

5段数陽的 Runge-Kutta 法の安定性と
打ち切り精度の関係について

山梨大工学部 田中正次

“ “ 若林晴彦

“ “ 山下茂

1. まえがき

常微分方程式の初期値問題

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.1)$$

が与えられたとする。ここで $f(x, y(x))$ は十分滑らかとする。
そのとき5段数陽的 Runge-Kutta 法の一般形は、次式によって
与えられる ([17], [18] 参照)

$$k_i = h f(x_n + a_i h, y_n + \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij} k_j) \quad a_1 = b_{i0} = 0, \quad i=1, 2, 3, 4, 5$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^5 c_i k_i, \quad h = x_{n+1} - x_n, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

公式 (1.2) は、表 1 に示すように 12 公式を特徴づける係数の行
列を用いて表す。

表 1 Runge-Kutta 法の表示法

a_2	b_{21}					
a_3	b_{31}	b_{32}				
a_4	b_{41}	b_{42}	b_{43}			
a_5	b_{51}	b_{52}	b_{53}	b_{54}		
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	(1.3)

2. 公式 (1.2) の安定性 (用語の定義) ([1])

$$\text{安定性のテスト方程式 } y' = \lambda y \quad (\lambda \text{ は複素数}) \quad (2.1)$$

を公式 (1.2) に代入し, 4次法の次数条件式を用いて簡単化する

$$\text{と, } y_{n+1} = \left\{ 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!} + \delta_5 (h\lambda)^5 \right\} y_n \quad (2.2)$$

が得られる。ここで $\delta_5 = a_2 b_{32} b_{43} b_{54} C_5$ (2.3) である。

[定義1]

$$p(h\lambda, \delta_5) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!} + \delta_5 (h\lambda)^5 \quad (2.3)$$

によって定義される $h\lambda$ の多項式 $p(h\lambda, \delta_5)$ を, 公式 (1.2) の安定多項式という。

[定義2]

$$S(\delta_5) = \{ h\lambda \mid |p(h\lambda, \delta_5)| \leq 1, h\lambda \text{ は複素数} \} \quad (2.4)$$

によって定義される複素平面上の開領域 $S(\delta_5)$ を, 公式 (1.2) の絶対安定領域という。便宜上原点を含む単連結な絶対安定領域の面積を $A(S(\delta_5))$ で表すことにする。

[定義3]

R を実数全体の集合とするとき,

$$S_{\mathbb{R}}(\delta_5) = R \cap S(\delta_5) \quad (2.5)$$

によって定義される閉区間 $S_{\mathbb{R}}(\delta_5)$ を, 公式 (1.2) の絶対安定区間という。

3. γ_5 と安定性の関係

Fig. 1 は、横軸に $h\lambda$ 縦軸に $p(h\lambda, \gamma_5)$ をとって、 γ_5 と $p(h\lambda, \gamma_5)$ の関係を図示したものである。公式 (1.2) の絶対安定区間 $S_I(\gamma_5)$ は、Fig. 1 において $-1.0 \leq p(h\lambda, \gamma_5) \leq 1.0$ が成立する $h\lambda$ の範囲である。 $\gamma_5 = 0$ のとき、 $S_I(\gamma_5)$ は、4 段 4 次陽的 Runge-Kutta 法の絶対安定区間（この区間は一意に決まる）と一致する（Fig. 1 参照）。絶対安定であるためには $h\lambda < 0$ でなければならず、 $\gamma_5 < 0$ ならば $\gamma_5 (h\lambda)^5 > 0$ となり、 $p(h\lambda, \gamma_5)$ が増加するから $S_I(\gamma_5)$ は減少する。Fig. 1 の観察から知られるように、 $\gamma_5 \in [0.001, 0.01]$ のとき、 $S_I(\gamma_5)$ は 4 段 4 次法のそれよりも大きくなる。なお、区間 $[0.001, 0.01]$ において γ_5 の増加と共に $S_I(\gamma_5)$ も次第に増加するが、特に γ_5 が 0.004 と 0.005 の中間のある値をとるとき、不連続的に激増して最大となり、以後単調に減少する。最大絶対安定区間を求めるには、連立方程式

$$p(h\lambda, \gamma_5) = 1, \quad p'(h\lambda, \gamma_5) = 0 \quad (p' \text{ は } p \text{ を } h\lambda \text{ について微分したものを示す}) \quad (3.1)$$

