

Good lattice points を用いた多重数値積分

筑波大 電子情報 杉原正顯 (Masaki Sugihara)

0. はじめに

Good lattice points 法は, Hlawka や Korobov によつて導入された s 次元単位超立方体 $[0, 1]^s$ 上の関数に対する数値積分公式で次式で定義される.

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\left\{\frac{g_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{g_s k}{N}\right\}\right), \quad g_i, N \in \mathbb{Z} \text{ (整数)}, \left\{x\right\} \text{ は } x \text{ の小数部分 } (0, 1)$$

従来この公式は主として $[0, 1]^s$ 上の多変数変数変換を施した微分可能関数に対して適用されて, その有効性が示されていた. 本稿では, IHT 型 = 重指数変数変換を施した多変数解析関数への good lattice points 法の適用可能性をみるために, より解析な容易な関数族 $E_s(\beta, C)$:

$$f \in E_s(\beta, C) \quad (\beta, C > 0)$$

$\Leftrightarrow f$ は $[0, 1]^s$ 上の実数値関数であり, τ 次 α f は絶対収束する多重 Fourier 級数に展開可能である.

$$f(x) = \sum_k c_k e^{2\pi i \langle k, x \rangle}, \quad \langle, \rangle \text{ は内積,}$$

$$|c_k| \leq C e^{-\beta(|k_1| + \dots + |k_s|)} \quad (0, 2)$$

k に対し good lattice points 法を適用し k 時の有効性を論ずる。また, good lattice points 法を複合化した公式 (複合 good lattice points 法):

$$\frac{1}{n^s} \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_s=1}^m \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p f\left\{ \frac{1}{n} \left(i_1 + \frac{q_1 k}{p} \right) \right\}, \dots, \left\{ \frac{1}{n} \left(i_s + \frac{q_s k}{p} \right) \right\} \right),$$

$$p, m, q_i \in \mathbb{Z}, \quad p \text{ は固定, } m \text{ が動く,} \quad (0, 3)$$

を導入して $\mathcal{E}_s(\beta, C)$ に対し適用し k 時の有効性を論じ, good lattice points 法よりも複合 good lattice points 法がより有効であることを指摘する。そして, より具体的 $s \leq 5$ に対し有効と思われる数値積分公式を提案する。また, 一方において, $\mathcal{E}_s(\beta, C)$ に対する関数値のみを用いた数値積分公式の誤差の下限に対する評価を与え, 誤差の下限の評価から good lattice points 法, 複合 good lattice points 法の有効性の評価を行おう。最後に, 具体的には I M T 型 = 重指数変数変換を施した多変数解析関数 k , $\mathcal{E}_s(\beta, C)$ に対し有効であることを得られた数値積分公式を適用して, その有効性を実用的観点から論ずる。

1. Good lattice points 法について

1.1 序論

まず, (0.1) 式は, \mathcal{E} を定義した数値積分公式 $\in GL_s(N; g)$,

$g = (g_1, g_2, \dots, g_s)$, と略記することとする。ここで, N, g_1, \dots, g_s の最大公約数 $\gcd(N, g_1, \dots, g_s) = d > 1$ の時は, $GL_s(N; g) = GL_s(N/d; g/d)$ であり, $N/d < N$ に對する公式を考察すればよいから, 初めから $\gcd(N, g_1, \dots, g_s) = 1$ を仮定しておく。この時, $GL_s(N, g)$ を関数 $f \in E_s(\beta, C)$ に適用した時の誤差は次のように評価される。

$$\begin{aligned}
 | \text{誤差} | &= \left| \int_{[0, 1]^s} f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\left\{\frac{g_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{g_s k}{N}\right\}\right) \right| \\
 &= \left| c_0 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\sum_k c_k e^{2\pi i \frac{k}{N} \langle k, g \rangle} \right) \right| \quad (\because c_0 = \int_{[0, 1]^s} f(x) dx) \\
 &= \left| c_0 - \sum_k c_k \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \frac{k}{N} \langle k, g \rangle} \right) \right| \\
 &= \left| \sum_{\substack{k: \langle k, g \rangle \equiv 0 \pmod{N} \\ k \neq 0}} c_k \right| \\
 &\leq C \sum_{\substack{k: \langle k, g \rangle \equiv 0 \pmod{N} \\ k \neq 0}} e^{-\beta(|k_1| + \dots + |k_s|)} \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

ここで, (1.1) の最右辺の式を評価して, その値が小さくなる N と g を求めれば, 誤差の小さい (=よい) 数値積分公式が得られることになる。しかし, (1.1) の最右辺の式を直接評価し, その値を小さくする N と g を求めることは, 一般には困難である。そこで, 比較的扱いやすい誤差の指標とすることを:

$$\rho_s(N; g) \triangleq \min_{\substack{k: \langle k, g \rangle \equiv 0 \pmod{N} \\ k \neq 0}} (|k_1| + \dots + |k_s|) \quad (1.2)$$

を導入する。これによつて, (1.1) の誤差は, ほぼ次のように

評価士れ,

$$|\text{誤差}| \sim O(e^{-\beta \rho_s(N; g)}), \quad (1.3)$$

誤差に関する研究は, $\rho_s(N; g)$ の研究に帰着されることになる. ただし, (1.3) は正確な評価式ではないので, その正確な ρ_s を用いた評価式を求めなくては必要がある. 従って, good lattice points 法を $E_s(\beta, C)$ の関数に適用した時の誤差の研究は次の2つの問題に分けることができる.

問題1. $\rho_s(N; g)$ の性質を調べること.

(主たる目的は "効率" のよい N と g を求めることである)

問題2. $\rho_s(N; g)$ を与えられれば (1.3) の評価を正確に行なうこと.

以下, $s=1$ の場合, (0.1) は台形則であり, その性質は比較的よくわかっているので, $s=2, s=3, s \geq 4$ の3つの場合に分けて上述の2つの問題について検討を加え, よい数値積分公式を決定して行く.

1.2 2次元の場合の解析

1.2.1 ρ_2 の性質 (問題1について)

(i) ρ_2 の上限およびそれを達成する場合.

まず, $\rho_2(N; g)$ に対する上限を定める. そのための道具は Minkowski の Geometrie der Zahlen の理論である. 結果は, 次のようである.

定理 1-1

任意の $N \in \mathbb{Z}$, $g = (g_1, g_2) \in \mathbb{Z}^2$ に対し

$$\rho_2(N; g) \equiv \min_{\substack{h: \langle h, g \rangle \equiv 0 \pmod{N} \\ h \neq 0}} (|h_1| + |h_2|) \leq \lceil \sqrt{2N} \rceil \quad (1.4)$$

↑
Gaussian bracket

この定理 1-1 によって, $\rho_2(N; g)$ が \sqrt{N} のオーダーであることがわかる。そこで, 次式で定義される効率という概念を導入する。

$$\text{eff}_2(N; g) \triangleq \rho_2(N; g) / \sqrt{N}. \quad (1.5)$$

すると, 定理 1-1 は次のように言い替えることができる。

"任意の $N \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathbb{Z}^2$ に対して $\text{eff}_2(N; g) \leq \sqrt{2}$."

従って, もし, 数値積分において命点数に対して制約がないのであれば, $\text{eff}_2(N; g) = \sqrt{2}$ とはるような N と g の系列を使用して, 数値積分を行なうことが良いことになる。次に, このような場合, つまり, 効率最大の場合がどのような場合かについて述べる。結果は次の通りである。

定理 1-2

$\rho_2(N; g) = \sqrt{2N}$ とはるのは, 次の場合であり, かつ, その場合に限る。

$$N = 2g^2, \quad g \equiv \xi \cdot (1, 2gd \pm 1) \pmod{N}, \quad (1.6)$$

ここで, $g, \xi, d \in \mathbb{Z}$, $\text{gcd}(g, d) = 1$, $\text{gcd}(\xi, N) = 1$.

なお、この結果と関連して次の結果が成立する。

命題 1-3

$$N=2g^2, g \equiv \xi \cdot (1, 2gd+1), \gcd(g, d)=1, \gcd(\xi, N)=1 \text{ と}$$

$$N=2g^2, g \equiv \xi' \cdot (1, 2gd-1), \gcd(g, d)=1, \gcd(\xi', N)=1 \text{ と } k \text{ に対し}$$

$$\sum_{\substack{k: \langle k, g \rangle \equiv 0 \pmod{N} \\ k \neq 0}} e^{-\beta(|k_1|+|k_2|)}$$

の値は同じである。つまり、(1.1)の誤差の上からの評価の値は同じである。

以上、定理 1-2, 命題 1-3 より、積分近似公式としては、 $GL_2(2g^2; (1, 2gd-1))$, $\gcd(g, d)=1$ を使用すれば、効率最大となる。しかし、 d の値によって誤差は、違ってくる。

次に上記の d の値による誤差の違いを見る。それには、関数

$$\sum_{\substack{k: \langle k, g \rangle \equiv 0 \pmod{N} \\ k \neq 0}} e^{-(|k_1|+|k_2|)} \quad (1.7)$$

の値の d の値による違いを見ればよい。そのために、実際には、関数

$$\sum_k e^{-(|k_1|+|k_2|)} e^{2\pi i \langle k, \alpha \rangle} = \prod_{j=1}^2 \frac{e^z - 1}{e^z - 2e \cdot \cos(2\pi x_j) + 1} \quad (1.8)$$

k 数値積分公式 $GL_2(2g^2; (1, 2gd-1))$, $\gcd(g, d)=1$ を適用して誤差を見れば (1.7) の値がわかる。表 1 に $g=11$ の場合について、各 $g_2(d)$ の値に対する誤差を示す。つまり、(1.7) の値を示す。この表から、わかるように (1.7) の値は、 d によって

