数理解析研究所講究録
481 巻 1983 年 18-27

$Sp(m,\mathbb{R})$の普遍被覆群の表現と多変数 Bessel 函数

京大 理　　梅田 亨
Umeda Tôru

Weil [6] の metaplectic 表現を"高次"のものに拡張する試みは $SL(2,\mathbb{C})$に対して Kubota による一連の仕事[2]～[5] があり，又 $SL(2,\mathbb{R})$に対しても Yamazaki [8]による類似の構成がある。彼らは Fourier 変換の代りに Bessel 函数を積分核とする Fourier-Bessel 変換を用いた。ここでは，Herz [1] の定義した行列変数の Bessel函数を用いることにより $Sp(m,\mathbb{R})$の普遍被覆群のユニタリ表現が同様に構成できる事を示し，それに関聯した $Sp(m,\mathbb{R})$の被覆群についての注意を与える。

記号. 以下自然数 m を固定し，$p=\frac{m+1}{2}$ とおく. m 次の実又は複素対称行列全体を $S_m(\mathbb{R})$, $S_m(\mathbb{C})$ で表す. P_m で m 次正定値実対称行列全体，$\mathfrak{h}_m$ で m 次 Siegel上半空間を表す. m 次の実 symplectic 群 $Sp(m,\mathbb{R})$ は通常の如く

$$Sp(m,\mathbb{R}) = \{\sigma \in GL(2m,\mathbb{R})\ ;\ {}^t\sigma J\sigma = J\},\quad J=\begin{pmatrix}0_m & -1_m\\ 1_m & 0_m\end{pmatrix}$$

とする．$\sigma \in Sp(m,\mathbb{R})$ を $m\times m$ block に分けて $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in M_m(\mathbb{R})$ と書く時，$c = c(\sigma)$ と表す．$Sp(m,\mathbb{R})$ の特別の三種の元を

$$d(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{pmatrix}, \quad t(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d'(c) = \begin{pmatrix} 0 & -{}^t c^{-1} \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

と表す．$(a, c \in GL(m,\mathbb{R}),\ b \in S_m(\mathbb{R}))$．$Sp(m,\mathbb{R})$ の open dense な部分集合 $\Omega = \{\sigma \in Sp(m,\mathbb{R});\ \det c(\sigma) \neq 0\}$ を考える．Ω の元 σ は $\sigma = t(b_1)\, d'(c)\, t(b_2)$ の形に一意に分解される．

$etr(a) = \exp(\mathrm{tr}\, a)$，$e_\delta(\zeta) = \exp\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\,(\delta+p)\zeta\right)$ という略記を行う．x, $\sigma \in Sp(m,\mathbb{R})$, $z \in \mathfrak{h}_m$ に対し $\sigma\cdot z = (az+b)(cz+d)^{-1}$ とする．

§1. Herz の Bessel 函数 （Herz [1] の結果の要約）

1.1. 定義．$\delta \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\delta > p-1$ とする．このとき

$$A_\delta(x) = (2\pi\sqrt{-1})^{-\frac{m(m+1)}{2}} \int_{\substack{z \in S_m(\mathbb{C}) \\ \mathrm{Re}\, z = x_0 > 0}} etr(z - xz^{-1})\, (\det z)^{-\delta-p}\, dz$$

という絶対収束する積分によって Herz の Bessel 函数を定義する．但，$x \in S_m(\mathbb{C})$，$dz = \prod_{i \geq j} dz_{ij}$ $z = (z_{ij}) \in S_m(\mathbb{C})$，で $x_0 \in P_m$ をひとつ固定する．積分は x_0 のとり方によらない．これは δ についても解析接続され，x, δ の entire function になる．$A_\delta(x)$ は定義から $A_\delta({}^t u x u) = A_\delta(x)$ $(u \in O(m,\mathbb{C}))$ を満すから実は x の固有値の対称函数である．この性質を用いて $A_\delta(x)$ の定義域を複素 m 次行列全体にまでひろげておく．

