\cdots,(u^1_p,u^2_p),(v^1_1,v^2_1),\cdots,(v^1_q,v^2_q))$$
$$\times\zeta(u^1_1,u^2_1)\cdots\zeta(u^1_p,u^2_p)\zeta(v^1_1,v^2_1)\cdots\zeta(v^1_q,v^2_q)\,du^1_1du^2_1\cdots dv^1_q dv^2_q$$

となる。したがって、次の同型が得られる。

$$\mathfrak{H}_{p,q}\cong L^2(M\times M:p+q)^\wedge$$

$\mathfrak{S}_p$ の元 α と、$\mathfrak{S}_q$ の元 τ、及び、$L^2(M:p+q)$ の元 f に対して、

$$(\lambda(\alpha,\tau)f)(u,v)=f(u\cdot\alpha,v\cdot\tau)$$

と定義すれば、$L^2(M:p+q)\cong\sum_\rho\sum_\delta\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}\otimes V^*_\rho\otimes V_\delta$ において、$\lambda(\alpha,\tau)$ は $I\otimes\rho^*(\alpha)\otimes\delta(\tau)$ と対応する。但し I は、$\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}$ 上の恒等写像を表わす。したがって、以下の同型が

得られる。

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{h}_{p,q} &\cong L^2(M\times M : p+q)^{\wedge} \\
&\cong \{ f\in L^2(M:p+q)\overline{\otimes} L^2(M:p+q)\ ;\ (\lambda(\sigma,\tau)\otimes\lambda(\sigma,\tau))f=f \\
&\qquad\qquad \sigma\in\mathfrak{S}_p,\ \tau\in\mathfrak{S}_q \} \\
&\cong \{ \gamma\in \textstyle\sum_{\rho_1}\sum_{\delta_1}\sum_{\rho_2}\sum_{\delta_2}(\mathcal{H}_{p,q,\rho_1,\delta_1}\otimes V^*_{\rho_1}\otimes V_{\delta_1})\overline{\otimes}(\mathcal{H}_{p,q,\rho_2,\delta_2}\otimes V^*_{\rho_2}\otimes V_{\delta_2})\ ; \\
&\qquad (I\otimes\rho^*_1(\sigma)\otimes\delta_1(\tau)\otimes I\otimes\rho^*_2(\sigma)\otimes\delta_2(\tau))\gamma=\gamma,\ \sigma\in\mathfrak{S}_p,\ \tau\in\mathfrak{S}_q \} \\
&\cong \textstyle\sum_{\rho}\sum_{\delta}\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}\ \overline{\otimes}\ \mathcal{H}_{p,q,\rho^*,\delta^*} \\
&\cong \textstyle\sum_{\rho}\sum_{\delta}\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}\ \overline{\otimes}\ \mathcal{H}^*_{p,q,\rho,\delta}
\end{aligned}
$$

なお、上記の式変形において

$$
\dim\{ w\in V^*_{\rho_1}\otimes V_{\delta_1}\otimes V^*_{\rho_2}\otimes V_{\delta_2}\ ;\ (\rho^*_1(\sigma)\otimes\delta_1(\tau)\otimes\rho^*_2(\sigma)\otimes\delta_2(\tau))w=w,
$$

$$
\sigma\in\mathfrak{S}_p,\ \tau\in\mathfrak{S}_q \}
$$

$$
=\begin{cases} 0 & (\rho_1\not\simeq\rho^*_2 \text{ または } \delta^*_1\not\simeq\delta_2) \\ 1 & (\rho_1\simeq\rho^*_2 \text{ かつ } \delta^*_1\simeq\delta_2) \end{cases}
$$

となることを用いた。$\rho_1\simeq\rho^*_2$ は ρ_1 と ρ^*_2 とが同値な表現であることを表わす。

以上により、$L^2(\Omega,\nu)$ の既約分解が証明された。$\omega_{p,q}(g_1,g_2)$ が、$\pi_{p,q,\rho,\delta}(g_1)\otimes\pi^*_{p,q,\rho,\delta}(g_2)$ に対応していることは、明らかであろう。

参考文献

[1] T. Hida, Brownian motion, Springer-Verlag (1980).

[2] H. Matsushima, K. Okamoto and T. Sakurai, On a certain class of irreducible unitary representations of the infinite dimensional rotation group I, Hiroshima Math. J. 11 (1981), 181-193.

[3] K. Okamato and T. Sakurai, On a certain class of irreducible unitary representations of the infinite dimensional rotation group II, Hiroshima Math. J. 12 (1982), 385-397.

[4] K. Okamoto and T. Sakurai, An analogue of Peter-Weyl theorem for the infinite dimensional unitary group, Hiroshima Math. J. to appear.