ほとんどの変化することがない。従って、種分近似公式としては、形の最も簡単な $GL_2(2g^2; (1, 2g-1))$ を使用すればよい。

これで、効率最大となる場合については解析が終ったのであるが、定理

1-1 の ρ_2 に対する上限 $[\sqrt{2N}]$ を達成する他の N と g の系列がわかっているのでこれを次に記す。

定理 1-4

$$N = 2g^2 + 2g, \quad g = (1, 2gd \pm 1), \quad \gcd(g, d) = 1 \Rightarrow \rho_2(N; g) = 2g \quad (= [\sqrt{2N}])$$

$$N = 2g^2 + 2g + 1, \quad g = (1, 2g^2) \Rightarrow \rho_2(N; g) = 2g + 1 \quad (= [\sqrt{2N}])$$

$$N = 2(g+1)^2 - 1, \quad g = (1, 2g(g-1)) \Rightarrow \rho_2(N; g) = 2g + 1 \quad (= [\sqrt{2N}])$$

以上、定理 1-1, 定理 1-2, 定理 1-4 をまとめると次のようになる。

N	$[\sqrt{2N}]$	$\underset{\text{定理 1-1}}{\geq}$	$\text{Max}_g \rho_2(N; g)$	
$2g^2$	$2g$		$2g$	← 定理 1-2
\vdots	\vdots		\vdots	
$2g^2 + 2g$	$2g$		$2g$	← 定理 1-4
$2g^2 + 2g + 1$	$2g + 1$		$2g + 1$	← 定理 1-4
\vdots	\vdots		\vdots	
$2(g+1)^2 - 1$	$2g + 1$		$2g + 1$	← 定理 1-4
$2(g+1)^2$	$2(g+1)$		$2(g+1)$	← 定理 1-2

7

表 1. $N=242 (g=11)$ の時、各 $g_2(d)$ に対する

$\sum_{\substack{k: \langle k, g \rangle = 20 \pmod{N} \\ k \neq 0}} e^{-(|k|+|k\ell|)}$ の値 (数値種分誤差).

$N=2g^2$	d	$g_2(=2d^2-1)$	$-\log_{10} \text{誤差} $
242	1	21	8.757
(=2·11 ²)	2	43	8.776
	3	65	8.776
	4	87	8.776
	5	109	8.774

($g=(1, g_2)$ と $g=(1, N-g_2)$ は同じ誤差を生ずることに注意せよ.)

ii) 与えられた N に対し $\text{Max}_{g \in \mathbb{Z}^2} \rho_2(N; g)$ を達成する g を求める方法

一般 k , 数値積分を行なう k あり, 分点数 N があらかじめ与えられている場合もあり得る. この時は, $\text{Max}_{g \in \mathbb{Z}^2} \rho_2(N; g)$ を達成するよりの g を数値積分公式に使用する n が最も良い. そこで, ここでは, N が与えられたとして $\text{Max}_{g \in \mathbb{Z}^2} \rho_2(N; g)$ を達成する g を求める問題を考える.

この問題は, $\rho_2(N; g) = \text{Min}_{h: \langle h, g \rangle \equiv 0 \pmod{N}, h \neq 0} (|h_1| + |h_2|)$ を計算する部分と, $\rho_2(N; g)$ が求まるとしてそれを g に関して最大化する部分 ($\text{Max}_{g \in \mathbb{Z}^2} \rho_2(N; g)$ を求める部分) と k 分けることができる. 現在, 後半の部分については, $\text{Max}_{g \in \mathbb{Z}^2} \rho_2(N; g) = \text{Max}_{1 \leq g_1 \leq g_2 \leq N/2} \rho_2(N; g)$ に注意して, 各 g に関して $\rho_2(N; g)$ を計算して, その中から最大値を求めるとそれを達成する g を求める (のではない) ようである. そこで, 以下, $\rho_2(N; g)$ を求める話に専心する.

まず, 次の補題が成立する:

補題 1-5

$\text{gcd}(N, g_1, g_2) = 1$, $N, g_1, g_2 > 0$, $d \equiv \text{gcd}(N, g_1)$ とする.

この時, ある $a \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq a < N/d$) が存在して

$$\rho_2(N; g) = \text{Min}_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \left(\left| \frac{N}{d} \lambda - a \mu \right| + |d \mu| \right).$$

(a は, 本質的 k , $g_1 \in g_2$, $g_1 \in N$ と k Euclid 互除法を適用すれば求まる)

さう k 次の定理が成立する。

定理 1-6

記号を補題 1-5 と同じとする。そして、 $b \triangleq \gcd(N/d, a)$ とし、 $\frac{a}{b} / \frac{N}{db}$ が次 a より k 連分数展開されているものとする。

$$\frac{a}{b} / \frac{N}{db} = \frac{1}{|a_1|} + \cdots + \frac{1}{|a_n|}.$$

この時、 $\frac{A_m}{B_m} \triangleq \frac{1}{|a_1|} + \cdots + \frac{1}{|a_m|}$ ($m \geq 1$), $A_{-1} = 1, A_0 = 0, B_{-1} = 0, B_0 = 1$ とおくと、

$$\rho_2(N; g) = \min_{-1 \leq m \leq n} (d |A_m \frac{N}{db} - B_m \frac{a}{b}| + dB_m).$$

以上の補題 1-5, 定理 1-6 を用いると、本質的 k Euclid 互除法により $\rho_2(N; g)$ を求めることができることがわかる。従って、計算の手間としては $O(\log N)$ でよく、非常に効率良く $\rho_2(N; g)$ を求めることができる。より詳しくは [1] を参照されたい。

(iii) $N = U_n, g = (1, U_{n-1})$ (U_n : Fibonacci 数) に対する $\rho_2(N; g)$ の値。

ii) で述べたような定理 1-1 の $\rho_2(N; g)$ の上限と達成する場合ではないが、ii) の結果を用いて $\rho_2(N; g)$ の値がわかる N の g の系列がある。この iii) では、それについて記す。まず、次の定理が成立する。

定理 1-7

U_n を Fibonacci 数 ($U_0 = 0, U_1 = 1, U_{k+2} = U_{k+1} + U_k, k \geq 0$) とすれば、

$$\rho_2(U_n; (1, U_{n-1})) = U_{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + U_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad (n \geq 3)$$

また, Fibonacci 数を一般化して, $V_0=0, V_1=1, V_{k+2}=c \cdot V_{k+1} + V_k$ ($k \geq 1$), c は自然数, なる V_n を考えるとき, 次の成立する。

定理 1-8

$$\rho_2(V_n; (1, V_{n-1})) = \sqrt{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \sqrt{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad (n \geq 3)$$

定理 1-8 において, $c > 1$ である V_n を用いたときの効率

$eff_2(V_n; (1, V_{n-1}))$ はかなり低い。そこで, 比較的効率の良いと思われる $N=U_n, g=(1, U_{n-1})$ の場合の $\rho_2(N; g)$ の値を表 2 に記す。この表より, $\rho_2(U_n; (1, U_{n-1}))$ の値が定理 1-1 より得られる上限 $\lfloor \sqrt{2N} \rfloor$ と大差ないことがわかる。従って, 数値積分公式 $GL_2(U_n; (1, U_{n-1}))$ が比較的効率の良い公式であることがわかる。ただし, 実際の

表 2. $N=U_n, g=(1, U_{n-1})$ のときの $\rho_2(N; g)$
($U_0=0, U_1=1, U_{k+2}=U_{k+1} + U_k (k \geq 0)$)

n	$N=U_n$	$\lfloor \sqrt{2N} \rfloor (\geq)$	$\rho_2(U_n; (1, U_{n-1}))$
3	2	2	2
4	3	2	2
5	5	3	3
6	8	4	4
7	13	5	5
8	21	6	6
9	34	8	8
10	55	10	10
11	89	13	13
12	144	16	16
13	233	21	21
14	377	27	26
15	610	34	34
16	987	44	42
17	1597	55	55
18	2584	71	68
19	4181	91	89
20	6765	116	110
21	10946	147	144

の数値積分への適用可能性については, 後の数値実験を通して見ることとする。なお, $GL_2(U_n, (1, U_{n-1}))$ は, Zarembka によって, 多項式変換を施した微分可能関数の数値積分法と

いて、ある意味で最良であることを示している。

1.2.2 誤差評価 (問題2について)

$S=2$ の場合のみ可能である連分数論を用いた誤差評価と、多次元にも拡張可能な手法を用いた誤差評価を与える。両評価の比較は、次の1.2.3において数値実験を通して行なう。

まず、連分数論を用いた誤差評価から与える。なお、記述の簡易化のため $E_2(1,1)$ に対する誤差評価を扱う。

定理 1-9

補題 1-5, 定理 1-6 で用いた記号を使用する。そして $N \equiv N/d, g_2 = a/b$ とする。この時

$$\begin{aligned} |\text{誤差}| &\leq \sum_{\substack{h: \langle h, g \rangle \equiv 0 \pmod{N} \\ h \neq 0}} e^{-(|h_1| + |h_2|)} \\ &\leq \frac{4}{1 - \exp(-N^2)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\exp(-l(|AmN^2 - Bmg_2| + dBm))}{1 - \exp(-l(|AmN^2 - Bmg_2|))} \\ &\quad + \frac{2}{\exp(dN^2) - 1} + \frac{2}{\exp(lN^2) - 1} + \frac{2}{\exp(dN^2) - 1} \times \frac{2}{\exp(lN^2) - 1} \quad (1.9) \end{aligned}$$

系 1-10

$$\begin{aligned} |\text{誤差}| &\leq \frac{4}{1 - \exp(-N^2)} \times \frac{1}{1 - \exp(-l)} \cdot n \cdot \exp(-\rho_2(N; g)) \\ &\quad + \frac{2}{\exp(dN^2) - 1} + \frac{2}{\exp(lN^2) - 1} + \frac{2}{\exp(dN^2) - 1} \times \frac{2}{\exp(lN^2) - 1} \end{aligned}$$

次にもう一つの誤差評価を与える。

定理 1-11

$$\begin{aligned} |\text{誤差}| &\leq N_g \cdot \exp(-\rho_2(N; g)) + (9 - N_g) \cdot \exp(-\rho_2(N; g) - 1) \\ &\quad + \frac{7-5r}{(1-r)^2} \cdot r^3, \quad (1.10) \end{aligned}$$

ここで, $r = \exp(-\frac{1}{2} \rho_2(N; g))$

N_g : h の 異なる不定方程式 $\langle h, g \rangle \equiv 0 \pmod{N}$ の解
で, $|h_1| + |h_2| = \rho_2$ とする h の個数.

