数理解析研究所講究録
485巻 1983年 214-241

代数幾何学のシステム理論への応用
―極配置問題を中心に―

阪大基礎工　木村英紀（HIDENORI KIMURA）
阪大工　貝塚洋（HIROSHI KAIZUKA）

1. はしがき

線形システム理論は，入力と出力を含む線形微分方程式で記述されるシステム一般の構造に関する数学的な理論体系で，1960年代初頭R. E. Kalman（現チューリッヒ工科大，フロリダ大教授）によってその基礎がきづかれた[1]．当初の目的は複雑かつ大規模な動的システムに対する合理的な制御系設計のための基礎理論を建設することにあったが，その理論的な深さと広がりが増すにつれ制御工学だけでなく，回路網理論，モデリング理論，予測推定理論，信号処理理論など隣接する工学諸分野にも大きな影響を与え，現在では工学系全体の基礎理論のひとつとして重要な位置を占めるにいたっている（線形システムの教科書としてはたとえば[2]参照）．

システム理論の基本問題のひとつに極配置問題（pole assignment problem）がある．極配置問題はフィードバックによっ

って閉ループ系の極を望ましい位置に配置できるための条件とアルゴリズムをもとめる問題であり，理論的にも実際的にも重要である．極配置問題は一般的な定式化のもとではすでに60年代後半に解決されている.[3] しかし実際的な見地から必要とされるある制限をつけるとこの問題はきわめて困難なものとなり，現在に至るまでこの問題の完全な解決は得られていないし，その目途もついていない．筆者のひとりは数年前にこの問題に対してはじめて実際的に意味のある一連の結果を得た[4]-[6]．しかしその結果は完全解決には程遠いものであり，用いた手法も線形代数の“brute force”な適用で，到底満足すべきものではなかった．　その後この問題は一部の研究者の注目を集めるとともに，線形システム理論の最も困難な未解決問題として有名となり，関連論文の数は累計すればすでに100編を越えるほどになった．その中で代数幾何学を用いた新しいアプローチがあらわれ，幾つかの注目すべき結果が得られた．　この問題をきっかけに代数幾何学はシステム理論の他の問題にも応用され，それなりの成果をあげつつある．

以下本稿では極配置問題を中心にシステム理論に対する代数幾何学の応用の1側面のsurveyを試みる．筆者ちは代数幾何学に関してはその入口の1部をかじったにすぎない全く

の素人であり，従ってその理解には誤りや不十分な点が多いと思われるが御容赦願いたい．

2. 線形システム

2.1 状態空間表現

この章では以後の展開に必要な線形システムの基本的な事項を述べ，極配置問題の定式化を行う．

線形システムは1階の線形常微分方程式と線形代数方程式

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times r} \tag{1a}$$

$$y = Cx \qquad C \in \mathbb{R}^{m \times n} \tag{1b}$$

で記述される． $u = u(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^r$ は入力， $x = x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ は状態（state）， $y = y(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ は出力とよばれる． n は線形システムの次数（order）である．（1）式のように表現する代りに，システム（C, A, B）と略記する場合もある．

入力 u を状態の線形関数と新しい入力 v の和

$$u = Kx + v, \qquad K \in \mathbb{R}^{r \times m} \tag{2}$$

で与えると，（1a）式は

$$\dot{x} = (A + BK)x + Bv \tag{3}$$

となる．（2）の形で入力を与えることを状態フィードバック（state feedback）とよぶ．状態フィードバックによりシステ

ムの各係数行列は

$$(C,\ A,\ B) \longrightarrow (C,\ A+BK,\ B) \tag{4}$$

なる変換をうける．

(2)の状態フィードバックとならんで出力フィードバック

$$u = Ky + v, \qquad K \in \mathbb{R}^{r\times m} \tag{5}$$

が定義される．その結果(1a)は

$$\dot{x} = (A+BKC)x + Bv \tag{6}$$

となる．出力フィードバックによりシステムの係数行列は

$$(C,\ A,\ B) \longrightarrow (C,\ A+BKC,\ B) \tag{6'}$$

なる変換をうける．フィードバックに用いることのできる情報は出力である場合が多いので，実用的見地からは出力フィードバックの方が重要である．状態フィードバックは出力フィードバックの特殊な場合（Cが正方正則の場合）である．

2．2　伝達関数行列

$x(t)$，$u(t)$，$y(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $\hat{x}(s)$，$\hat{u}(s)$，$\hat{y}(s)$ とすると(1)式より

$$\hat{x}(s) = (sI-A)^{-1}B\hat{u}(s), \qquad \hat{y}(s) = C\hat{x}(s)$$

を得る．これより

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s), \qquad G(s) = C(sI-A)^{-1}B \tag{7}$$

