数理解析研究所講究録
481巻 1983年 38-43

p-進Chevalley群の極大K-トーラスのある共役類について

尾道短大 刈山 和俊
Kariyama Kazutoshi
広大・理 土井 英雄
Doi Hideo

記号 K：あるp-進体 i.e. $\mathbb{Q}_p$の有限次代数拡大体.

G：ある連結，単純，単連結なK上のChevalley群.

A：K上分解するある極大K-トーラス.

N：AのGにおける正規化部分群.

$W=N/A$：Weyl群.

$w_0 \in W$を次のように取る：

GがA_n, F_4, G_2-型の時，

w_0はあるCoxeter元.

GがB_n, C_n-型の時，

$$w_0=(1 \cdots r_1)^-(r_1+1 \cdots r_1+r_2)^- \cdots (r_1+\cdots+r_{s-1}+1 \cdots n)^-$$

但し， $n=r_1+r_2+\cdots+r_{s-1}+r_s$.

B_n, C_n-型のWeyl群はvector space Vの基底$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$上符号変換と置換との半直積である。例えば

$(12\cdots r_1)^-: e_1 \mapsto e_2 \mapsto \cdots \mapsto e_{r_1} \mapsto -e_1$

m : w_0の位数

以上の記号の下に次の問題を考える。

問題　Gの極大K-トーラスのK上共役類を分類せよ。特にanisotropic極大K-トーラスのK上共役類を分類せよ。

それらは$G(K)$のコムパクトCartan部分群のK上共役類を与える。但し、$G(K)$はGのK上有理点よりなる群。

TをGのある極大K-トーラスとすると、$T=gAg^{-1}$，L/Kは有限次Galois拡大となる$G(L)$の元gが取れる。この時、Tを「L上分解する」と呼ぶ。今後，L/Kを次数mのある巡回Galois拡大とし，σをL/KのGalois群$\Gamma = Gal(L/K)$のある生成元としよう。更に、$N(L)$の元$g^{-1}\sigma g$の$W=N(L)/A(L)$への標準像$\overline{g^{-1}\sigma g}$が$w_0$に等しくなるような$K$-トーラス$T$（もし存在すれば）を，仮に「$w_0$に付随するトーラス」と呼ぶ。上の問題を次のように制限しよう。

問題　L上分解し，w_0に付随する極大K-トーラスのK上共役類はどのくらい存在するのか。

上のK-トーラスはK上anisotropicである。この問題をGalois cohomologyの言葉で定式化する。

Gの極大K-トーラスのK上共役類と $H^1(Gal(K_s/K), N(K_s))$ との間に一対一対応が存在する。但し、K_sはKのある分離閉包。これよりL上分解する極大K-トーラスのK上共役類と $H^1(Gal(L/K), N(L))$ との一対一対応が導かれる。そして、標準写像 $N(L) \longrightarrow W = N(L)/A(L)$ より

$$f_L : H^1(Gal(L/K), N(L)) \longrightarrow H^1(Gal(L/K), W)$$

が導かれる。次に $C(w_0)$ を 1-cocycle $\sigma \longmapsto w_0 : \Gamma \longrightarrow W$ （よって $H^1(Gal(L/K), W)$ の元である。）とすると、$C(w_0)$ の f_L による逆像 $f_L^{-1}(C(w_0))$ は先程の対応により、L上分解し、w_0に付随する極大K-トーラスのK上共役類と一対一対応が導かれる。

$$\begin{tikzcd}
H^1(Gal(K_s/K), N(K_s)) & \\
H^1(Gal(L/K), N(L)) \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_L"] & H^1(Gal(L/K), W) \\
f_L^{-1}(C(w_0)) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & C(w_0) \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"]
\end{tikzcd}$$

したがって、我々は次の問題を考えればよい。

問題　$j_L^{-1}(C_{(w_0)})$ の構造を調べよ。

$N(K)$ の元 n_0 を w_0 のある代表元とする。Tate-Nakayama の定理を使うと、1-cocycle：$\sigma \longmapsto n_{w_0} : \Gamma \longrightarrow N(L)$ で $n_{w_0} = t_0 n_0$，$t_0 \in A(L)$ となるものが存在する。今後それを固定する。$A(L)$ 上に新しい Γ-加群を

$$_\sigma a = \sigma(w_0 a) \quad , \quad a \in A(L)$$

で定義し，それを ${}_{w_0}A(L)$ と表わす。この Γ-加群に対して $H^1(\Gamma, {}_{w_0}A(L))$ 上 w_0 の W における中心化群 $Z_W(w_0)$ の作用を次で定義する；任意の $w \in Z_W(w_0)$ と，1-cocycle $\sigma \longmapsto a : \Gamma \longrightarrow {}_{w_0}A(L)$ とに対して，

1-cocycle $\sigma \longmapsto (wa)(t_0^{-1} w_0 t_0)\cdot(n_w n_0 n_w^{-1} n_0^{-1})$

$: \Gamma \longrightarrow {}_{w_0}A(L)$.