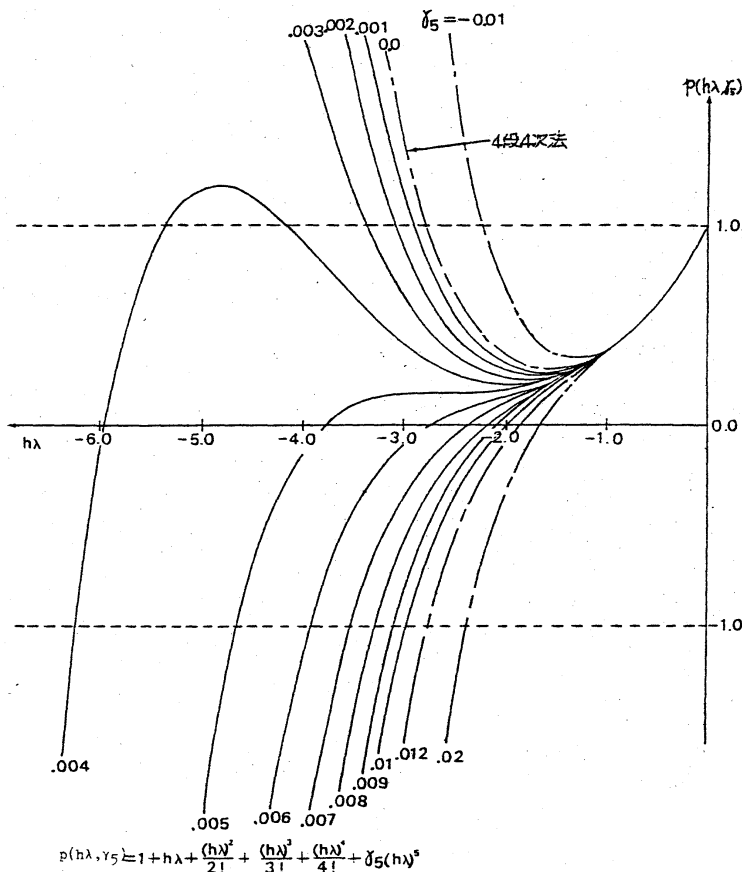
より γ_5 を決定し（この γ_5 を γ_5^* とおく）、ついで方程式

$$p(h\lambda, \gamma_5^*) = -1 \quad (3.2)$$

を満足する $h\lambda$ を求めれば、これが最大絶対安定区間 $\max_{\gamma_5} S_I(\gamma_5)$ の下限 α_{min} を与える。以上の手続きによつて

$$\max_{\gamma_5} S_I(\gamma_5) = S_I(\gamma_5^*) \doteq S_I(0.0040869) = (-6.0606, 0.0) \quad (3.3)$$

であることが知られた。

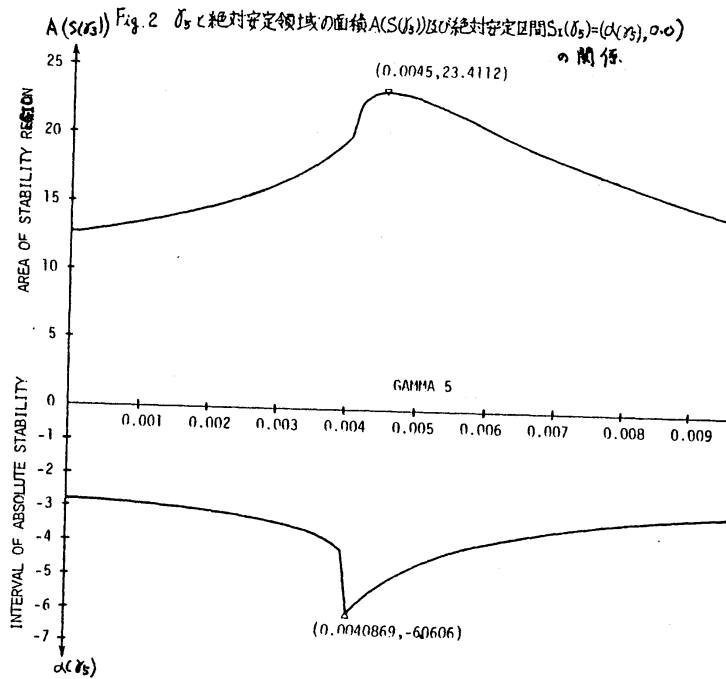


$$P(h\lambda, \gamma_5) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!} + \gamma_5(h\lambda)^5$$

Fig. 1 γ_5 と $h\lambda$ と $P(h\lambda, \gamma_5)$ の関係

Fig. 2 は、横軸に γ_5 、縦軸に絶対安定領域の面積 $A(S(\gamma_5))$ 及び絶対安定区間 $S_I(\gamma_5) = (\alpha(\gamma_5), 0.0)$ の下限 $\alpha(\gamma_5)$ をとって、 γ_5 と安定性の間 の 関 係 を 図 示 し た も の で あ る 。 Fig. 2 の 観 察 か ら 知 ら れ る よ う に、 γ_5 が 0.0 から 増 加 し て 0.004 の 近 傍 に 達 す る ま で、絶対安定領域の面積も絶対安定区間も共に徐々に増大するが、絶対安定区間は $\gamma_5 = 0.0040869$ で激増して最大となるが、それ以後 $\gamma_5 = 0.010$ に達するまで単調に減少を続ける。また、絶対安定領域の面積は、 $\gamma_5 = 0.0045$ 付近で最大となるが、以後単調に減