となる．$G(s)$ は $\mathbb{R}(s)^{m\times r}$（有理関数を要素とする $m\times r$ 行列）の元で，入力 $\hat{u}(s)$ から出力 $\hat{y}(s)$ への伝達特性をあ

らわす．$G(s)$ を伝達関数行列（transfer function matrix）とよぶ．伝達関数行列は状態空間モデル(1)と同じように線形システムを表現する方法のひとつであるが，前者がそのダイナミックスを内部構造まで立ち入って記述する方法であるとすれば，後者はシステムの「外部」からその入出力関係を記述する方法である．

$G(s)$ は有理関数を要素とする行列であるから

$$G(s) = N(s)D(s)^{-1} \qquad (8)$$

と表わすことができる．ただし $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times r}$（多項式を要素としてもつ $m \times r$ 行列），$D(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$ である．表現(8)に対してはスカラの有理関数の性質を拡張できる．

＜既約性＞

ある $Q(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$ に対し $D_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$, $N_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times r}$ で

$$D(s) = D_1(s)Q(s), \qquad N(s) = N_1(s)Q(s)$$

となるならば，$Q(s)$ を $(D(s), N(s))$ の共通因子とよぶ．共通因子がすべて $\mathbb{R}[s]^{r \times r}$ の unit であるならば，$(D(s), N(s))$ は既約であるという．このとき表現(8)を $G(s)$ の既約分解（coprime factorization）とよぶ．

＜次数＞

$D(s)$ に右からある unit をかけることにより $D(s)U(s)$ の対角要素が各列の最高次の要素となるようにできる．このよ

うな $\hat{D}(s) = D(s)U(s)$ を column reduced な多項式行列とよぶ. $\hat{N}(s) = N(s)U(s)$ とおけば $G(s) = \hat{N}(s)\hat{D}(s)^{-1}$ と書ける. 従って以後一般性を失うことなく既約分解はすべて column reduced であると仮定する. このとき

$$\text{degree}\,(\det D(s)) = n$$

を $G(s)$ のマクミラン次数とよぶ.

〈プロパー性〉

伝達関数の定義(7)より

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} N(s)D(s)^{-1} = 0 \tag{9}$$

となる. 上の関係は $G(s)$ がスカラ有理関数の場合は $N(s)$ の次数が $D(s)$ の次数より小さいことと等価である. 行列の場合は(9)式は

$$\delta_i(N(s)) < \delta_i(D(s)),\quad i=1,\cdots,r \tag{10}$$

と等価である. ただし $\delta_i(\cdot)$ は第 i 列要素の最高次数である.

2.3　状態フィードバックによる極配置問題

既約分解(8)で代数方程式

$$\det D(s) = 0$$

の根を, $G(s)$ 又はシステム (C, A, B) の極(pole)とよぶ. 極は A の固有値と一致する. 従って閉ループ系(3)の極は

$$\det(sI - A - BK) = 0 \tag{11}$$

の根である．極はシステムの動的な特性を支配する重要な指標であり，システムの特性を望ましいものにするために，フィードバックによって閉ループ系の極を指定した値に一致させることができれば好都合である．このような背景の下に極配置問題は次のように定式化される．

＜P.1＞（状態フィードバックによる極配置問題）

行列対（A，B），$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$B \in \mathbb{R}^{n\times r}$（$n > r$）と$n$次の多項式（最高次の係数は1）$\varphi(s)$が与えられたとき

$$\det(sI - A - BK) = \varphi(s) \tag{12}$$

を満足する$K \in \mathbb{R}^{r\times n}$をもとめよ．任意の$\varphi(s)$に対して（12）を満足する$K$が存在するとき，（A，B）は(状態フィードバックにより)極配置可能であるという．

＜P1＞に対してはすでにWonhamによって完全な解が得られている［3］．

［定理1］（A，B）が極配置可能であるための必要十分条件は

$$[X, A] = 0, \quad XB = 0, \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{13}$$

を満足するXは0以外には存在しないことである．但し

$$[X, A] = XA - AX.$$

（A，B）が定理1の条件を満足するとき，システム（1）は可制御であるという．可制御性とその双対である可観測性

は線形システム理論の最も基本的な概念である.

2.4　出力フィードバックによる極配置問題

出力フィードバック(5)により元のシステムは(6)に変換される. 従って<P1>に対応して次の<P2>が定式化される.

<P2>(出力フィードバックによる極配置問題)

(C, A, B), $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ $(r < n,\ m < n)$ と n 次の多項式(最高次の次数1) $\varphi(s)$ が与えられたとき,

$$\det(sI - A - BKC) = \varphi(s) \tag{14}$$

を満足する $K \in \mathbb{R}^{r\times m}$ をもとめよ. 任意の $\varphi(s)$ に対して(14)式を満足する K が存在するとき, (C, A, B) は(出力フィードバックによって)極配置可能であるという.