但し、n_w は $N(K)$ における w のある代表元。ここで写像

$j_L^{-1}(C_{(w_0)}) \longrightarrow H^1(\Gamma, {}_{w_0}A(L))$ が次で与えられる；

1-cocycle $\sigma \longmapsto n : \Gamma \longrightarrow N(L)$ に対して，1-cocycle $\sigma \longmapsto n n_{w_0}^{-1} : \Gamma \longrightarrow {}_{w_0}A(L)$ を対応づける。

補題　上の写像が一対一対応

$$j_L^{-1}(C_{(w_0)}) \xrightarrow{\sim} H^1(\Gamma, {}_{w_0}A(L))/Z_W(w_0)$$

を与える。但し、右辺は、前に定義した作用に関する

orbit類。

したがって、$H^1(\Gamma, {}_{w_0}A(L))/Z_W(w_0)$ の構造を調べればよい。まず $H^1(\Gamma, {}_{w_0}A(L))$ の構造に関して次の定理が得られる。

定理1　各Gの型に対して、$H^1(\Gamma, {}_{w_0}A(L))$ と次の群との間に同型が与えられる：

（A_n－型）　$K^\times/N_{L/K}(L^\times) \xrightarrow{\sim} Gal(L/K)$

但し、$N_{L/K}: L \to K$：ノルム写像

（B_n, C_n－型）　$\prod_{i=1}^{s}(K_{r_i} \cap N_{L/K_{2r_i}}(L^\times)/N_{L/K_{r_i}}(L^\times))$

$\xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{s} Gal(L/F_i)$

但し、$K_r = \{x \in L \mid \sigma^r x = x\}$、$F_i = K_m$ または L。

（F_4, G_2－型）　$\{0\}$　（trivial）

最後に、$H^1(\Gamma, {}_{w_0}A(L))/Z_W(w_0)$ の構造に関して次の定理が得られる。

定理2　各Gの型に対して、$H^1(\Gamma, {}_{w_0}A(L))/Z_W(w_0)$ は次の群との間に一対一対応が与えられる：

(A_n-型)　$K^\times / (N_{L/K}(L^\times) \cup (-1)^n N_{L/K}(L^\times))$

(B_n, C_n-型)　$r_1, r_2, \cdots, r_s$ のうち相異なる整数を $d_1, d_2, \cdots, d_\ell$ とすると、

$$\prod_{i=1}^{\ell} \left\{ (K_{d_i} \cap N_{L/K_{2d_i}}(L^\times)) / (N_{L/K_{d_i}}(L^\times) \cup \gamma_i N_{L/K_{d_i}}(L^\times)) \right\}$$

但し、γ_i について　$\gamma_i^2 \equiv 1 \mod N_{L/K_{d_i}}(L^\times)$ であるが、

B_n-型の場合；　$[\frac{d_i+1}{2}]$ が偶数のときは，$\gamma_i = 1$。

$[\frac{d_i+1}{2}]$，d_i 共に奇数のときは，$\gamma_i = -1$　。

$[\frac{d_i+1}{2}]$ が奇数かつ d_i が偶数のときは，

$\gamma_i \equiv 1 \mod N_{L/K_{d_i}}(L^\times)$　となるための必要十分条件は　$z^{-1}\sigma^{r_i} z = -1$ かつ $z^{-1}\sigma z \in N_{L/K_{d_i}}(L^\times)$ となる $N_{L/K_{2d_i}}(L^\times)$ の元 z が取れる。特に L/K が不分岐拡大のときは　$\gamma_i = 1$。　但し　$[\ ,\ ]$ は Gauss 記号。

C_n-型の場合：　$m = 2m'$ と書ける。$\frac{m'}{d_i}$ が偶数のときは、$\gamma_i = 1$。　$\frac{m'}{d_i}$，d_i 共に奇数のときは，$\gamma_i = -1$。

$\frac{m'}{\gamma_i}$ が奇数かつ d_i が偶数のときは、B_n-型の $[\frac{d_i+1}{2}]$ が奇数，d_i が偶数の場合と同じ。

(F_4, G_2-型)　$\{0\}$　(trivial)