火寸名。注1)



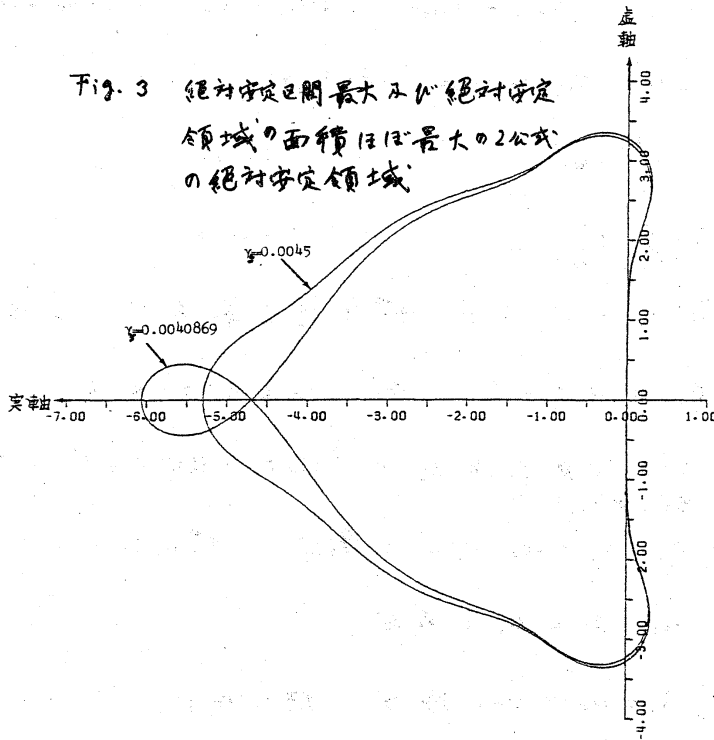
注1) 絶対安定領域は，単連結の複數個の成分から構成されて居り，絶対安定区間や絶対安定領域の面積の急増は，2つの絶対安定領域の接触条件によるものである。

Fig. 3に，それぞれ絶対安定区間最大及び絶対安定領域の面積は最大の2公式に対応する絶対安定領域を示す。

4. 公式(1.2)の打ち切り精度判定基準他 ([2], [3], [4]参照)

公式(1.2)が4次の精度をもつように選ばれた次数条件式注2)の田中らによる解系 ([5]参照) 及び，同公式が4次と5次の中間の精度をもつように選ばれた田中らによる解系 ([6]参照) (便宜上前者を解系A，後者を解系Bとよぶことにする。)を用いる

Fig. 3 絶対安定区間最大及び絶対安定領域の面積は最大の2公式の絶対安定領域



と、公式 (1.2) の局所打ち切り誤差は、

$$T = th^5 + O(h^6) \quad (4.1)$$

と表される。ここで、

$$t = a_{41} D^4 f + a_{42} D^2 f_y Df + a_{43} Df_y D^2 f + a_{44} f_y^2 D^2 f + a_{45} f_{yy} (Df)^2 + a_{46} f_y D^3 f + a_{47} f_y Df_y Df + a_{48} f_y^3 Df \quad (4.2)$$

である。ただし $D = \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y}$ であり、また a_j ($j=1, 2, \dots, 8$) は公式の係数のための関数である (7) 参照)。

打ち切り誤差の主項の大きさを判定するためには、有効性が確認されている次の3種の打ち切り精度判定基準を導入する。

$$A_{41} = 16 |a_{41}| + 4 |a_{42}| + |a_{42} + 3a_{43}| + |2a_{42} + 3a_{43}| + |a_{42} + a_{43}|$$

$$\begin{aligned}
& + |a_{43}| + 8|a_{44}| + |a_{45}| + |2a_{45} + a_{47}| + |a_{45} + a_{46} + a_{47}| + |a_{46}| \\
& + |2a_{46} + a_{47}| + |a_{47}| + 2|a_{48}| \quad (4.3)
\end{aligned}$$

$$A_{42} = \sum_{j=1}^8 |a_{4j}| \quad (4.4)$$

$$A_{43} = \sum_{j=1}^8 a_{4j}^2 \quad (4.5)$$

解系 B に対する打ち切り精度判定基準は、上式において

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0 \text{ とおいたものである。}$$

注2) 4次の次数条件式は、単調性の仮定から得られる次の各場合について解かれた([5])。

(i) $a_2 = a_3 = a_4 = a_5$ の場合 解は存在しない。

(ii) $a_2 = a_3 = a_4$ の場合

(iii) $a_3 = a_4 = a_5$ の場合 解は存在しない。

(iv) $a_2 = a_3$ の場合

(v) $a_3 = a_4$ の場合

(vi) $a_4 = a_5$ の場合

(vii) $a_i \neq a_j$ ($i \neq j$) の場合

次に丸め誤差に関する性質を判断するため、次式によって定義される数量 R_{42} を導入する。

$$R_{42} = \sum_{i=1}^5 c_i + \sum_{i=2}^5 \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \quad (4.6)$$