1.2.3 数値実験

ここでは, 次の 2 つの 問題と数値実験を通じて考察する.

(i). 1.2.2 において 2 つの 誤差評価式 (定理 1-9, 定理 1-11) の比較検討.

(ii). 1.2.1 (iii) において 導いた比較的效率の良いと思われる $GL_2(U_n; (1, U_{n-1}))$ と 効率最大の意味で最良の公式 $GL_2(2g^2; (1, 2g-1))$ との 数値積分誤差を通じての比較.

以下, 数値実験結果は, 積分関数が $E_2(1, 1)$ に 属する関数 (1.8), (7.9),

$$f(x) = \sum_h e^{-(|h_1|+|h_2|)} e^{2\pi i \langle h, x \rangle} = \prod_{j=1}^2 \frac{e^2 - 1}{e^2 - 2e \cdot \cos(2\pi x_j) + 1}$$

である場合を記す. (しかし, 以下の結論は, β があまり小さくない $E_2(\beta, c)$ に対して, 成立することから他の数値実験からわかっている.

表3. 実際の数値積分誤差と 定理1-9, 定理1-11 の誤差の推定値の比較. (1-9)式 (1-10)式

(ii) について)

表3 中, $N = U_n, g =$

$(1, U_{n-1})$ の時と, $N = 242,$

$g = (1, 28 \pm 1)$ の時の実

際の数値積分誤差と

$GL_2(U_n; (1, U_{n-1}))$, (U_n : Fibonacci 数) の場合.

N	g_2	$-\log_{10}$ 誤差	$-\log_{10}(1.9)$	$-\log_{10}(1.10)$	$-\log_{10}(1.10)$ 1項
55	34	3.799	3.491	3.678	4.042
89	55	5.023	4.720	4.879	5.044
144	89	6.543	6.242	6.288	6.648
233	144	8.515	8.214	8.354	8.518
377	233	10.949	10.648	10.631	10.991

定理 1-9, 定理 1-11,
(1.9)式 (1.10)式

定理 1-11 の誤差評価
式(1)項を用いた誤
差の推定値を示す。

この表より, (1.9)式
より (1.10)式の方が良
い評価式であること
がわかる。また, (1.10)

式の方が, 実際

の誤差をよく近似してい
ることがわかる。従って,
誤差評価としては, 多少誤
差の過小評価は有り得る
が, (1.10)式の方が
 $N_2 \cdot \exp(-P_2)$ が最も
よい。

(iii) について

図 1 に, 数値積分公式 $GL_2(U_n,$
 $(1, U_{n-1}))$ (U_n : Fibonacci 数), および,
 $GL_2(2g^2; (1, 2g-1))$ を関数(1.8)に適
用した時の誤差を示す。比較
のために台形則の結果も記し
ておく。この図 1 より, GL_2

表 3 (つぎ)

$GL_2(242; (1, 2g^d \pm 1))$, ($g=11, d=1, 2, 3, 4, 5$) の場合。

N	g_2	$-\log_{10}$ 誤差	$-\log_{10}(1.9)$	$-\log_{10}(1.10)$	$-\log_{10}(1.10)$ 式項
242	21	8.757	8.445	8.703	8.776
242	23	8.757	8.382	8.703	8.776
242	43	8.776	8.474	8.703	8.776
242	45	8.776	8.475	8.703	8.776
242	65	8.776	8.475	8.703	8.776
242	67	8.776	8.473	8.703	8.776
242	87	8.776	8.475	8.703	8.776
242	89	8.776	8.467	8.703	8.776
242	109	8.774	8.451	8.703	8.776
242	111	8.774	8.472	8.703	8.776

($g_2 = (2gd+1)$ と $g_2 = (2gd-1)$ は同じ誤差を示す)
ことに注意。

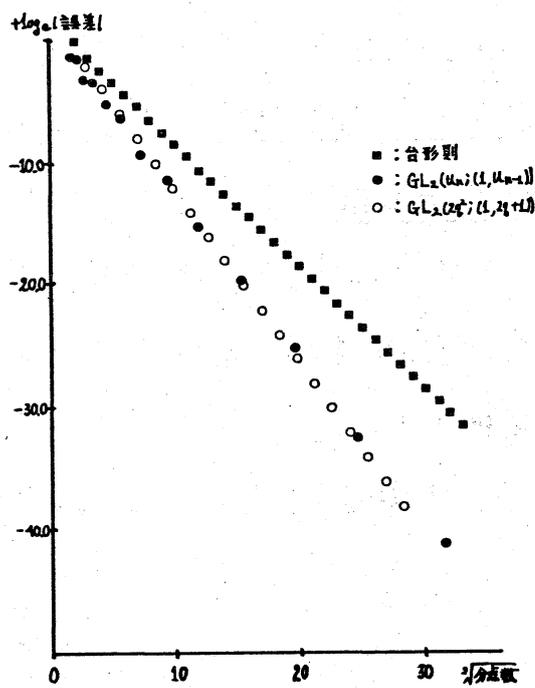


図 1. 台形則, $GL_2(U_n; (1, U_{n-1}))$ (U_n : Fibonacci 数),
 $GL_2(2g^2; (1, 2g-1))$ を関数 $\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^{2x} \cos(2\pi x)+1} dx$
適用した時の誤差。

$(2g^2; (1, 2g-1))$ の方が、数値積分誤差が小さいという意味で、 $GL_2(U_n; (1, U_{n-1}))$ より有効であることがわかる。また、実際に数値積分を行なう場合、多くの N (分点数) に対して数値積分結果が得られる方が望ましい。この点からも、 $GL_2(2g^2; (1, 2g-1))$ が $GL_2(U_n; (1, U_{n-1}))$ より有効である。

1.2.4 まとめ

$E_2(\beta, C)$ に属する関数に対する数値積分法としては、 $GL_2(2g^2; (1, 2g-1))$ を用いるのがよく、その公式を適用した時の数値積分誤差は、 $6 \cdot C \cdot e^{-2g\beta}$ で近似される ($g=1$ の時は、 $8 \cdot C \cdot e^{-2g\beta}$)。

1.3 3次元の場合の解析

1.3.1 ρ_3 の性質 (問題1 について)

の ρ_3 の上限およびそれを達成する場合。

2次元の場合と同様に、Geometrie der Zahlen の理論を用いて、 $\rho_3(N; g)$ の上限を定める。

定理 1-12

任意の $N \in \mathbb{Z}$, $g = (g_1, g_2, g_3) \in \mathbb{Z}^3$ に対して。

$$\rho_3(N; g) = \min_{\substack{h: \langle h, g \rangle \equiv 0 \pmod{N} \\ h \neq 0}} (|h_1| + |h_2| + |h_3|) \leq 3 \sqrt{\frac{109}{18} N}.$$

この定理 1-12 より、2次元の場合と同じように効率率 eff_3 を次式で定義するのが自然であろう。

$$eff_3(N; g) \triangleq \rho_3(N; g) / \sqrt[3]{N}.$$

すると、定理 1-12 の主張は、次の不等式と同値となる。

$$\text{eff}_3(N; g) \leq \sqrt[3]{\frac{108}{19}} \approx 1.7847 \quad (< \sqrt[3]{3!} = 1.8171).$$

ここで、2次元の場合の類推からすると $\exists \sqrt[3]{\frac{108}{19}}N = \text{整数}$ となる N , つまり, $N = 2 \cdot 19 \cdot g^3$ ($g \in \mathbb{Z}$) なる N に対し, ある $g \in \mathbb{Z}^3$ が存在して, 効率が最大値 $\sqrt[3]{\frac{108}{19}}$ を達成することが期待される。しかし, このことは, 次の定理によつて, 否定される。

定理 1-13

定理 1-12 の等号が成立するのは, 次の場合に限る。

$$\begin{cases} N = 38 \\ g \equiv \pm 5 \cdot (1, \pm 7, \pm 11) \pmod{38}, \quad \gcd(3, 38) = 1, \text{ および,} \\ \text{その順序を入れかえたもの} \end{cases}$$

この定理 1-13 によつて, 効率の最大値を達成するのは, 分点数 $N = 38$ の場合のみであり, 2次元の場合のよき効率のよい $N \in g$ の系列は得られないことになる。従つて, 次の (ii) に述べる方法によつて, 各 N に対し $\text{Max}_g \rho_3(N; g)$ を達成するよき g を求めて行くより他に良い数値積分公式列を得る方法はないことになる。ただし, この効率の良い数値積分公式列が得られないという困難は, 2次元導入する複合化 good lattice points 法を用いることによつて解消する。

(ii) 与えられた N に対し $\text{Max}_{g \in \mathbb{Z}^3} \rho_3(N; g)$ を達成する g を求める方法

2次元の場合と同様に, $\rho_3(N; g) = \text{Min}_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ \langle h_i, g \rangle \equiv 0 \pmod{N} \\ h_i \neq 0}} \left(\frac{N}{|h_i|} \right)$ を計算する