(7)(8)式より

$$\det(sI - A - BKC) = \det(sI - A)^{-1}\det(I - KG(s))$$
$$= \det(D(s) - KN(s))$$

となるから, (14)式は次式と等価である.

$$\det(D(s) - KN(s)) = \varphi(s) \tag{15}$$

<P2>を少し詳しく検討しよう. 一般に

$$\det(sI - A - BKC) = s^n + \alpha_1(K)s^{n-1} + \cdots + \alpha_n(K) \tag{16}$$

と書ける．$\alpha_i(K)$ は K の要素 k_{ij} の多項式である．$\varphi(s)=s^n+\gamma_1 s^{n-1}+\cdots+\gamma_n$ とおくと (14) 式は

$$\alpha_i(K)=\gamma_i,\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{17}$$

と等価である．従って極配置可能であるためには任意の γ_i に対して，k_{ij}，$1\leq i\leq r$，$1\leq j\leq m$ を未知数とする代数方程式 (17) が少くともひとつの実根をもつことが必要である．それには未知数の数と方程式の数との関連から

$$mr \geq n \tag{18}$$

が必要であることは明らかである．それでは (18) は極配置可能性の十分条件となっているだろうか？

＜例１＞

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -6 & -5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

この場合 $n=4$，$m=r=2$ であるから条件　　は成り立つ．実際に計算を行うと (16) 式で

$$\alpha_1(K)=6,\qquad \alpha_2(K)=11-k_{11}-k_{22}$$

$$\alpha_3(K)=6-5k_{11}-k_{22},\quad \alpha_4(K)=k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}-6k_{11}$$

を得る．$\alpha_1(K)$ は定数であるから，この例は極配置可能でない．

＜例２＞

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

この場合は

$$\alpha_1(K)=2,\quad \alpha_2(K)=1+k_{11}+k_{22}$$

$$\alpha_3(K)=k_{11}+k_{22},\quad \alpha_4(K)=k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}$$

となる．$\alpha_i(K)$ の中に代数的に独立な関数は２つ（$\mathrm{tr}\,K$ と $\det K$）のみしか含まれておらず，従って２つの極を自由に選べるだけである．

＜例3＞

$$A=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

この場合は $mr=4>3=n$ で，選べるパラメータの数は制限条件 n より１つ多い．直接計算より

$$\alpha_1(K)=1-k_{12}-k_{21}$$

$$\alpha_2(K)=k_{12}k_{21}-k_{11}k_{22}-k_{11}-k_{12}-k_{21}$$

$$\alpha_3(K)=k_{12}k_{21}-k_{11}k_{22}-k_{11}-k_{21}-1$$

となる．１見自由度が豊富であるようにみえるがひとつの極を－１に指定すると $k_{22}=-1$ が一意に定まり，固有多項式は $\varphi(s)=(s+1)(s-k_{12})(s-k_{21})$ となるので残りの極は実

数になってしまう．つまり極を$\{-1, a\pm ib\}$，$b\neq 0$に配置することは不可能である．しかしεを任意の0でない実数とすれば$\{-1+\varepsilon, a\pm ib\}$を配置することは可能である．

以上3つの例題は極配置問題＜P2＞の複雑な様相の一端を示している．問題を多少でも単純化するために「極配置可能性」を次に述べる「genericな極配置可能性」に弱める．システム(C, A, B)を各要素の数を次元としてもつユークリッド空間$\mathbb{C}^{n^2+n(m+r)}$上の1点を考え，(C, A, B)に対するある性質が，$\mathbb{C}^{n^2+n(m+r)}$上のZariski開集合で成り立つとき，その性質をgenericとよぶ．またn次の多項式に関する性質に対しても同様にgenericityを導入できる．

＜定義＞（genericな極配置可能性）

(n, m, r)が与えられたとき，genericな多項式$\varphi(s)$に対する極配置可能性がgenericであれば，(n, m, r)を状態数，出力数，入力数としてもつシステムはgenericに極配置可能であるという．

genericな極配置可能性の導入によって代数幾何学の応用が可能となったが，反面これにより工学的意義が減じたことも確かである．工学システムは物理的，情報的な制約から「例外的」なものがしばしば「現実的」である．genericとい