5. 安定性と打ち切り精度の関係。公式の誘導

公式(1.2)の次数条件式に対する上記の解系 A 及び B は、 a_i, b_{ij} のいくつかを自由パラメータとして与えている。打ち切り精度と安定性の関係は、次のようにして得られた。

(1) 自由パラメータ a_i 及び b_{ij} を, それぞれ [変域 0.0~1.0, 刻み幅 0.1] 及び [変域 -2.0~2.0, 刻み幅 0.2] で変動させたときに得られる (各自由パラメータを成分とする) すべての格子点について, 公式の係数, γ 及び A_{43} を計算する。

(2) 閉区間 $[0.0, 0.01]$ を等分して多数の小区間 I_i を作り, $\gamma \in I_i$ とするような格子点 S の集合 Q_i を求める。

(3) $\bar{A}_{43}^i = \min_{S \in Q_i} A_{43}(S) = A_{43}(S_i)$ によって \bar{A}_{43}^i を定義し, すべての小区間 I_i について, \bar{A}_{43}^i を与える格子点 (自由パラメータの組) S_i を求める。

(4) γ の各小区間 I_i において, (3) で得られた S_i を出発値として非線形最適化の手法 (サブグラディエント法 (田辺他) (10)) を使用) により A_{43} の最小化を図る。^{その結果得られた} 小区間 I_i における A_{43} の最小値を \tilde{A}_{43}^i とし, それに対応する $\gamma_i, S_i(\gamma_i), A(S(\gamma_i))$ 及び R_{42} を, それぞれ $\gamma_i^i, S_i^i(\gamma_i), A^i(S(\gamma_i))$ 及び R_{42}^i とする。すべての小区間 I_i について, $(\gamma_i^i, S_i^i(\gamma_i), A^i(S(\gamma_i)), R_{42}^i, \tilde{A}_{43}^i)$ を求める。

(5) 横軸に γ , 縦軸に $\log_{10} A_{43}$, $S_i(\gamma) = (\alpha(\gamma), 0.0)$ の下限 $\alpha(\gamma)$, $A(S(\gamma))$ 及び $\log_{10} R_{42}$ をとり, γ とこれらの諸量の間関係を図示したものが Fig. 4 である。すなわち, Fig. 4 の $\log_{10} A_{43}$ のグラフ上の点に対応する公式は, 同じ安定特性をもつ (同じ $A(S(\gamma))$ または $S_i(\gamma)$ をもつ) 公式の中では, 打ち切り精度がほぼ最良の公式である。以下に, 実用上有意義と思われるそのような