注意. $m=1$ の場合，通常の Bessel 函数 $J_\delta(x)$ との関係は，

$J_\delta(x) = A_\delta(\frac{1}{4}x^2)(\frac{x}{2})^\delta$ となっている．

1.2. Hankel 変換. 以下 δ を実数で -1 より大とする．$L^2_\delta(P_m)$ で P_m 上の測度 $(\det x)^\delta dx$ に関する自乗可積分函数全体のなす Hilbert 空間を表す．但，$dx = \prod_{i \geq j} dx_{ij}$，$x=(x_{ij}) \in P_m$ dx_{ij} は1次元の Lebesgue 測度．さて $A_\delta(xy)$ を積分核にもつ変換を考えよう：

$$\varphi^*(x) = \int_{P_m} \varphi(y) A_\delta(xy)(\det y)^\delta dy.$$

これは φ が compact support をもつ連続函数ならば絶対収束するが，実は $L^2_\delta(P_m)$ 上のユニタリ作用素に拡張される．更に $\varphi^{**} = \varphi$ を満す．

1.3. Weber's second exponential integral. $\mathrm{Re}\,\delta > -1$，$a, b \in P_m$，$\mathrm{Re}\, z > 0$ に対して次の積分公式が成り立つ．

$$\int_{P_m} \mathrm{etr}(-xz) A_\delta(ax) A_\delta(bx)(\det x)^\delta dx$$
$$= \mathrm{etr}(-(a+b)z^{-1}) A_\delta(-az^{-1}bz^{-1})(\det z)^{-\delta-p}.$$

注意. これらの結果の基礎にあるのは A_δ の Laplace 変換の公式である．

$$\int_{P_m} \mathrm{etr}(-xz) A_\delta(xy)(\det x)^\delta dx = \mathrm{etr}(-yz^{-1})(\det z)^{-\delta-p}.$$

これは $y \in P_m$，$\mathrm{Re}\, z > 0$，$\mathrm{Re}\,\delta > -1$ に対して成立する．

§2. Weil型の因子

以下 $\delta > -1$ とする. Weil, Kubota, Yamazaki の類似に従って, $L^2_\delta(P_m)$ 上に次の三種のユニタリ作用素を定義する.

$$\mathbf{d}_\delta(a)\,\varphi(x) = \varphi({}^t a x a)\,|\det a|^{\delta+p} \qquad (a \in GL(m,\mathbb{R})),$$

$$\mathbf{t}_\delta(b)\,\varphi(x) = \varphi(x)\,\mathrm{etr}(\sqrt{-1}\,bx) \qquad (b \in S_m(\mathbb{R})),$$

$$\mathbf{d}'_\delta(c)\,\varphi(x) = \varphi^*(c^{-1} x\, {}^t c^{-1})\,|\det c|^{-\delta-p} \qquad (c \in GL(m,\mathbb{R})).$$

さらに $\sigma \in \Omega$ に対して, 分解 $\sigma = t(b_1)\,d'(c)\,t(b_2)$ を用いて

$$\mathbf{r}_\delta(\sigma) = \mathbf{t}_\delta(b_1)\,\mathbf{d}'_\delta(c)\,\mathbf{t}_\delta(b_2)$$

と定める. このとき, 次が成り立つ.

命題. ${}^t b = b \in GL(m,\mathbb{R})$ に対し,

$$(\mathbf{d}'_\delta(-b^{-1})\,\mathbf{t}_\delta(b))^3 = \mathbf{e}_\delta(\mathrm{sgn}\, b).$$

ここで $\mathrm{sgn}\, b$ は対称行列 b の慣性指数(正の固有値の数から負の固有値の数を引いたもの)である.

定理. $\sigma, \sigma', \sigma'' = \sigma\sigma' \in \Omega$ とする. このとき,

$$\mathbf{r}_\delta(\sigma)\,\mathbf{r}_\delta(\sigma') = \mathbf{r}_\delta(\sigma'')\,\mathbf{e}_\delta\bigl(\mathrm{sgn}(c^{-1}c''c'^{-1})\bigr).$$

但し, $c = c(\sigma)$, $c' = c(\sigma')$, $c'' = c(\sigma'')$.