う形で「例外的」なもののもつ特殊な構造を無視されることは残念であるが，現状ではある程度やむを得ない．

以下この問題に関する研究経過を簡単にスケッチしておこう．状態フィードバックによる極配置問題がWonhamによって基本的に解決されて後［3］，より実用的な出力フィードバックによる極配置問題が関心を集めたが［7］，70年代の前半まではほとんどみるべき成果はない．（C，A，B）が可制御可観測であれば $p = \max(r, m)$ 個の極が出力フィードバックによって任意に配置できるというDavisonら［8］，およびSridharら［9］の結果が唯一の一般的なものであった．1975年に筆者のひとりが

$$n \leq m + r - 1 \qquad (19)$$

がgenericな極配置可能性の十分条件であることを示した［4］．この場合システムに対するgenericityは含まれておらず，上で定義したgenericな極配置可能性より強い条件となっている．この結果は［5］［6］でさらに拡張されている．続いてHermannらが，複素ゲインが許されるという前提のもとで（18）がgenericな極配置可能性の十分条件であることを示した［10］．その証明には代数幾何学が用いられ，以後この論文は代数幾何のシステム理論への応用の基礎となった．この論文以後条件（18）がゲインを実数に限定した場合でもgenericな極配置

可能性の十分条件となり得るかどうかが問題として残されたが，Willems と Hesselink は最も簡単な $n=4$，$m=r=2$ の場合に否定的な結果を与えた[11]．これによりこの問題の複雑さが一挙にクローズアップされた．次にこの問題に本質的な進展を与えたのが Byrnes らの結果 [12] である．彼らは古典的な代数幾何学における交叉数の理論を用いて

$$
\begin{aligned}
&n = mr \\
&\min(m, r) = 1 \text{ or } 2 \qquad\qquad (20)\\
&\max(m, r) = 2^k - 1
\end{aligned}
$$

のとき，実数ゲインによる generic な極配置が可能なことを示した．その後特殊な (n, m, r) の組み合わせに対して，generic な極配置可能性が論じられている [12]～[16]．最近 Byrnes と Stevens は "Fox Category" とよばれる概念を用いて極配置可能性に関する優れた十分条件を導いているが [17]，完全な証明はまだ与えられていない．

以下 Hermann らによる複素ゲインを許した場合の極配置可能性と，Byrnes らの結果 (20) について述べる．

3. 複素ゲインによる generic な極配置可能性

3.1 Dominant Morphism Theorem

ある空間 X から $\mathbb{C}^n$ への写像

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

を考える．もし $\varphi(X)$ が $\mathbb{C}^n$ の Zariski 開集合を含んでいれば，φ は almost onto であるという．

$\mathbb{C}^n$ 上の有理関数の集合を $\mathbb{C}(x)^n$ であらわす．$\mathbb{C}(x)^n$ の m-tuple $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_m(x))$ は，有理写像

$$\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

を定義する．φ の定義域は $\varphi_i(x) = q_i(x)/p_i(x)$ としたとき，$X = \mathbb{C}^n - \bigcup_{i=1}^{m} \{x \mid p_i(x) = 0\}$ である．φ の双対座標

$$\varphi^* : \mathbb{C}[x]^m \longrightarrow \mathbb{C}(x)^n$$

は，$p(x) = p(x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathbb{C}[x]^m$（$\mathbb{C}^m$ 上の多項式の集合）に対し

$$\varphi^*(p(x)) = p(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)) \in \mathbb{C}(x)^n$$

で定義される．

［定理２］（Dominant Morphism Theorem）

有理写像 φ が almost onto であるための必要十分条件は，φ^* が one-one となることである．

次に $x_0 \in \mathbb{C}^n$ に対し線形写像

$$d\varphi(x_0) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

を次のように定義する．

$$d\varphi(x_0)(x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x_0 + tx)\Big|_{t=0}. \qquad (21)$$

$d\varphi(x_0)$ は x_0 における φ の Fréchet 微分である.

［補題１］

ある x_0 で $d\varphi(x_0)$ が onto, すなわち $d\varphi(x_0)$ を行列表現したときの rank が m であれば, φ^* は one-one である.

この補題は陰関数定理において有理写像の特殊性を用いたものである.

3．2　極配置問題への応用

$T \in GL(\mathbb{C}^n)$ に対して $\det(sI - A - BKC) = \det[sI - T^{-1}(A + BKC)T]$ である. そこで写像

$$\varphi : \mathbb{C}^{r \times m} \times GL(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^{n \times n}$$

を次式で定義する.

$$\varphi(K, T) = T^{-1}(A + BKC)T. \tag{22}$$

K, T の要素の数は $n^2 + mr$ であるから, φ は $\mathbb{C}^{n^2+mr}$ から $\mathbb{C}^{n^2}$ への有理写像（実際は $\det T = 0$ となる Zariski 閉集合を定義域から除く必要がある）とみなすことができる. もし φ が almost onto ならば, すでに述べたことより $A + BKC$ の固有値が generic に指定した値と一致するような K が, generic な（C, A, B）に対して存在し, 従って generic な極配置問題は可解である. 以下 φ が almost onto となるための十分条件を導く.

［補題２］

$$[X, A]=0, \quad CXB=0 \tag{23}$$

を満足する $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ が $X=0$ 以外に存在しないならば，（22）式の φ は almost onto である.