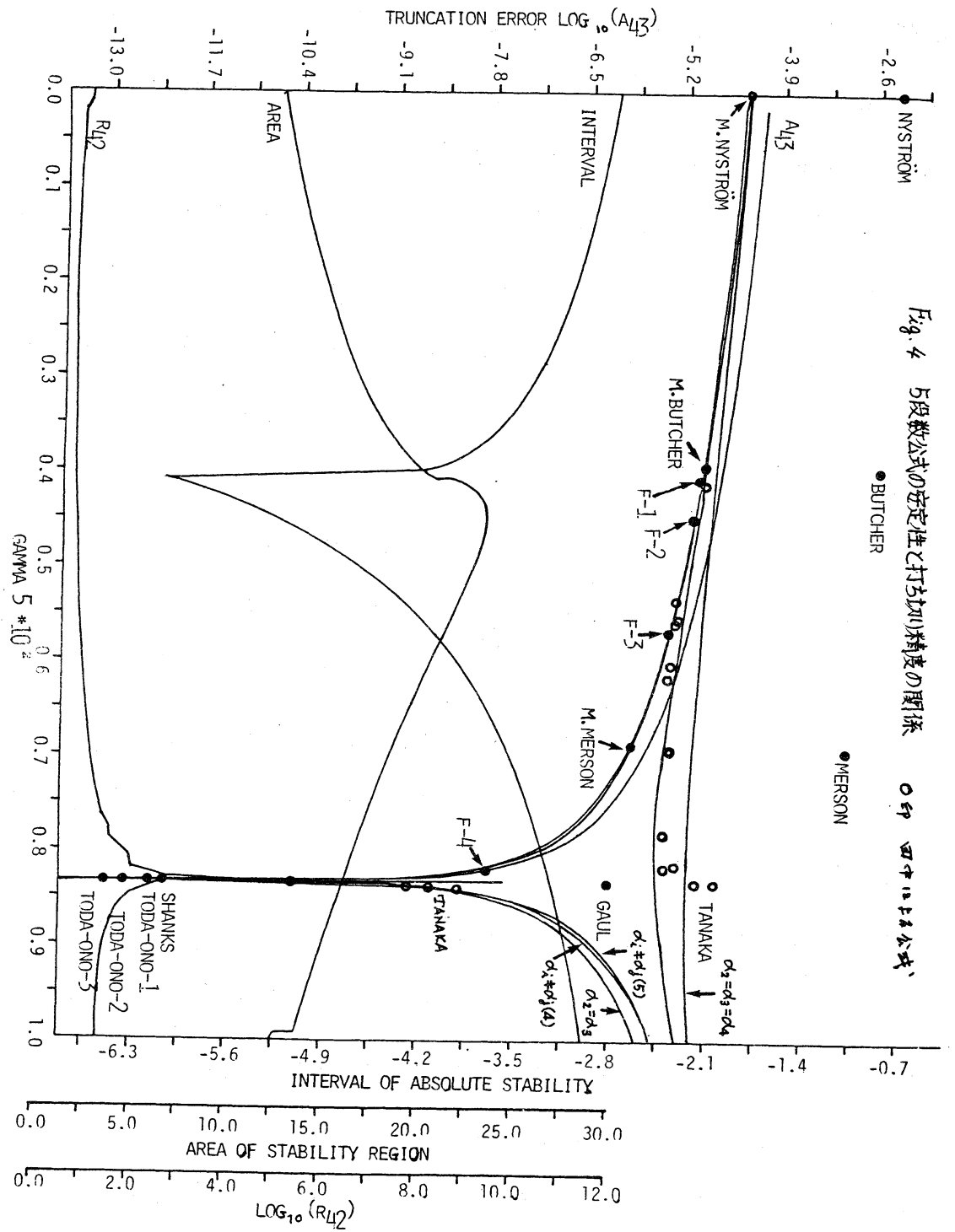


Fig. 4 5段数公式の安定性と打ち切り精度の関係

170 の公式のいくつかを示す。

[公式 I] 絶対安定区間最大の公式

0.28760246784 170599	0.28760246784 170599				
0.5528541136 3008983	-0.0473052227 8606060917	0.6001593364 1615075			(5.1)
0.4342410403 8892311	-0.15353751167 156925	0.9525263566 5377960	-0.3547458025 9328927		
1.0	0.3951756994 3874892	-0.28640313389 094516	1.3354315535 929586	-0.4442041191 4076236	
<hr/>					
	0.13096957718 315954	0.26744514340 601987	0.64783116297 128166	-0.19652561038 582379	0.15025972682 536322

[公式 II] 絶対安定領域がほぼ最大の公式

0.262319053 26705159	0.262319053 26705159				
0.5559822014 7799232	-0.9869338041 8056018	0.654675581 89604834			(5.2)
0.428755301 24881997	-0.3021950461 5511013	0.1128287073 0926472	-0.3978367256 8871809		
1.0	0.45139970319 445998	-0.3533537516 5060772	1.3472176815 828748	-0.44526369312 672706	
<hr/>					
	0.12124486643 16536	0.2634356629 7403497	0.6481951988 3238375	-0.180984701185 28995	0.148108962735 70587

[公式 III] 安定性も打ち切り精度も共にかなりよい公式

0.215261864 5825034	0.2152618364 5825034				
0.563917923 51325564	-0.2380194210 3480170	0.801937344 54805734			(5.3)
0.42923713053 677892	-0.703897374 77169584	1.601446240936 9868	-0.46831173562 851201		
1.0	0.5860251990 4261255	-0.48563476380 808625	1.390910717986 4589	-0.49130095322 098520	
<hr/>					
	0.0949537149 24487453	0.27074768412 795693	0.65157534709 676944	-0.160917032358 60546	0.14314028620 939224

[公式 IV] 打ち切り精度ほぼ最良な公式

0.015614603710 132764	0.015614603710 132764				
0.57908830896 613639	-10.206315182 213045	10.785403491 779181			(5.4)
0.46234590931 565293	-32.406442796 058840	33.590440673 329304	-0.72165196795 421113		
1.0	9.9092590611 379235	-9.9305819704 091185	1.5458103876 277362	-0.52448747835 654116	
	-1.6386315039 536836	1.946626898 376900	0.690288259192 67616	-0.126754325129 73112	0.128470671513 83859