命題の証明には §1.3. の Weber's second exponential integral の公式が用いられる. 定理は命題から形式的に導くことができる.

§3. $Sp(m,\mathbb{R})$ の普遍被覆群に対する因子団.

$Sp(m,\mathbb{R})^{\sim}$ を $Sp(m,\mathbb{R})$ の普遍被覆群とし,

$$0 \to \mathbb{Z} \to Sp(m,\mathbb{R})^{\sim} \to Sp(m,\mathbb{R}) \to 1$$

を被覆をあらわす中心拡大とする ($Sp(m,\mathbb{R})$ の基本群は $\mathbb{Z}$).
$s : Sp(m,\mathbb{R}) \to Sp(m,\mathbb{R})^{\sim}$ をひとつの cross section とすると
$A(\sigma,\sigma') \doteq s(\sigma)s(\sigma')s(\sigma\sigma')^{-1}$ は中心 $\mathbb{Z}$ に属する. $\{A(\sigma,\sigma')\,;\,\sigma,\sigma'\in Sp(m,\mathbb{R})\}$ を因子団という. $A(\sigma,\sigma')$ は cocycle の条件

$$A(\sigma\sigma',\sigma'')+A(\sigma,\sigma')=A(\sigma,\sigma'\sigma'')+A(\sigma',\sigma'')$$

を満たす. この§の目標は普遍被覆群に対する因子団を具体的に定義することである.

若干の記号を導入する. $\xi\in\mathbb{C}$, $\xi\neq 0$ に対して偏角の主値を $-\pi \leqq \operatorname{Arg}\xi < \pi$ となるようにきめる. 行列 a に対して $\operatorname{Arg}(a)=\sum_{\mu}\operatorname{Arg}\mu$, ($\mu$ は a の zero でない固有値), と定義する. もし a が実対称であれば

$$\operatorname{Arg}(a)=\frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn}(a)-\operatorname{rank}(a))$$

という関係をみたす. そこで逆に任意の行列に対して

$$\operatorname{Sgn}(a)=\frac{2}{\pi}\operatorname{Arg}(a)+\operatorname{rank}(a)$$

と定義する.

<u>3.1.</u> $\sigma\in\Omega$ に対する分解 $\sigma=t(b_1)d'(c)t(b_2)$ を一般化する. それは Weil [6, Ch.V, n^{os} 46-47, Prop.6, Cor's 1 & 2] で述べられている. 以下それを説明しよう.

$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $r = \mathrm{rank}\, c$ とする．$\mathbb{R}^m$ を横ベクトルの空間として $V_1 = \mathbb{R}^m c$，$V_2 = V_1^{\perp}$ とする．V_1, V_2 の C.O.N.S を $u_1, \cdots, u_r$ 及び $u_{r+1}, \cdots, u_m$ とし，これらをたてに並べて $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ という直交行列を作る．又 $e_1 = \begin{pmatrix} 1_r & \\ & 0_{m-r} \end{pmatrix}$，$e_2 = 1_m - e_1 = \begin{pmatrix} 0_r & \\ & 1_{m-r} \end{pmatrix}$ $E_r = \begin{pmatrix} e_2 & -e_1 \\ e_1 & e_2 \end{pmatrix}$ とおく．このとき σ は次の形に分解される．

$$\sigma = d(u^{-1})\, t(g)\, d({}^t\lambda^{-1})\, E_r\ t(h)\ d(u)$$

ここで $g, h \in S_m(\mathbb{R})$，$e_1 h e_1 = h$，$\lambda \in GL(m, \mathbb{R})$．又 u を fix すると この分解は一意である．

3.2. $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(m, \mathbb{R})$，$z \in \mathfrak{H}_m$ に対して $J(\sigma, z) = cz + d$，$j(\sigma, z) = \det(cz + d)$ とおく．上の分解を用いると

$$J(\sigma, z) = u^{-1}(\lambda(e_1(uz\,{}^tu + h) + e_2)\, u$$

と書ける．そこで $j(\sigma, z)$ の偏角を次の如く定義する．

$$AJ(\sigma, z) = \mathrm{Arg}(\lambda) + \mathrm{Arg}(e_1(uz\,{}^tu + h) + e_2).$$