（証明）　$x_0=(K_0, T_0)$，$x=(V, W)$ として $\psi(x)=d\varphi(x_0)(x)$ を（21）式に従って忠実に計算すると

$$\psi(x)=\psi(V, W)=[A_0, T_0^{-1}W]+B_0VC_0 \tag{24}$$

を得る. ただし $A_0=T_0^{-1}(A+BK_0C)T_0$, $B_0=T_0^{-1}B$, $C_0=CT_0$ である. もし $\psi(V, W)$ が onto でなければ

$$\langle X^T, \psi(V, W)\rangle=0 \tag{25}$$

が任意の（V, W）に対して成立つような $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$（$X \neq 0$）が存在する. ただし $\langle\alpha, \beta\rangle=\mathrm{tr}\,\alpha^T\beta$. （24）式より

$$\begin{aligned}\langle X^T, \psi(V, W)\rangle &= \mathrm{tr}\,(X[A_0, T_0^{-1}W]+XB_0VC_0)\\ &= \mathrm{tr}\,([X, A_0]T_0^{-1}V)+\mathrm{tr}\,(C_0XB_0W)\end{aligned}$$

であるから，（25）式が任意の（V, W）で成り立つには

$$[X, A_0]=0, \quad C_0XB_0=0 \tag{26}$$

が満足されねばならない. 仮定（23）より $K_0=0$, $T_0=I$ に対して（26）は $X=0$ を意味するから，$x_0=(0, I)$ に対しては $d\varphi(x_0)$ は onto である. 補題1より補題2の主張が導かれる. □

条件（23）は定理1の条件（13）を C の分だけ強めたものになっており，そこに状態フィードバックと出力フィードバ

ックのちがいが反映されている.

補題2の条件をgenericに満足するための(n, m, r)に対する十分条件が

$$mr \geq n \tag{27}$$

であることを示そう. (C, A, B)の組を$\mathbb{C}^{n^2+n(r+m)}$の点と考え, その部分集合S_1を

$$S_1 = \{(C, A, B) : A \text{ cyclic かつ } {}^{\exists}X \neq 0,\ [X, A] = 0,\ CXB = 0\}$$

で定義する.

[補題3] 条件(27)の下でS_1は$\mathbb{C}^{n^2+n(r+m)}$のプロパーなZariski閉集合である.

(証明) Aがcyclicで$[X, A] = 0$ならば

$$X = a_1 I + a_2 A + \cdots + a_n A^{n-1}, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

とあらわされる. 条件$CXB = 0$はmr個の拘束条件をa_iに課すから, (27)が成り立つとき$CXB = 0$はa_iをすべて消去した(C, A, B)の要素からなる恒等的に0でない1つ以上の代数的関係を与える. □

部分集合

$$S_2 = \{(C, A, B) : A \text{ not cyclic}\}$$

は明らかにproperなZariski閉集合である. $\mathbb{C}^{n^2+n(r+m)} - \{S_1 \cup S_2\}$はZariski開集合であり, その上で補題2が満足さ

れるから，結局次の結果を得る[10]．

［定理２］

ゲインKの要素に複素数を許せば，（27）はgenericな極配置が可能であるための十分条件（従って必要十分条件）である．

4. 実数ゲインによるgenericな極配置可能性

4.1 Grassmann多様体と伝達関数行列

この章では文献[12]にもとづいて実数ゲインによるgenericな極配置問題を考察する．

$\mathbb{C}^n$上のk次元部分空間の集合に対して多様体の構造を入れることができる．これをGrassmann多様体とよび，Grass(k, n)とあらわす．たとえばGrass$(1, 2)$は2次元ユークリッド空間内の原点を通る直線の集合であるが，これはよく知られた1次元の射影空間$\mathbb{P}^1$である．

伝達関数行列の既約分解

$$G(s) = N(s)D(s)^{-1}$$

を用いて写像

$$\mathbb{G} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathrm{Grass}(r, m+r) \qquad (28)$$

を次のように定義する．

$$\mathbb{G}_T(s) = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix} \quad s \neq \infty \tag{29}$$

$$\mathbb{G}_T(\infty) = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \tag{30}$$

これにより $G(s)$ を Grass $(r,\ m+r)$ 上の曲線（curve）とみなすことができる．次に Grass $(m,\ r+m)$ 上の点 $\mathbb{U} = \mathrm{Im}\, U$, $U \in \mathbb{C}^{(m+r)\times m}$ に対して

$$\sigma(\mathbb{U}) = \{ W :\ W \cap U \neq 0,\ \ W \in \mathbb{C}^{(m+r)\times r} \} \tag{31}$$