これらの公式は, Fig. 4 において $F_1 \sim F_4$ として示される。

[公式 IV] は一例として掲げたもので, 特にこの公式が最良といわけはない。このタイプの公式は, 既に E. B. Shanks, 田中, 戸田・小野などによって研究され, いくつかの公式が提案されている ([9], [4], [10] 参照。Fig. 4 Shanks, TANAKA, TODA-ONO-1~3 参照)。

注3) このタイプの公式は, $\delta_{r+1} = 1.0$ という特徴をもっている。一般に $(r+1)$ 段 r 次法の特異多項式を

$$p(h, \delta_{r+1}) = \sum_{k=0}^r \frac{(h\lambda)^k}{k!} + \delta_{r+1} \cdot \frac{(h\lambda)^{r+1}}{(r+1)!} \quad (5.5)$$

とすると, この方法は $\delta_{r+1} = 1.0$ において打ち切り精度が最良になり, 実質的に $(r+1)$ 法になると推測される。この命題が $r=4$ 及び 5 において成立することは, 既に著者によって確認されている(この論文でとく上げている公式は, $r=4$ の場合である)。残された唯一の場合 $r=6$ (7段6次法) については未確認である。

[公式 I] ~ [公式 IV] 及び古典的 4 次 Runge-Kutta 法の δ_5 ,

$S_I(\delta_5)$ 及び A_{43} を表 2 に示す。また、これらの公式の絶対安定領域

表 2. 公式の特性

公 式	自由パラメータ	δ_5	$S_I(\delta_5)$	A_{43}	解系
I	$a_2, a_3, a_4, a_5, b_{42}, b_{53}, b_{54}$	0.0040869	(-6.06, 0.0)	0.200×10^{-4}	(vii)*
II	" "	0.004500	(-5.29, 0.0)	0.165×10^{-4}	(vii)
III	" "	0.005687	(-4.10, 0.0)	0.820×10^{-5}	(vii)
IV	" "	0.008180	(-3.24, 0.0)	0.308×10^{-7}	(vii)
古典的R-K法		0	(-2.78, 0.0)	0.141×10^{-3}	(vii)

* 注2) 参照のこと。

安定領域を Fig. 5 に示す。

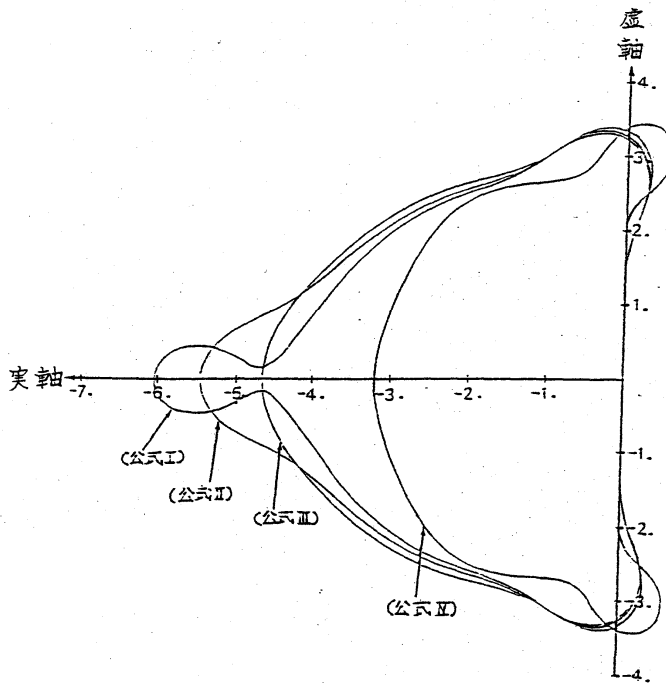


Fig. 5 5段数公式の絶対安定領域

Fig. 4 において、Nyström, Butcher, Merson 及び Gaul と付記された ● は、それらの人々によって提案された 5 段数公式で、上記の名前には

11. が付けられた \bullet は、前記の公式の著者による改良版を示す。
 また \circ 印は、田中によつてこれまで提案された公式である。
 田中による最適公式の特徴は、 A_{63} を無意味に小さくすること
 を避けて、 R_{42} を押えこめるに關する性質を良くした点である
 ([11], [12], [13], [14] 参照)。