部分を, $\rho_3(N; g)$ が与えられるとして $\text{Max}_{g \in \mathbb{Z}^3} \rho_3(N; g)$ を計算する部分とに分けること加えて置る。詳細は略すが, 本質的に両部分とも, 1らみつふし計算を行なうしかないようである。

表4に, 比較的しらみつふし計算が少なくてよい $g = (1, g_2, g_3)$ $g_2, g_3 \in \mathbb{Z}$, および, $g = (1, g, g^2)$, $g \in \mathbb{Z}$ の場合について, 実際に計算を行なう結果を示す ($\text{Max}_{g=(1, g_2, g_3), g_2, g_3 \in \mathbb{Z}} \rho_3(N; g)$, $\text{Max}_{g=(1, g, g^2), g \in \mathbb{Z}} \rho_3(N; g)$) を計算した結果)。

表4. $\text{Max}_g \rho_3(N; g) = m$ ($m=2, 3, \dots$) とする最小の N とそれを達成する g

$g = (1, g_2, g_3)$ の場合

$g = (1, g, g^2)$ の場合

N	g	$\text{Max}_g \rho_3(N; g) \leq \lfloor \frac{\sqrt{10} N}{19} \rfloor$	Max eff. ρ_3	N	g	$\text{Max}_g \rho_3(N; g) \leq \lfloor \frac{\sqrt{10} N}{19} \rfloor$	Max eff. ρ_3
2	(1, 1, 1)	2	2	2	(1, 1, 1)	2	2
7	(1, 2, 3)	3	3	7	(1, 2, 3)	3	3
12	(1, 3, 5)	4	4	14	(1, 5, 11)	4	4
27	(1, 7, 11)	5	5	29	(1, 13, 24)	5	5
38	(1, 7, 11)	6	6	38	(1, 11, 7)	6	6
70	(1, 16, 25)	7	7	79	(1, 34, 50)	7	7
92	(1, 35, 41)	8	8	104	(1, 23, 9)	8	8
145	(1, 9, 61)	9	9	147	(1, 31, 79)	9	9
178	(1, 23, 81)	10	10	190	(1, 69, 11)	10	10
260	(1, 40, 94)	11	11	286	(1, 80, 108)	11	11
312	(1, 47, 149)	12	12	356	(1, 95, 125)	12	12
421	(1, 125, 192)	13	13	455	(1, 199, 16)	13	13
486	(1, 83, 129)	14	14	518	(1, 211, 491)	14	14
				635	(1, 274, 146)	15	15
				784	(1, 177, 753)	16	16
				982	(1, 46, 152)	17	17

この表より, $g = (1, g, g^2)$ 型の中から良い g を求めると, それほど効率が高くなるのかわかる。従って, 少ない手回し (gに関する部分) が $N/2$ のしらみつふし (よい g を求める) で良い g を求められる $g = (1, g, g^2)$ 型の数値積分公式が有効であることとなる。ただし, 上の表4は, 実用に値するには, N が小さい型, good lattice

points法のみを考えた限り, さらなるしらみつぶし計算を実行する必要があり, (しかし, 現在のよき計算法では, 大至る N に対し $\max_g \rho_3(N; g)$ を求めることは不可能に近い. $\max_g \rho_3(N; g)$ を求める算法の工夫を含めて, 実用可能な得点表の作成を今後の課題としたい.

1.3.2 誤差評価 (問題2について)

次の結果が得られる (k に対し, $E_3(1,1)$ に対する結果を参照).

定理 1-14

$$\begin{aligned} |\text{誤差}| &\leq \sum_{\substack{k: \langle h, g \rangle \equiv 0 \pmod{N} \\ k \neq 0}} e^{-(|k_1| + |k_2| + |k_3|)} \\ &\leq N_g \cdot \exp(-\rho_3(N; g)) + (C_3 \cdot 27 - N_g) \cdot \exp(-\rho_3(N; g) - 1) \\ &\quad + C_3 \frac{(37 - 60r + 19r^2)}{(1-r)^3} r^3 \end{aligned}$$

ここで, $r = \exp(-\frac{1}{2} \rho_3(N; g))$, $C_3 \leq 80$,

$N_g: \langle h, g \rangle \equiv 0 \pmod{N}$ の解 k の中で $\sum_{j=1}^3 |k_j| = \rho_3(N; g)$ となる位数.

1.3.3 まとめ

- (i) より大至る N に対し, 表 4 に対応するものが必要である.
- (ii) 定理 1-14 については, 数値実験を行った, 其結果 (縦軸の関係を参照せよ) によれば, $N_g \cdot \exp(-\rho_3(N; g))$ が誤差をよく近似している.

1.4 一般 n 次元の場合の解析 ($S \geq 4$)

1.4.1 $\rho_S(N; g)$ ($S \geq 4$) の性質 (問題1について)

ii) $\rho_s(N; g)$ の上からの評価.

次の定理が成立する.

定理 1-15

任意の $N \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathbb{Z}^s$ に対し

$$\rho_s(N; g) = \min_{\substack{h: \langle h, g \rangle \equiv 0 \pmod{N} \\ h \neq 0}} \left(\sum_{j=1}^s |h_j| \right) \leq \sqrt{s! N}.$$

つまり,

$$\text{eff}_s(N; g) \triangleq \rho_s(N; g) / \sqrt{N} \leq \sqrt{s!}.$$

ここで, 2次元, 3次元と異なり, 等号の成立条件, あるいは, 等号不成立かどうかもわかっていない. 従って, 3次元と同様に, 与えられた N に対し効率の良い g をおぼえていく以外, 良い数値積分公式を得る方法はない. 次の iii) でその問題を扱う.

iii) 与えられた N に対し $\text{Max}_{g \in \mathbb{Z}^s} \rho_s(N; g)$ を達成する g を求める方法.

3次元の場合と同様に本質的にしらみつぶし法しかないようである. ここでは, しらみつぶし計算が少なくて済む $g = (1, g_2, \dots, g_s)$, $g_i \in \mathbb{Z}$ の場合と $g = (1, g, g^2, \dots, g^{s-1})$, $g \in \mathbb{Z}$ の場合を考へる.

まず, 与えられた N に対し, どれほど効率の良い $g = (1, g_2, \dots, g_s)$, $g_i \in \mathbb{Z}$ が存在し得るかの評価 — $\text{Max}_{g=(1, g_2, \dots, g_s), g_i \in \mathbb{Z}} \rho_s(N; g)$ の下からの評価 — を与える. そして, それに続いて, $g = (1, g, g^2, \dots, g^{s-1})$ の型の場合についても, $\text{Max}_{g=(1, g, g^2, \dots, g^{s-1}), g \in \mathbb{Z}} \rho_s(N; g)$ の下からの評価を与える.

定理 1-16

$$s \geq 2, \text{この時, } \underset{\substack{g=(1, g_2, \dots, g_s) \\ g_i \in \mathbb{Z}}}{\text{Max}} \rho_s(N; g) > \sqrt[s]{\frac{s!}{2^{s-1}(1-\frac{1}{2^s})}} (1-o(1))N \quad (N \rightarrow \infty)$$

が成立する。つまり、任意の $\eta > 0$ に対し、ある整数 $N_0(\eta)$ が存在して、 $N_0(\eta)$ より大きい任意の整数 N に対し、ある $g=(1, g_2, \dots, g_s)$ が存在して (N に依存する)

$$\rho_s(N; g) > \sqrt[s]{\frac{s!}{2^{s-1}(1-\frac{1}{2^s})}} (1-\eta) \cdot N.$$

定理 1-17

$$\underset{\substack{g=(1, g, g^2, \dots, g^{s-1}) \\ g \in \mathbb{Z}}}{\text{Max}} \rho_s(N; g) > \sqrt[s]{\frac{s!}{2^{s-1}} \cdot \frac{p_1 \dots p_m}{(s-1)^m}} - s,$$

但し、 $N = p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$ (p_i は相異なる素数)。

表 5, 表 6 に、具体的に $s=4, 5$ の場合に小さい N に対し、 $g=(1, g_2, \dots, g_s), g_i \in \mathbb{Z}$ の型の時と $g=(1, g, g^2, \dots, g^{s-1}), g \in \mathbb{Z}$ の型の時とを比較して計算を行った、その結果を示す。この結果から次の結論が得られる。

① $g=(1, g_2, \dots, g_s), g_i \in \mathbb{Z}$ の場合と $g=(1, g, g^2, \dots, g^{s-1}), g \in \mathbb{Z}$ の場合の効率の差は小さい。

表 5. $\underset{g}{\text{Max}} \rho_4(N; g) = n (n=2, 3, \dots)$ とする最小の N とそれを達成する g 。

$g=(1, g_2, g_3, g_4)$ の場合

N	g	$\underset{g}{\text{Max}} \rho_4(N; g) \leq (\sqrt[4]{N})$	Max eff_g	
2	(1, 1, 1, 1)	2	2	1.6818
9	(1, 2, 3, 4)	3	3	1.7320
16	(1, 3, 5, 7)	4	4	2.0000
46	(1, 6, 16, 19)	5	5	1.9199
70	(1, 7, 25, 29)	6	6	2.0743
152	(1, 16, 28, 37)	7	7	1.9936

$$\sqrt[4]{4!} \approx 2.2134$$

② 3次元より4次元において、4次元より5次元において、一般に初率が高い。

③ $g = (1, g, g^2, \dots, g^{s-1})$ 型に対する下からの評価(定理1-17)によれば、素因数が少ないうちの N の方が初率の良いうち g が存在し得るよさであるが、実際には、必ずしもそうではない。