とおく．$\sigma(\mathbb{U})$ は $\mathbb{C}^{m+r}$ 上の m 次元部分空間 $\mathrm{Im}\, U$ とまじわる $\mathbb{C}^{m+r}$ 上の r 次元部分空間の集合で，Grass $(r,\ m+r)$ 上の超曲面となる．すなわち

$$\det [\, U \quad W \,] = 0$$

となる $W \in \mathbb{C}^{(m+r)\times r}$ の集合と考えることができる．$\sigma(\mathbb{U})$ を $\mathbb{U}$ に対する Schubert 超曲面とよぶ．

$\mathbb{G}_T(s)$ と $\sigma(\mathbb{U})$ が交わるならば，すなわち $\mathbb{G}_T(s)$ と $\sigma(\mathbb{U})$ が Grass $(r,\ m+r)$ の点として一致すれば

$$\det \begin{bmatrix} U_1 & N(s) \\ U_2 & D(s) \end{bmatrix} = 0 \tag{31}$$

となる．もし U_1 が正則であれば，$K = U_2 U_1^{-1}$ とおくと

$$\det (D(s) - K N(s)) = 0$$

となる．従って（15）式より s は K をゲインとするフィード

バックシステムの極となる．これより極配置問題は次のように定式化できる．

「$s_1, s_2, \cdots, s_n$ が与えられたとき，$\mathbb{G}_T(s_1), \mathbb{G}_T(s_2), \cdots,$ $\mathbb{G}_T(s_n)$ を含み

$$\det U_1 \neq 0 \tag{32}$$

を満足するSchubert超曲面をもとめよ．」

この問題に対してはSchubertによる次の古典的な結果がある．[18]．

［補題4］

$\mathrm{Grass}(r, m+r)$ 上の与えられた mr 個の点を含むSchubert超曲面の数はgeneric に以下の数で与えられる．

$$d(m, r) = \frac{1!\,2!\cdots(m-1)!\,1!\,2!\cdots(r-1)!\,(mr)!}{1!\,2!\quad\cdots\quad(m+r-1)!} \tag{33}$$

この結果は直感的には次のように考えることができる．もとめるSchubert超曲面を $\sigma(\mathbb{U})$ とおき，$\mathbb{U} = \mathrm{Im}\, U$ の基底を正規化して

$$U = \mathrm{Im}\begin{array}{c} \begin{bmatrix} I \\ U_2 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} m \\ r \end{array}$$

とおく．与えられた mr 個の点 $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \cdots, \mathbb{V}_{mr}$ を

$$\mathbb{V}_i = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix}\begin{array}{c} m \\ r \end{array}$$

とおくと

$$\det \begin{bmatrix} I & X_i \\ U_2 & Y_i \end{bmatrix} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, mr \tag{34}$$

が満足されねばならない．（34）式は U_2 の mr 個の要素に対して mr 個の制限条件を課す代数方程式であるから，解の数は高々有限個であり，その個数が（33）式で与えられる．

$n = mr$ ならば補題4の結果は条件（32）さえ満足されれば与えられた極配置を達成するフィードバックゲインの数を示している．条件（32）を考えるため次の定義を行う．

〈定義〉

$G_T(s)$ に対して Schubert 超曲面 $\sigma(\mathbb{U})$ が存在し，$G(s)$ が $\sigma(\mathbb{U})$ に含まれるとき，$G(s)$ は縮退している（degenerate）という．

$G(s)$ が縮退していることと

$$\det \begin{bmatrix} U_1 & N(s) \\ U_2 & D(s) \end{bmatrix} \equiv 0 \tag{35}$$

となる $U_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$，$U_2 \in \mathbb{C}^{r\times m}$ が存在することは等価である．代数多様体の次元に関する性質［19］を用いると次の結果が成り立つ．

［補題5］

$mr \leq n$ であれば，$G(s)$ は generic に縮退していない．

$mr > n$ ならば任意の$G(s)$は縮退している.

さらに次の結果が成り立つ.

[補題6]

縮退していない$G(s)$に対し, 任意の$\sigma(\mathbb{U})$は$\mathbb{G}(s)$と丁度n個の点$s_1, s_2, \cdots, s_n$でまじわる. s_iがすべて有限ならば$\mathbb{U}$は条件(32)を満足する.

(証明) 2.2節で述べた既約分解の性質のうち<次数>の項と(35)式から, $G(s)$が縮退していなければ

$$\det\begin{bmatrix} U_1 & N(s) \\ U_2 & D(s) \end{bmatrix} = \det U_1 \cdot s^n + (s^{n-1}\text{以下})$$

と書ける. 右辺の零点がすべて有限であれば$\det U_1 \neq 0$でなければならない. □

いま$n = mr$と仮定しよう. 有限の$s_1, s_2, \cdots, s_n$を任意に選べば補題4より$\mathbb{G}(s_1), \mathbb{G}(s_2), \cdots, \mathbb{G}(s_n)$を通るSchubert超曲面はgenericに$d(m, r)$個存在する. $G(s)$が縮退していなければ$d(m, r)$個の超曲面は補題6よりすべてフィードバックゲインに対応している. 補題5を用いて次の結果を得る.