重要なのは次の命題である．

命題　$\sigma \in Sp(m, \mathbb{R})$ を fix するとき $AJ(\sigma, z)$ は z の函数として $\mathfrak{H}_m$ 上連続である．

一方，$J(\sigma\sigma', z) = J(\sigma, \sigma' z) J(\sigma', z)$，$j(\sigma\sigma', z) = j(\sigma, \sigma' z) j(\sigma', z)$ 及び $j(\sigma, z) = |j(\sigma, z)| \exp(\sqrt{-1}\, AJ(\sigma, z))$ が成り立つことは容易に判る．そこで

$$A(\sigma,\sigma';z)=\frac{1}{2\pi}\left(AJ(\sigma,\sigma'z)-AJ(\sigma\sigma',z)+AJ(\sigma',z)\right)$$

とおくと，$A(\sigma,\sigma';z)\in\mathbb{Z}$ がわかり，他方これが z の連続函数であるからこれは z によらない事がわかる．そこで改めてそれを $A(\sigma,\sigma')$ と書く．実はこれが $Sp(m,\mathbb{R})$ の<u>普遍被覆</u>を与える因子団であることが判る．

<u>3.3.</u> $AJ(\sigma,z)$ の定義に於て $\sigma\in\Omega$ のときは，σ の分解 $\sigma=t(b_1)d'(c)t(b_2)$ を用いると，$AJ(\sigma,z)=Arg(c)+Arg(z+c^{-1}d)$ であることがわかる．そこで $\sigma,\sigma',\sigma''=\sigma\sigma'\in\Omega$ という generic な場合に $A(\sigma,\sigma')$ を計算する方法として $z\to\sqrt{-1}\infty$ としてやると，次を得る．

<u>命題</u> $\sigma,\sigma',\sigma''=\sigma\sigma'\in\Omega$ のとき

$$A(\sigma,\sigma')=\frac{1}{2\pi}\left\{Arg(c)-Arg(c'')+Arg(c')-Arg(c^{-1}c''c'^{-1})\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{Sgn(c)-Sgn(c'')+Sgn(c')-Sgn(c^{-1}c''c'^{-1})\right\}$$

但し，$c=c(\sigma)$，$c'=c(\sigma')$，$c''=c(\sigma'')$．

§4. $Sp(m,\mathbb{R})$ の被覆群とそのユニタリ表現

q を自然数として $qA(\sigma,\sigma')$ を用いて $Sp(m,\mathbb{R})$ の $\mathbb{Z}$ による中心拡大 G_q を作る．即ち $G_q=Sp(m,\mathbb{R})\times\mathbb{Z}$ に演算，

$(\sigma,n)\cdot(\sigma',n')=(\sigma\sigma',n+n'+qA(\sigma,\sigma'))$ を入れて群にする．

紛れない為 G_q の元を $(\sigma,n)_q$ のように書く．

qがq'の約数のとき $G_q \ni (\sigma, n)_q \longmapsto (\sigma, \frac{q'}{q}n)_{q'} \in G_{q'}$ という単射準同型を通して G_q を $G_{q'}$ の正規部分群とみなす．群G_qの構造に関しては次のようなことがわかる．

<u>命題</u> (1) G_1 は $Sp(m, \mathbb{R})$ の普遍被覆群に同型である．

(2) $G_q \cong G_1 \rtimes \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ （半直積），しかも直積になるのは $q=2$, m : odd のときに限る．

(3) G_q の正規部分群は (i) G_qの中心$=\{(\pm 1, n)_q ; n \in \mathbb{Z}\}$ に含まれるか又は (ii) G_ℓ $(\ell | q)$ の形である．

さて G_q のユニタリ表現については，§2 の定理及び§3.3の命題から，$\delta > -1$ に対し

<u>定理</u> G_q の $L^2_\delta(P_m)$ のユニタリ表現 $U_{q,\delta}$ で，$\sigma \in \Omega$ に対し，$U_{q,\delta}((\sigma, n)_q) = r_\delta(\sigma)\, e_\delta(-\frac{4}{q}n - \mathrm{Sgn}(c(\sigma)))$ を満たすものがある．