今、 $s=4$ かつ、図2を、 $s=4$, $2 \leq N \leq 173$ に対する $\text{Max eff}_4(N; g)$ $g=(1, g_2, g_3, g_4)$ $(N; g)$ を、図3を、 $s=5$, $2 \leq N \leq 76$ に対する $\text{Max eff}_5(N; g)$ $g=(1, g_2, g_3, g_4, g_5)$ と記す。定理1-16から得られた評価は $N \rightarrow \infty$ で

$$\text{Max eff}_4(N; g) \geq \sqrt[4]{\frac{4!}{23(1-\frac{1}{24})}} \approx 1.3375$$

$g=(1, g_2, g_3, g_4)$

$$\text{Max eff}_5(N; g) \geq \sqrt[5]{\frac{5!}{24(1-\frac{1}{25})}} \approx 1.5058$$

$g=(1, g_2, g_3, g_4, g_5)$

である(図に記してあり)。

表5 (7ページ)

$g=(1, g, g^2, g^3)$ の場合

N	g	$\text{Max}_g \rho_4(N; g) \leq \lfloor \sqrt[4]{4!N} \rfloor$	$\text{Max}_g \text{eff}_4$	
2	(1, 1, 1, 1)	2	2	1.6818
11	(1, 5, 3, 4)	3	4	1.6473
16	(1, 5, 9, 13)	4	4	2.0000
57	(1, 26, 49, 20)	5	6	1.8197
80	(1, 37, 9, 13)	6	6	2.0062
191	(1, 68, 40, 46)	7	8	1.8830
226	(1, 95, 211, 157)	8	8	2.0633
435	(1, 191, 376, 41)	9	10	1.9707
562	(1, 221, 509, 89)	10	10	2.0538

$\sqrt[4]{4!} \approx 2.2134$

表6. $\text{Max}_g \rho_5(N; g) = n$ ($n=2, 3, \dots$) となる最小の N とこれと達成する g .

$g=(1, g_2, g_3, g_4, g_5)$ の場合

N	g	$\text{Max}_g \rho_5(N; g) \leq \lfloor \sqrt[5]{5!N} \rfloor$	$\text{Max}_g \text{eff}_5$	
2	(1, 1, 1, 1, 1)	2	2	1.7411
11	(1, 2, 3, 4, 5)	3	4	1.8571
20	(1, 3, 5, 7, 9)	4	4	2.1971
69	(1, 13, 22, 29, 32)	5	6	2.1439

$\sqrt[5]{5!} \approx 2.6052$

$g=(1, g, g^2, g^3, g^4)$ の場合

N	g	$\text{Max}_g \rho_5(N; g) \leq \lfloor \sqrt[5]{5!N} \rfloor$	$\text{Max}_g \text{eff}_5$	
2	(1, 1, 1, 1, 1)	2	2	1.7411
11	(1, 5, 3, 4, 9)	3	4	1.8571
22	(1, 9, 15, 3, 5)	4	4	2.1556
71	(1, 25, 57, 5, 54)	5	6	2.1317
124	(1, 33, 97, 101, 109)	6	6	2.2288
363	(1, 161, 148, 233, 124)	7	8	2.1534

$\sqrt[5]{5!} \approx 2.6052$

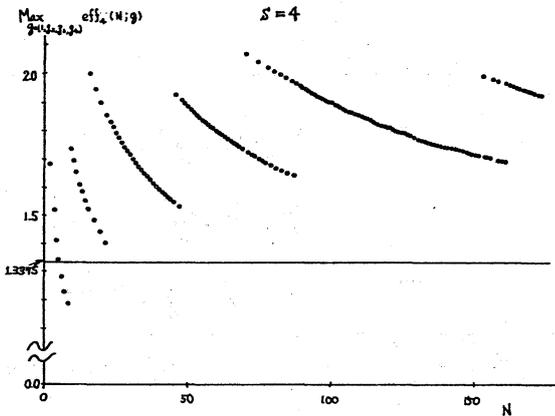


図2. 各 N に対する $\text{Max}_{\substack{g=(1,2,3,4) \\ s_1, s_2 \in Z}} \text{eff}_s(N;g)$ の値.

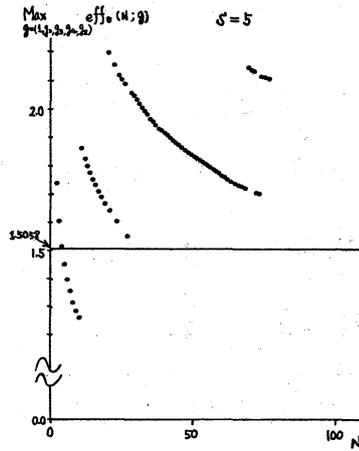


図3. 各 N に対する $\text{Max}_{\substack{g=(1,2,3,4,5) \\ s_1, s_2, s_3 \in Z}} \text{eff}_s(N;g)$ の値.

図2, 図3より, 定理1-16の評価より, 実際にはかなり効率の良い g が存在するところがわかる。なお, この表5, 表6は, 具体的に数値積分を行なおうとするには, 不十分であるので, $\text{Max}_g \rho_s(N;g)$ を求める算法の改良とともに表を拡充することを今後の課題としたい。

(iii) その他の $\rho_s(N;g)$ の性質

今までは, 次元数 s を固定して, N と g が与えられた時に $\rho_s(N;g)$ がどのような値になるかを見て来た。しかし, 逆に $\rho_s(N;g)$ がある値になるような N と g を求めることも興味ある問題である。その時, $\rho_s(N;g)$ がある値になるような N と g が次元数 s の簡単な関数に存在することが望ましい。次に述べる定理は, この問題の簡単な場合に対する解答である。つまり, $\rho_s(N;g) = 2, 3, 4$

と作るような N と g を簡単な s の関数として与えたいのである。

定理 1-18

$$N=2, \quad g=(1, \dots, 1) \quad \Rightarrow \quad \rho_s(N; g) = 2$$

$$N=2s+1, \quad g=(1, 2, \dots, s) \quad \Rightarrow \quad \rho_s(N; g) = 3$$

$$N=4s, \quad g=(1, 3, \dots, 2s-1) \quad \Rightarrow \quad \rho_s(N; g) = 4$$

$\rho_s(N; g) \geq 5$ に対しては、今のところ、このような型の結果は得られていない。しかし、 $\rho_s(N; g) \geq 5$ に対応する N と g が s の簡単な関数になり得るかどうかは疑問である。

1.4.2 誤差評価 (問題 2 について)

次の定理が成立する。但し、 $E_s(1, 1)$ に対する誤差評価式を与える。

定理 1-19

$$\begin{aligned} |\text{誤差}| &\leq \sum_{\substack{k: \langle k, g \rangle \equiv 0 \pmod{N} \\ k \neq 0}} e^{-(|k_1| + \dots + |k_s|)} \\ &\leq N_g \cdot \exp(-\rho_s(N; g)) + (C_s \cdot 3^s - N_g) \cdot \exp(-\rho_s(N; g) - 1) \\ &\quad + C_s \cdot \left(\frac{(s+3)!}{6 \cdot (1-r)^s} - 3^s \right) r^3. \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } r = \exp(-\frac{1}{2} \rho_s(N; g)), \quad C_s \leq \frac{(2s-1)! \cdot 2^s}{(s-0)! \cdot s!}$$

N_g : k を満たす不定方程式 $\langle k, g \rangle \equiv 0 \pmod{N}$ の解 k で $|k_1| + \dots + |k_s| = \rho_s(N; g)$ とする個数

1.4.3 まとめ

ii). $\text{Max}_g \rho_s(N; g)$ を求める算法の工夫を含めて、表 5, 6 に対応する N の大きい値に対する表の補充が必要である。

ii) 数値実験によれば, 定理 1-19 の誤差評価式が一項が誤差をよく近似する。

2. 複合化 good lattice points 法について

2.1 序論

(0.3) 式で定義される複合化 good lattice points 法を, $CGLs(N; p, g)$, $N = pn^s$ (総分点数), $g = (g_1, g_2, \dots, g_s)$ と略記する。

また, 数値積分公式 $CGLs(N; p, g) \in \mathcal{E}_s(\beta, C)$ に属する関数 f に適用し k 階の誤差を見る。1. k における誤差評価と同様 $k=1$ で, 以下の式を得る。

$$\begin{aligned}
 |\text{誤差}| &= \left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \frac{1}{N^s} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_s=1}^n \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p f\left(\frac{i_1}{n} + \frac{k}{p}g_1\right), \dots, \frac{i_s}{n} + \frac{k}{p}g_s \right) \right| \\
 &= \left| c_0 - \frac{1}{N^s} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_s=1}^n \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \left(\sum_{h \in \mathbb{Z}^s} c_h \exp(2\pi i \frac{1}{n} \langle i + \frac{k}{p}g, h \rangle) \right) \right) \right| \\
 &= \left| c_0 - \sum_{h \in \mathbb{Z}^s} c_h \left(\frac{1}{N^s} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_s=1}^n \exp(2\pi i \langle i, h \rangle) \right) \cdot \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \exp(2\pi i \frac{k}{p} \langle g, h \rangle) \right) \right| \\
 &= \left| \sum_{\substack{h' : \langle h', g \rangle \equiv 0 \pmod{p} \\ h' \neq 0}} c_{h'} \right| \\
 &\leq C \sum_{\substack{h' : \langle h', g \rangle \equiv 0 \pmod{p} \\ h' \neq 0}} e^{-\beta n(|h'_1| + \dots + |h'_s|)} \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

今, good lattice points 法における ρ_s, eff_s の拡張として

$$\rho_s(N; p, g) \equiv \text{Min}_{\substack{h' : \langle h', g \rangle \equiv 0 \pmod{p} \\ h' \neq 0}} (n(|h'_1| + \dots + |h'_s|))$$

$$\text{eff}_s(N; p, g) \triangleq \rho_s(N; p, g) / \sqrt{N}$$

を導入する。すると、1. の場合と同様に

$$\begin{aligned} |\text{誤差}| &\sim O(e^{-\beta \rho_s(N; p, g)}) \\ &\sim O(e^{-\beta \cdot \text{eff}_s(N; p, g) \cdot \sqrt{N}}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