[定理3]

$n = mr$ならば, 複素数のゲインを許すと任意の異った極を配置するフィードバックゲインはgenericに$d(m, r)$個

存在する．

上の結果は定理2をさらに強め，可能なフィードバックゲインの個数を具体的に与えたものである．Kが与えられた極を配置するならば，極の複素対称性より$\bar{K}$も同じ極を配置する．従ってもし$d(m,r)$が奇数であれば必ず実数のKが少くともひとつは存在する．$d(m,r)$が奇数となるのは

$$\begin{aligned} &\min(m,r)=1 \quad \text{又は} \quad \min(m,r)=2 \text{ かつ} \\ &\max(m,r)=2^k-1 \end{aligned} \tag{36}$$

のときに限られる．従って次の結果を得る．

［系1］　$mr=n$のとき，(36)式を満たす(n,m,r)に対して実数ゲインによるgenericな極配置が可能である．

4.2　Plücker imbeddingによる固有方程式の表現

Grassmann多様体に具体的な座標系を導入することによって極配置問題をパラメトリックな形式で統一的に表現することができる．いま$\mathcal{W}\in Grass(r,m+r)$，$\mathcal{W}=\mathrm{Im}\,W$，$W\in\mathbb{C}^{(m+r)\times r}$とする．行列$W$の$(j_1,j_2,\cdots,j_r)$行に対する小行列式を$\pi_{j_1j_2\cdots j_r}(W)$と書く．$j_i$の選び方は

$$N=\binom{m+r}{r} \tag{37}$$

通りあるから，$\mathcal{W}$に対してN個の数の組

$$c(\mathcal{W})=(\pi_{j_1j_2\cdots j_r}(W))_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_r\le m+r}$$

が決る. $c(W)$ をWの Plücker 座標とよぶ. Plücker 座標の導入によってGrass $(r, m+r)$ は $N-1$ 次元の射影空間 $\mathbb{P}^{N-1}$ に埋めこまれたことになる.

Plücker 座標は次の性質をもつ[20].

1) $\pi_{j_1 j_2 \cdots j_r}$ の少くとも1つは0でない.

2) $\pi_{j_1 j_2 \cdots j_r}$ は添字に関して交代的である.

3) $(r-1)$ 個の添字の組 $(i_1, i_2, \cdots, i_{r-1})$ と $(r+1)$ 個の添字の組 $(j_1, j_2, \cdots, j_{r+1})$ が与えられた時,

$$\sum_{\mu=1}^{r+1} (-1)^{\mu} \pi_{i_1 \cdots i_{r-1} j_\mu} \pi_{j_1 \cdots \hat{j}_\mu \cdots j_{r+1}} = 0 \qquad (37')$$

ただし記号 $\hat{j}_\mu$ は添字 j_μ を除くことを意味する.

1) 2) は小行列式の性質からほとんど自明であり, 3) は Gauss 消去法の性質より導くことができる.

逆に上の 1)～3) を満足する数の組 $\pi_{j_1 \cdots j_r}$ はある $W \in$ Grass $(r, m+r)$ の Plücker 座標となることが分っている[20].

いま

$$W = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} I \\ -K^T \end{bmatrix}, \qquad K \in \mathbb{C}^{r \times m}$$

の Plücker 座標を $\pi_{j_1 j_2 \cdots j_r}(K)$, また

$$\mathbb{C}_T(s) = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \qquad (38)$$

の Plücker 座標を $\pi_{j_1\cdots j_r}(G(s))$ とおく．便宜上（38）は（29）と D(s)，N(s) の順序を逆にしてある．固有方程式

$$\varphi(s) = \det(D(s) - KN(s))$$
$$= \det [I \quad -K] \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$$

は Binet-Cauchy の定理より

$$\varphi(s) = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le r+m} \pi_{j_1\cdots j_r}(K)\, \pi_{j_1\cdots j_r}(G(s)) \qquad (39)$$

と表わされる．$\pi_{j_1\cdots j_r}(K)$ は（37′）式を満足しなければならない．従って極配置問題は与えられた $\varphi(s)$ と $G(s)$ に対して，（39）（37′）を満足する $\pi_{j_1\cdots j_r}$ をもとめる問題となる．$\pi_{j_1\cdots j_r}$ がもとまれば Plücker 座標の性質より K が具体的に計算できる．