この表現が既約であることも比較的容易に判る．更にこの表現の Kernel については，

<u>命題</u> $\mathrm{Ker}\, U_{q,\delta} = \{(1, n)_q ; (\delta+p)\frac{n}{q} \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1, n)_q ; (\delta+p)(\frac{n}{q} - \frac{m}{2}) \in \mathbb{Z}\}$

次に $L^2_\delta(P_m)$ 上のユニタリ作用素の集合 $\{r_\delta(\sigma) ; \sigma \in \Omega\}$ で生成される群について一言注意しよう．

まず $\mathbb{r}_\delta(\sigma) = \mathbb{U}_{4,\delta}((\sigma, -\mathrm{Sgn}\, c(\sigma))_4)$ に注意する.

<u>命題</u>. G_4 の中で $\{(\sigma, -\mathrm{Sgn}\, c(\sigma))_4 ; \sigma \in \Omega\}$ で生成される部分群は, m が odd なら G_4 自身, m が even なら G_2 に等しい.

これから直ちに

<u>命題</u>. $\{\mathbb{r}_\delta(\sigma) ; \sigma \in \Omega\}$ で生成される群は, m が odd なら $\mathbb{U}_{4,\delta}(G_4)$ に, m が even なら $\mathbb{U}_{2,\delta}(G_2)$ に等しい.

§5. 既知の表現との関係

$\varphi \in L^2_\delta(P_m)$ に対し, その Laplace 変換 $\check{\varphi}$ を

$$\check{\varphi}(z) = \int_{P_m} \varphi(x)\, e_{tr}(\sqrt{-1}\, xz)\, (\det x)^\delta\, dx$$

で定義する. これは任意の $z \in \mathfrak{H}_m$ に対し絶対収束し, $\check{\varphi}(z)$ は $\mathfrak{H}_m$ 上の正則函数になる. $\mathcal{H}_\delta$ で $L^2_\delta(P_m)$ の Laplace 変換による像を表わす. $\mathbb{r}_\delta(\sigma)$ を $\mathcal{H}_\delta$ にうつしたものを $\check{\mathbb{r}}_\delta(\sigma)$ と書くとき,

$$\check{\mathbb{r}}_\delta(\sigma)\, \check{\varphi}(z)\, e_\delta(-\mathrm{Sgn}\, c(\sigma)) = j({}^\circ\sigma, z)^{-\delta-p}\, \check{\varphi}({}^\circ\sigma \cdot z)$$

であることが判る. ここに ${}^\circ\sigma = I\, {}^t\sigma\, I = J_1 \sigma^{-1} J_1$, $I = \begin{pmatrix} 0_m & 1_m \\ 1_m & 0_m \end{pmatrix}$, $J_1 = \begin{pmatrix} 1_m & 0_m \\ 0_m & -1_m \end{pmatrix}$. 従って $G_1 \cong Sp(m, \mathbb{R})^\sim$ の表現 $\mathbb{U}_{1,\delta}$ は Yamada [7, Th. 3.5] と本質的に同じものである.

References

[1] C.S. Herz, Bessel functions of matrix argument, Ann. of Math., 61 (1955), 474–523.

[2] T. Kubota, A generalized Weil type representation, Bull. Amer. Math. Soc., 81 (1975), 902–903.

[3] ———, On an analogy to the Poisson summation formula for generalized Fourier transformation, J. reine angew. Math. 268/269 (1974) 180–189.

[4] ———, On a generalized Weil type representation, Algebraic Number Theory, Kyoto, 1976, 117–128.

[5] ———, On a generalized Fourier transformation, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 24 (1977) 1–10

[6] A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Math. 111 (1964), 143–211

[7] H. Yamada, Relative invariants of prehomogeneous vector spaces and a realization of certain unitary representations I, Hiroshima Math. J. 11 (1981) 97–109.

[8] T. Yamazaki, On a generalization of the Fourier transformation, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 25 (1978)