なる評価式が得られる。ところが容易にわかるように $\rho_s(N; p, g) = n \cdot \rho_s(p; g)$, $\text{eff}_s(N; p, g) = \text{eff}_s(p; g)$ であるから、上評価式 (2.2) は次のようになる。

$$\begin{aligned} |\text{誤差}| &\sim O(e^{-\beta \cdot n \cdot \rho_s(p; g)}) \\ &\sim O(e^{-\beta \cdot \text{eff}_s(p; g) \cdot \sqrt{N}}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

従って、複合化 good lattice points 法の誤差に関する問題は、次の2つの問題に帰着されることになる。

問題1. $\rho_s(p; g)$ の性質を知ること。

(特に、数値積分を行なう場合、多くの分点数 N に対して、数値結果が得られることが望ましい。従って、 p がよいと3での性質が重要である)

問題2. $\rho_s(p; g)$ が与えられたとして、(2.3) の評価を正確に行なうこと。

(しかし、これらの問題は、すでに、本質的に、1. で解決済みであり、その1. の知識を用いることによつて、効率の良き複合化 good lattice points 法を求めることができよう。つまり、問題1については、1. では不幸にしてよい p に対してしか得られなかった $\rho_s(p; g)$ の性質をそのまま使用すればよし、また、問題2については、誤差評価式 (2.1) と 1. の誤差評価式

(1.1) を見比べれば、わかるように good lattice points 法の誤差評価に対する定理で $e^{-\beta \dots}$ の部分を $e^{-\beta n^s}$ に変換すればよい。

2.2 有効な複合化 good lattice points 法

2.1 をおぼろげに考察から、有効と思われる複合化 good lattice points 法を、以下、列挙する (それぞれ $\mathcal{E}_s(\beta, C)$ に適用 (正時の誤差評価も与える)).
 $N_s C e^{-\beta \cdot \text{eff} \cdot \sqrt{N}}$

$S=2$.

$$CGL_2(2n^2; 2, (1, 1)), \quad |\text{誤差}| \approx 2 \cdot C \cdot e^{-\beta 2n} = 2C e^{-\beta \sqrt{2N}}$$

$$CGL_2(8n^2; 8, (1, 3)), \quad |\text{誤差}| \approx 6 \cdot C \cdot e^{-\beta 4n} = 6C e^{-\beta \sqrt{2N}}$$

$S=3$.

$$CGL_3(38n^3; 38, (1, 7, 11)), \quad |\text{誤差}| \approx 14 \cdot C \cdot e^{-\beta 6n} \approx 14 \cdot C \cdot e^{-\beta \cdot 1.7847 \cdot \sqrt{N}}$$

$$CGL_3(12n^3; 12, (1, 3, 5)), \quad |\text{誤差}| \approx 16 \cdot C \cdot e^{-\beta 4n} \approx 16 \cdot C \cdot e^{-\beta \cdot 1.7472 \cdot \sqrt{N}}$$

$S=4$.

$$CGL_4(16n^4; 16, (1, 3, 5, 7)), \quad |\text{誤差}| \approx 32 \cdot C \cdot e^{-\beta 4n} \approx 32 \cdot C \cdot e^{-\beta \cdot 2 \cdot \sqrt{N}}$$

$S=5$

$$CGL_5(20n^5; 20, (1, 3, 5, 7, 9)), \quad |\text{誤差}| \approx 58 \cdot C \cdot e^{-\beta 4n} \approx 58 \cdot C \cdot e^{-\beta \cdot 2.1921 \cdot \sqrt{N}}$$

ここで、 $S=3$ の場合、 $(CGL_3(38n^3; 38, (1, 7, 11)))$ が初率最大の数値積分公式列を与えていることは、注目される。2.1 で述べたように、もし初率の良し p と q があれば、それを複合化することによって、それと同じ初率をもつ数値積分公式列が得られるのである。その意味で、複合化 good lattice points 法は、good

Lattice points 法より優れているといえる。

次に、上記の複合化 good lattice points 法を、具体的関数

$$f(x) = \sum_k e^{-(|k_1| + \dots + |k_s|)} e^{2\pi i \langle k, x \rangle} = \prod_{j=1}^s \frac{e^2 - 1}{e^{2j} - 2e \cos(2\pi x_j) + 1}$$

に適用した時の数値積分誤差を示す。\$n \le 1\$、次元の関数で \$s=3\$ の場合のみを記す (表7, 図4)。

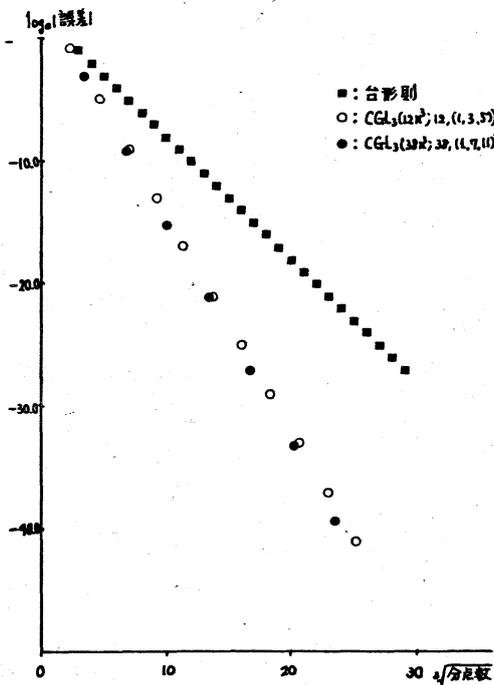


図4 台形則, $CGL_3(12n^3; 12, (1, 3, 5))$, $CGL_3(38n^3; 38, (1, 7, 11))$ を関数 $\prod_{j=1}^3 \frac{e^2 - 1}{e^{2j} - 2e \cos(2\pi x_j) + 1}$ に適用した時の誤差。

表7. $CGL_3(38n^3; 38, (1, 7, 11))$ と $CGL_3(12n^3; 12, (1, 3, 5))$ を関数 $\prod_{j=1}^3 \frac{e^2 - 1}{e^{2j} - 2e \cos(2\pi x_j) + 1}$ に適用した時の誤差

• $CGL_3(38n^3; 38, (1, 7, 11))$ の場合

n	$N=38n^3$	$-\log_{10}$ 誤差	$-\log_e$ 誤差	$-\log_e(4+6n)$
1	38	1.400	3.224	3.361
2	304	4.058	9.345	9.361
3	1026	6.670	15.359	15.361
4	2432	9.277	21.361	21.361
5	4750	11.883	27.361	27.361
6	8208	14.488	33.361	33.361
7	13034	17.094	39.361	39.361

• $CGL_3(12n^3; 12, (1, 3, 5))$ の場合

n	$N=12n^3$	$-\log_{10}$ 誤差	$-\log_e$ 誤差	$-\log_e(6+4n)$
1	12	0.446	1.026	1.227
2	96	2.261	5.206	5.227
3	324	4.006	9.225	9.227
4	768	5.744	13.227	13.227
5	1500	7.482	17.227	17.227
6	2592	9.219	21.227	21.227
7	4116	10.956	25.227	25.227
8	6144	12.693	29.227	29.227
9	8748	14.430	33.227	33.227
10	12000	16.168	37.227	37.227
11	15972	17.905	41.227	41.227

この表および図より、前記の誤差評価式の近似度が非常に良いことがわかる。なお、これは、次元に関係なく成立することであることが他の数値実験からわかる。

2.3 まとめ

複合化 good lattice points 法としては, 2.2 にあげたものを
用いたほうが良い。その時の誤差は, $C \cdot N_g \cdot e^{-\beta \cdot \text{eff}_s(p; g) \cdot s/\sqrt{N}}$ によ
く近似される。

3. Good lattice points 法と複合化 good lattice points 法 まとめ

実用的観点からすると, 多くの分点数 N に対して数値結果
が得られることが望ましい。この観点, および, 効率が高い方
が良いという観点を考慮に入れて, 有効な数値積分公式を決定
すると, 下の表 8 のようになる。

表 8. $E_s(\beta, C)$ に対する有効な数値積分公式

次元 公式	Good lattice points 法	複合化 good lattice points 法	実用上最も有効な 数値積分公式
$S=2$	$GL_2(2n^2; (1, 2n-1))$	$CGL_2(2n^2; 2, (1, 1))$ $CGL_2(8n^2; 8, (1, 3))$	$CGL_2(2n^2; 2, (1, 1))$
$S=3$	×	$CGL_3(12n^3; 12, (1, 3, 5))$ $CGL_3(38n^3; 38, (1, 7, 11))$	$CGL_3(12n^3; 12, (1, 3, 5))$
$S=4$ $S=5$	×	$CGL_4(16n^4; 16, (1, 3, 5, 7))$ $CGL_5(20n^5; 20, (1, 3, 5, 7, 9))$	$CGL_4(16n^4; 16, (1, 3, 5, 7))$ $CGL_5(20n^5; 20, (1, 3, 5, 7, 9))$

×: 結果が得られていないことを示す。

4. 数値積分公式の誤差の下限

主要な結果は、次の定理である。

定理 4-1

ある数値積分公式列が存在して、任意の $f \in E_s(\beta, C)$ に対して

$$\left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \sum_{j=1}^N w_{N,j} f(x^{N,j}) \right| \leq M_f \cdot \xi(N) \cdot e^{-\beta \sqrt{s!N}}$$

ここで、 M_f は f による定数、 $\xi(N)_{N=1}^{\infty}$ は 0 の収束する正数列、となることを示す。つまり、誤差は、 $e^{-\beta \sqrt{s!N}}$ より速くは 0 にならない。

この定理により、各次元ごと $s=1, 2, 3, \dots$ で得られる数値積分公式に対する評価ができる。

i) $s=1$.