例として $(n, m, r) = (4, 2, 2)$ に対して関係（37′）（39）を具体的にもとめよう．$N = 6$ であるから（Plücker 座標は（π_{12}, π_{13}, π_{14}, π_{23}, π_{24}, π_{34}）である．（37′）式は

$$\pi_{12}\pi_{34} - \pi_{13}\pi_{24} + \pi_{14}\pi_{23} = 0 \qquad (40)$$

となる．$\pi_{12} = 1$, $\pi_{13} = -k_{21}$, $\pi_{14} = -k_{22}$, $\pi_{23} = k_{11}$, $\pi_{24} = k_{12}$, $\pi_{34} = k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}$ であるから上の関係は det K の関係に他ならない．$G(s)$ に関しては同様に Plücker 座標を計算し（39）に代入すると最終的に次のような関係を得る．

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{13} \\ \pi_{14} \\ \pi_{23} \\ \pi_{24} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{15} \\ l_{25} \\ l_{35} \\ l_{45} \end{bmatrix} (\pi_{13}\pi_{24} - \pi_{14}\pi_{23})$$

$$= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

l_{ij} はシステム(C, A, B)から決る定数で，q_i は指定すべき極からきまる定数である．上式を未知数 π_{13}, π_{14}, π_{23}, π_{24} に関して解けば，もとめるフィードバックKが得られる．

5. むすび

極配置問題を中心に代数幾何学のシステム理論への応用の現状をスケッチした．極配置問題以外にも，システム理論における代数幾何学の有効性は確認されている．たとえば正準形による線形システムの分類問題[21]，マクミラン次数やクロネッカ指数の代数幾何学的意味づけ[22]などがあげられよう．これらについて述べることができなかったのは残念である．

参 考 文 献

[1] R. E. Kalman, On the general theory of control systems, Proc. 1st IFAC Congress, Moscow (1960)

[2] 木村, 動的システムの理論, 産業図書 (1974)

[3] W. M. Wonham, On pole assignment in multi-input controllable linear systems, IEEE Trans. Auto, Control, vol.AC-12, pp.660-665 (1967)

[4] H. Kimura, Pole assignment by gain output feedback, IEEE Trans. Auto. Control, vol.AC-20, pp.509-516 (1975)

[5] H. Kimura, A further result on the problem of pole assignment by output feedback, IEEE Trans. Auto. Control, vol.AC-22, pp.458-463 (1977)

[6] H. Kimura, On pole assignment by output feedback, Int. J. Control, vol.28, pp.11-22 (1978)

[7] E. J. Davison, On pole assignment in linear systems with incomplete state feedback, IEEE Trans. Auto. Control, vol.AC-15, pp.348-351 (1970)

[8] E. J. Davison and R. Chatterjee, A note on pole assignment in linear system with incomplete state feedback, IEEE Trans. Auto. Control, vol.AC-16, pp.98-99 (1971)

[9] B. Sridhar and D. P. Lindorff, Pole placement with constant gain output feedback, Int. J. Control, vol.18, pp.993-1003 (1973)

[10] R. Hermann and C. F. Martin, Applications of algebraic geometry to system theory-Part I, IEEE Trans. Auto. Control, vol.AC-22, pp.19-25 (1977)

[11] J. C. Willems and W. H. Hesselink, Generic properties of the pole placement problem, Proc. IFAC Congress, Helsinki (1978)

[12] R. W. Brockett and C. I. Byrnes, Multivariable Nyqiust criteria, root loci. and pole-placement: A geometric viewpoint, IEEE Trans. Auto. Control, vol.26, pp.271-284 (1981)

[13] C. I. Byrnes, Private communication, Oct. 1980.

[14] 貝塚, 出力フィードバックによる極配置 (I), 第20回計測自動制御学会学術講演会予稿集, pp.43-44 (1981)

[15] 貝塚, 出力フィードバックによる極配置 (II), 第4回DSTシンポジウム資料, pp. 17-20 (1981)

[16] A. S. Morse, W. A. Wolovich and B. D. O. Anderson, Generic pole assignment: Preliminary results, Proc. CDC, San Diego (1981)

[17] C. I. Byrnes and P. K. Stevens, Pole placement by static and dynamic output feedback, Proc. CDC, Florida, pp.130-133 (1982)

[18] S. L. Kleiman, Problem 15, rigorous foundations of Schubert's enumerative calculus, Proc. Symposia Pure Math., vol.28, American Math. Soc. (1976)

[19] I. R. Shaferevich, Basic Algebraic Geometry, Springer (1974)

[20] 中野, 代数幾何学入門, p.86, 共立出版 (1969)

[21] R. Herman and C. F. Martin, "Applications of algebraic geometry to system theory: The McMillan degree and Kronecker indices as topological and holomorphic invariants, SIAM J. Control, vol.16, pp.743-755 (1978)

[22] M. Hazewinkel, Moduli and canonical forms for linear dynamical systems II: The topological case, Math. Systems Theory, vol.10, pp.363-385 (1977)