6. 数値例

多くの数値実験により、公式の誘導に誤りがないことが確
 認された。ここでは参考までに、non-stiff 問題、stiff 問題各一
 例を掲げよう。

例 1

$$y' = -y + \sin 2x, \quad y(0) = -0.4 \quad (\text{non-stiff 問題})$$

$$(\text{理論解 } y = \frac{\sin 2x - 2\cos 2x}{5}) \quad (6.1) \quad \text{を前記}$$

の各公式と古典的 4 次 Runge-Kutta 法を用いて、刻み幅

0.1 で 50 ステップで積分したときの誤差を表 3 に掲げる

表 3 例 1 の数値解の誤差

公式	第 1 ステップにおける 誤差*	最終ステップにおける 誤差*	最大誤差*
I	0.7031778×10^{-8}	0.1157151×10^{-6}	0.1864982×10^{-6}
II	0.8032133×10^{-8}	0.1335098×10^{-6}	0.2157707×10^{-6}
III	0.1392484×10^{-7}	0.1484328×10^{-6}	0.2084622×10^{-6}
IV	0.4586580×10^{-8}	0.2371330×10^{-7}	0.2648298×10^{-7}
古典的 R-K 法	0.2299642×10^{-7}	0.3431733×10^{-6}	0.5383506×10^{-6}

* 各表には誤差の絶対値が示される。

この場合 $h\lambda = h\frac{\partial f}{\partial y} = -h = -0.1$ となるので、 $h\lambda$ はすべての公式について絶対安定区間内に入る。

例 2.

$$y' = 100(\sin x - y), \quad y(0) = 0 \quad (\text{stiff 問題}) \quad (6.2) \text{ (15), (16) 参照}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{理論解} \\ y = \frac{\sin x - 0.01 \cos x + 0.01 e^{-100x}}{1.0001} \end{array} \right)$$

の数値解を、例 1 と同じ公式を使って求める。

表 4. $h = 0.02$, ステップ数 30 の場合

公式	第1ステップにおける誤差	最終ステップにおける誤差	最大誤差
I	0.6721258×10^{-3}	0.5333003×10^{-5}	0.6721258×10^{-3}
II	0.5399560×10^{-3}	0.4097862×10^{-5}	0.5399560×10^{-3}
III	0.1606665×10^{-3}	0.1678524×10^{-5}	0.1606665×10^{-3}
IV	0.6405542×10^{-3}	0.2138099×10^{-7}	0.6405542×10^{-3}
古典的R-K法	0.1979894×10^{-2}	0.2683534×10^{-4}	0.1979894×10^{-2}

この場合 $h\lambda = h\frac{\partial f}{\partial y} = -100h = -2.0$ であって、 $h\lambda$ はすべての公式について絶対安定区間内におさまっている。

表 5. $h = 0.03$, ステップ数 20 の場合

公式	第1ステップにおける誤差	最終ステップにおける誤差	最大誤差
I	0.3320597×10^{-2}	0.3846035×10^{-4}	0.3320597×10^{-2}
II	0.2316926×10^{-2}	0.2382322×10^{-4}	0.2316926×10^{-2}
III	0.5633370×10^{-3}	0.2861833×10^{-5}	0.5633370×10^{-3}
IV	0.6647760×10^{-2}	0.1024842×10^{-5}	0.6647760×10^{-3}
古典的R-K法	0.1325123×10^{-1}	0.5804437×10^1	0.5804437×10^1

この場合 $h\lambda = -100h = -3.0$ であって、古典的 Runge-Kutta 法のみがこの刻幅に対して不安定である。

表 6 $h = 0.04$, ステップ数 15 の場合

公式	第1ステップにおける誤差	最終ステップにおける誤差	最大誤差
I	0.7965368×10^{-2}	0.1931221×10^{-3}	0.7965368×10^{-2}
II	0.3735874×10^{-2}	0.6439212×10^{-4}	0.3735874×10^{-2}
III	0.8401691×10^{-2}	0.5143054×10^{-3}	0.8401691×10^{-2}
IV	0.3404213×10^{-1}	0.8801598×10^6	0.8801598×10^6
古典的R-K法	0.4981186×10^{-1}	0.3050640×10^9	0.3050640×10^9

この場合 $h\lambda = -4.0$ であって、[公式IV]と古典的 Runge-Kutta 法がこの刻幅に対して不安定である。

表 7 $h = 0.05$, ステップ数 12 の場合

公式	第1ステップにおける誤差	最終ステップにおける誤差	最大誤差
I	0.9295157×10^{-2}	0.3963896×10^{-2}	0.9295157×10^{-2}
II	0.3612370×10^{-2}	0.2094499×10^{-4}	0.3612370×10^{-2}
III	0.4065381×10^{-1}	0.1995379×10^6	0.1995379×10^6
IV	0.1189047×10^0	0.7923765×10^{11}	0.7923765×10^{11}
古典的R-K法	0.1369968×10^0	0.4402609×10^{12}	0.4402609×10^{12}