N 点台形則 $\Sigma f \in E_1(\beta, C)$ に適用した時の誤差は $\frac{2C}{1-e^{-\beta N}} e^{-\beta N}$ 以下であり、定理 4-1 より、これをこれ以上改良することはできない。従って、台形則は、定数倍を除いて最良である。

ii) $s=2$.

定理 4-1 より、定数倍を除いて、 $e^{-\beta \sqrt{2N}}$ より誤差を改良することはできない。これは、 $\text{eff}_2(N; g) = \sqrt{2}$ とするような N と g の系列をもつ good lattice points 法、および $\text{eff}_2(N; p, g) = \sqrt{2}$ とするような複合 good lattice points 法により達成される。従って、 $s=2$ で $E_2(\beta, C)$ に対する実用上最も有効な公式は $(\text{CG}_L(2N^2; 2, (1, 1)))$ も定

数倍を除くべきである。

iii) $s \geq 3$.

定理 4-1 の結果と, 1.~3. で得られた結果とを併せて, 本質的に開きがある。従って, 今後, 数値積分公式の研究, および, 誤差の下限に関する研究によつて, その開きを縮める必要がある。

なお, この定理 4-1 を用いて, 周期的解析関数の空間における数値積分誤差の下限に関する評価もできる ([1] 参照)。

5. IMT 型二重指数変数変換を適用した多変数解析関数の数値積分

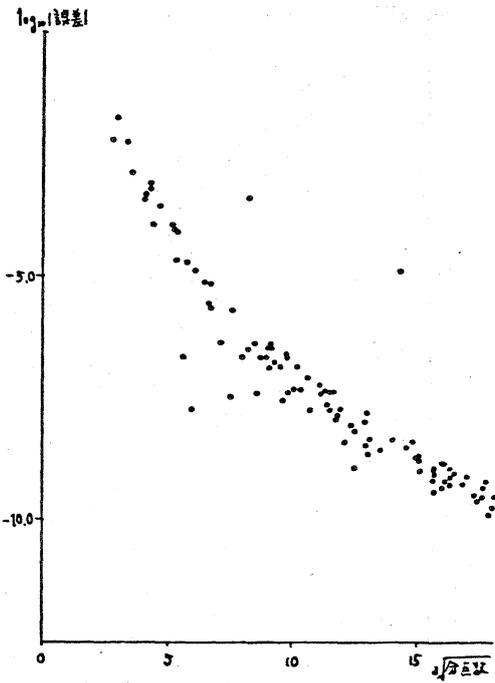
積分 $\int_{[0,1]^s} f(x) dx$ において被積分関数が $[0,1]^s$ で解析的である時, 積分変数 s 次の変換

$$x_j = \frac{1}{2} \tanh \left(A \sinh \left(B \left(-\frac{1}{y_j} + \frac{1}{1-y_j} \right) \right) \right) + \frac{1}{2} \quad (\equiv \varphi(y_j)) \quad (5.1)$$

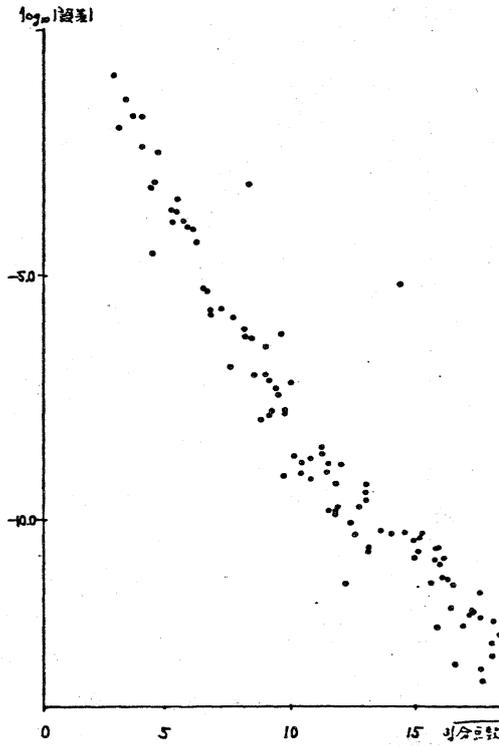
で変換すると, 被積分関数 $f(\varphi(y_1), \dots, \varphi(y_s)) \cdot \varphi_1'(y_1) \cdots \varphi_s'(y_s)$ は, $E_s(\beta, C)$ の元と近似的に考えられる。そこで, ここでは, 具体例を通して, 上記のような IMT 型二重指数変数変換を適用した多変数解析関数の積分への, $E_s(\beta, C)$ に対して有効であると見て得られた公式の適用可能性を調べることにする。

変数変換を具体的に実行するにあたって, (5.1) 式の中の A, B は, 関数 1 に対して変数変換を行なった被積分関数 K , $CGL_2(2.16^2; 2, (1,1))$, および, 分点数 23 ($\approx \sqrt{2.16^2}$) の一次元台形則を適用した時, 数値積分誤差が小さくなる A, B の値とした。具体的には $A=3.75, B=0.4$ である。

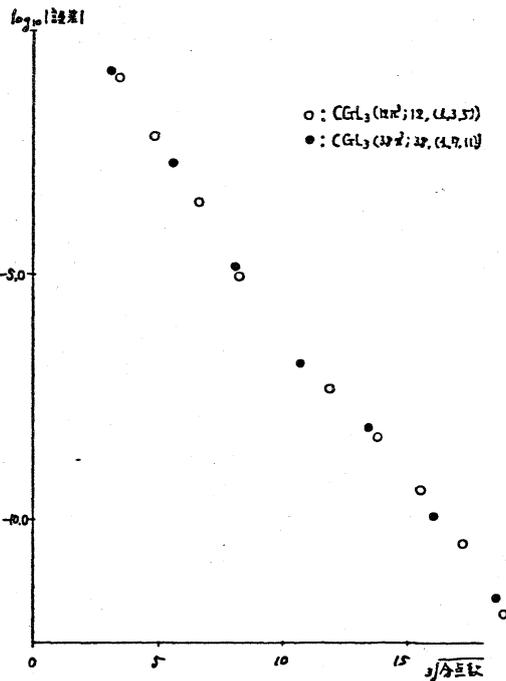
図5に、関数 $\exp(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3)$ の場合、多項式変換を行って、good lattice points法 (Zaremba等が与えられたら、之を用いる) を適用した時の誤差と、IMT型二重指数変換を行って、 $CGL_3(12n^3; 12, (1, 3, 5))$, $CGL_3(38n^3; 38, (1, 7, 11))$ を適用した時の誤差を示す。図6は、関数値の変化の激しい関数 $\prod_{j=1}^3 a_j / (a_1 + x_j)^2$ について図5と同じことを行って、その結果である。これは、この関数から、IMT型二重指数変換を行って、複合化 good lattice points法を適用する方法は、被積分関数が積分領域の端点に代数的特異性、もしくは、それに近い性質をもつとき有効であることがわかる。しかし、特異性を有さない関数に対しては、多項式変換を行って、good lattice points法を適用する方法が有効である。従って、端点特異性をもつような関数に対しては積分にこの方法を用いるべきである。また、図7に、関数 $\prod_{j=1}^3 a_j / (a_1 + x_j)^2$ にIMT型二重指数変換を行って、 $\mathcal{E}_s(\beta, C)$ に対して有効であるとされた公式(3.参照)を適用した時の誤差を示す。この図より、次元が増えるにつれて効率が落ちるのがみえてくる。