この場合 $h\lambda = -5.0$ であって、[公式III], [公式IV]及び古典的 Runge-Kutta 法がこの刻幅に対して不安定である。

表8 $h=0.06$, ステップ数10の場合

公式	第1ステップにおける誤差	最終ステップにおける誤差	最大誤差
I	0.7835334×10^{-2}	0.8060482×10^{-3}	0.7835334×10^{-2}
II	0.3995380×10^{-1}	0.1028183×10^5	0.1028183×10^5
III	0.1321262×10^0	0.1616865×10^{10}	0.1616865×10^{10}
IV	0.3268465×10^0	0.1388764×10^{14}	0.1388764×10^{14}
古典的R-K法	0.3099172×10^0	0.8194284×10^{13}	0.8194284×10^{13}

この場合 $h\lambda = -6.0$ であって, [公式I] 以外はすべてこの刻み幅に對して不安定である。

7. 結論

Fig. 4 の観察及び以上の考察から次のような結論が得られる。

(1) 打ち切り精度最良の公式は安定性が悪く, また安定性最良の公式は打ち切り精度が劣っている。 $h \leq 0.0035$ または $h \geq 0.009$ では安定性も打ち切り精度も共に劣っている。したがって, Nyström の公式のようにこの範囲に入る公式は, 他に目立つ長所がなければ, 特に採り上げる値打ちはないと思われる。

(2) 既知公式のあるものは, 打ち切り精度の面では十分改良の余地を残している。同等の安定性をもつ公式の中で, 打ち切り精度最良の公式は, $\log_{10} A_{43}$ のグラフ上の点に対応している。

(3) 5段数公式の絶対安定区間及び絶対安定領域の面積は、6段数5次法のそれと比べて余り遜色がない。また、4段数4次法より著しく打ち切り精度及び安定性がすぐれている。

(4) E. B. Shanksや、田中、戸田・小野などの打ち切り精度の極めてよい公式は、例外なく Fig. 4 の $\log_{10} A_{43}$ を最小にする α の辺 ($\alpha \approx \frac{1}{5.1}$) に現れて居り、安定特性は変らない。

(5) 他意の公式について、その公式の α 及び $\log_{10} A_{43}$ を座標とする点を Fig. 4 上にプロットすることによつて、容易にその公式の特性を評価することができる。その点 Fig. 4 は極めて有用であるといえよう。

(6) 解系 A を用いて A_{43} の最適化を行った結果は、解系 B を用いて得られた結果よりもまさつている (当然のことながら)。

(7) この研究は、実用的には既に十分であると思われながら、未だ完全に解決されたわけではない。現在5段4次法の完全解について、 $\log_{10} A_{43}$ のグラフの下限を定める作業が進行中である。

終りに、この研究を励まして下さつた京都大学一松信教授、有益な助言を惜しまれなかつた山梨大田口東講師並かに、協力をお願いした信越化学馬場俊司君に深謝する。

文献

1. J. D. Lambert, *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York
2. A. Ralston & P. Rabinowitz, *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill, 1978
3. T. E. Hull & R. L. Johnston, Optimum Runge-Kutta methods, *Math. Comp.* 18, 1964
4. 田中正次, Runge-Kutta法の打ち切り誤差の評価について, *情報処理*, Vol. 17, No. 12, 1976
5. 田中, 寺川, 山下, 5段数陽的 Runge-Kutta法について, *情報処理*, Vol. 20, No. 5, 1979
6. 田中正次, 5個の関数値を使用する Runge-Kutta公式について, *情報処理*, Vol. 4, No. 7, 1966
7. 田中正次, Kutta-Merson Processとその類似の方法について, *情報処理*, Vol. 9, No. 1, 1968
8. K. Tanabe & S. Ueda, NOLLS1, a FORTRAN subroutine for nonlinear least squares by a quasi-Newton method, *Computer Science Monographs*, a publication of the Institute of Statistical Mathematics, 1981
9. E. B. Shanks, Solution of differential equations by evaluations of functions, *Math. Comp.*, 20, 1966

10. 戸田英雄・小野令美, 5個の関数計算による実質的125
次の Runge-Kutta 法, 情報処理, vol. 22, No. 2, 1981
11. F. Cochino & J. Kurtzmann, Numerical Solution of Initial Value
Problems, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1966
12. G. Hall and J. M. Watt (ed.), Modern Numerical Methods for Ordinary
Differential Equations, Clarendon Press, Oxford, 1976
13. R. H. Merson, An operational method for the study of the integration
processes, Proceedings of a Symposium on Data Processing, Weapons
Research Establishment, Salisbury, South Australia, 1957
14. H. Gaul, Eine 5-stufige Runge-Kutta Formel für Hand- und Maschinen-
rechnung, ZAMM, Bd. 59, 1979
15. C. W. Gear, Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential
Equations, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey,
1972
16. J. M. Ortega & W. G. Poole, An introduction to numerical
methods for differential equations, Pitman Publishing Inc.,
1981
17. 一松信, 微分方程式と解法, 教育出版, 1973
18. 一松信, 数値解析, 朝倉書店, 1982