(i) 3次の多項式変換

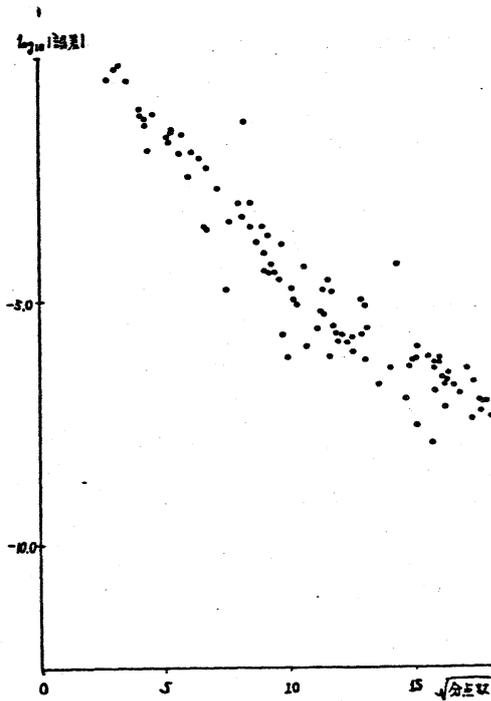


(ii) 5次の多項式変換

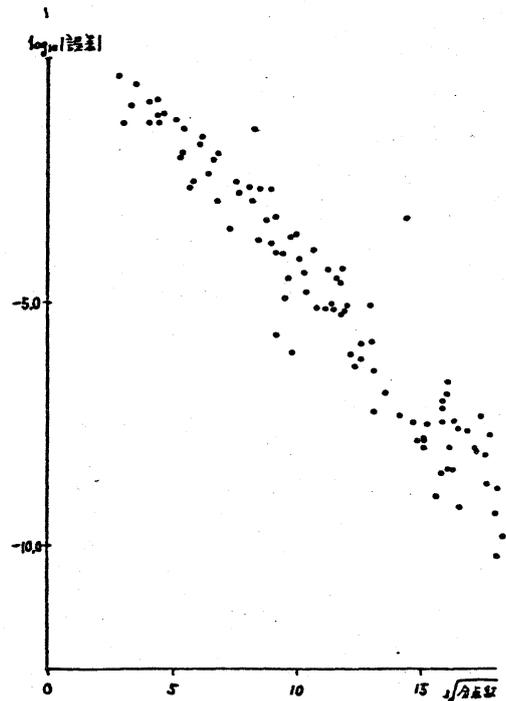


(iii) ZMT型=重指数変換

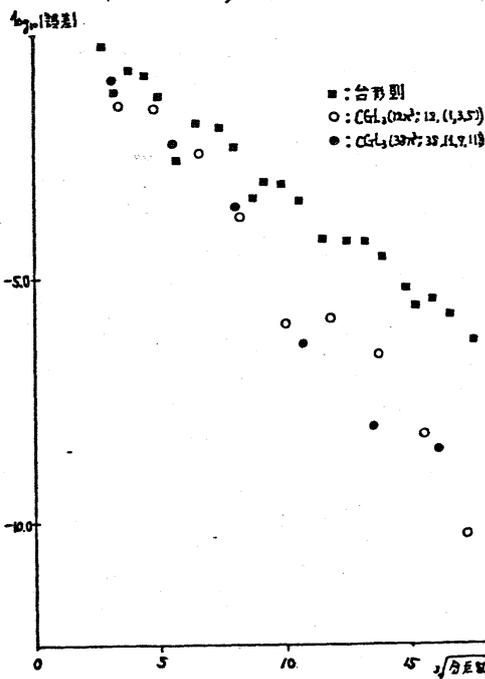
図5. 関数 $\exp(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$ に多項式変換を施した good lattice points 法 (Zarembka 等によるハニメタを使用) と通用1K 結果と ZMT型=重指数変換 と通用1K (Z CGL3(12n³; 12, (1,3,5)), CGL3(38n³; 38, (1,7,11))) と行₁₂, T₁₂ 結果の比較.



(i) 3次多項式変換



(ii) 5次多項式変換



(iii) IMT型 = 重指数変換

図6 関数 $\frac{1}{1+x^2}$ の多項式変換と行方, good lattice points法 (Zarembka等による π^2 の使用) と通用 (12 結果と IMT型 = 重指数変換と行方, CGL₃(12³; 12, (1,3,5)), CGL₃(38³; 38, (1,7,11)) と通用 (12 結果) の比較.

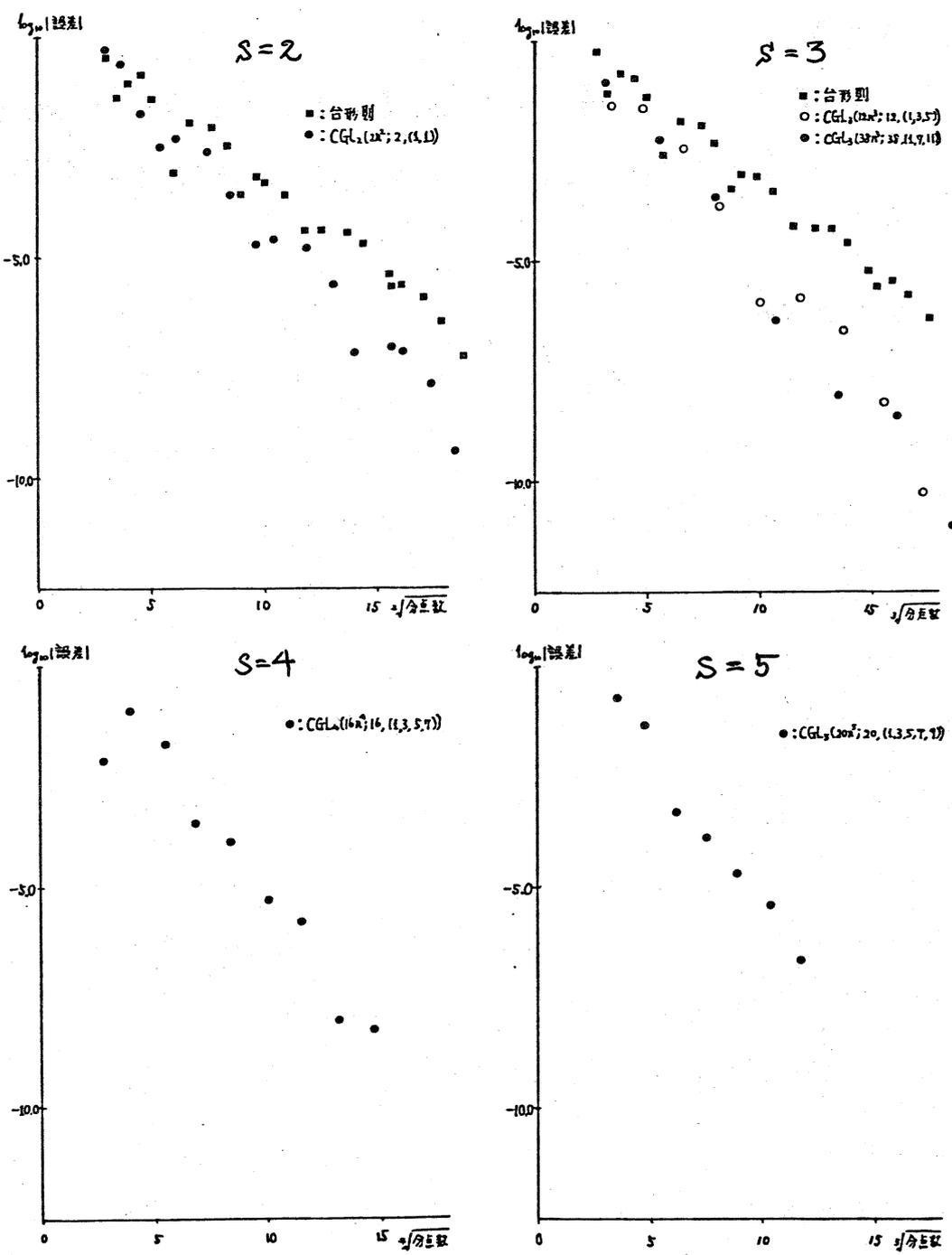


図7. 関数 $\prod_{j=1}^S 0.11 / (0.1 + \pi_j^2)$ の ZMT 型 = 重指数変換の行形, Z_s , $Z_s(\beta, C)$ に対して有効な近似公式を適用した結果 (誤差).

6. まとめ

ここでは, 1.~5. で得られた結果のまとめを行なう。結果は次元ごとにまとめるので, 1次元, 2次元, 3次元, 4,5次元の場合に分けて述べる。

(i) 1次元の場合

$E_1(\beta, C)$ に対する公式としては, 台形則がその誤差を, 定数倍を除いて, それ以上改良出来ないという意味で最良である。

IHT型=重指数変換を適用して台形則を用いることについては, 高橋・森の研究により, その有効性が示されている。

(ii) 2次元の場合

$E_2(\beta, C)$ に対する実用的見地から有効な公式は $CGL_2(2N^2; 2, (1, 1))$ であり, その誤差は $\delta \cdot C \cdot e^{-\beta\sqrt{2N}}$ ($N=2N^2$) で近似される。また, この $CGL_2(2N^2; 2, (1, 1))$ の台形則と同様に, その誤差が定数倍を除いて改良出来ないという意味で最良である。

IHT型=重指数変換を適用して, $CGL_2(2N^2; 2, (1, 1))$ を用いる方法は, 積分領域の端点に特異性があるような関数に対して有効である。

(iii) 3次元の場合

$E_3(\beta, C)$ に対する公式の中で, 最も効率の良いものは $CGL_3(3N^3; 3, (1, 7, 11))$ である。そして, その時の誤差 $\mathcal{O}(e^{-\beta\sqrt{\frac{108}{11}N}})$, ($N=3N^3$) と任意の積分公式を考慮した時の誤差の下限 $\mathcal{O}(e^{-\beta\sqrt{6}N})$ との
3x

間には、指数部に差がある。実用上は、 $CGL_3(38n^3; 38, (1, 7, 11))$ と、実用範囲 (2) (分点数 ≤ 20) で、ほとんどの差のある $CGL_3(12n^3; 12, (1, 3, 5))$ が有効と思われる。その誤差は $C \cdot 16 \cdot e^{-4\beta n}$ で近似できる。

IMT型 = 重指数変換を適用して、 $CGL_3(12n^3; 12, (1, 3, 5))$ を用いる方法は、2次元の場合と同様に、関数が積分領域の端点に特異性をもつときに有効である。

(iv) 4.5次元の場合。

Good lattice points 法、複合 good lattice points 法とも、効率最大と見る場合はわがところ、現状では、4次元は $CGL_4(16n^4; 16, (1, 3, 5, 7))$ (誤差は $C \cdot 32 \cdot e^{-4\beta n}$ で近似できる)、5次元では $CGL_5(20n^5; 20, (1, 3, 5, 7, 9))$ (誤差は $C \cdot 38 \cdot e^{-4\beta n}$ で近似できる) が有効と思われる。これらの公式の生成する誤差と、誤差の下限、4次元では $O(e^{-\beta \sqrt{4N}})$ 、5次元では $O(e^{-\beta \sqrt{5N}})$ との間にはかなりの開きがある。

IMT型 = 重指数変換を適用して、これらの公式を用いる方法は、積分領域の端点に特異性をもつような関数に対して有効である。

参考文献

- [1] 杉原正雄: 準モンテカルロ法に関する研究。東京大学大学院工学系研究科 博士論文, 1982.
- [2] L-K Hua and Y. Wang: Applications of Number Theory to Numerical Analysis. Springer-Verlag, Beijing, 1981.