数理解析研究所講究録
485巻 1983年 145-158

放物形偏微分方程式の安定化：
境界観測，境界制御

熊本大学工学部　南部隆夫　(Takao Nambu)

1．はじめに　不安定なモードをもつ放物形偏微分方程式の安定化には，観測器，制御器の配置に対応して各種の機構が提案されている。観測器，制御器がともに境界上に配置されている場合，観測器からの出力を直接，制御器を通じて入力して安定化を実現することは困難と思われる。ここでは，有限次元の補助動的システムを導入して安定化を試みる。筆者は同様な問題を考案したことがあるが，ここでは以前よりはるかにゆるい問題設定のもとで，システムを安定化する新しいタイプの補助システムを提案し，それが適当な条件のもとで設計可能であることを示す。

容易に示されることであるが，ここで得られる結果は統一的で抽象的な形に拡張することができる。したがって，かなり一般の，偏微分方程式（系）により記述される制御系に対して適用可能であるといえる。

2．問題の記述　Ω を $\mathbb{R}^m$ における有界な連結領域とし，Ω の境界 Γ は有限個の $(m-1)$ 次元 C^∞ 超曲面より成るとする。

Ω における2階の微分作用素 $\mathscr{L}$ を

$$\mathscr{L}u = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu,$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant m$$

により与え，一様楕円性を仮定する：

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \delta|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \Omega \quad (\delta > 0).$$

Γ における微分作用素を

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_L} + \sigma(\xi)u, \quad \xi \in \Gamma$$

とする。ここで $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ を ξ における outward normal vector とするとき

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_L} = \sum_{i,j} a_{ij}(\xi)\nu_j(\xi)\frac{\partial u}{\partial x_i}(\xi)$$

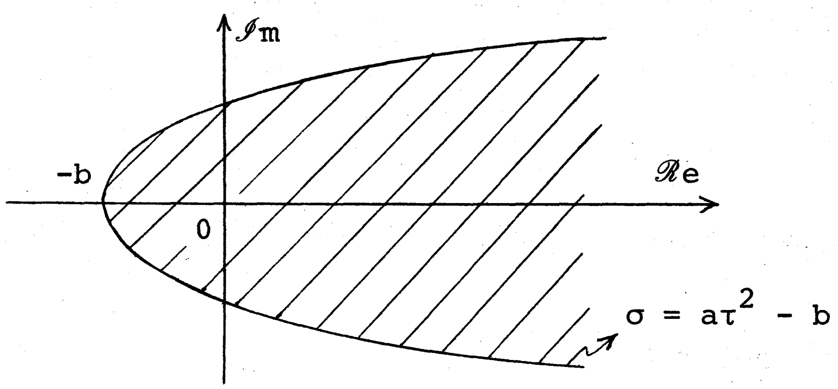
である。上記の作用素に現われる係数はすべて実数値関数であり，必要なまでの滑らかさをもっていると仮定する。

$L^2(\Omega)$ における線形作用素 L を

$$Lu = \mathscr{L}u, \quad u \in \mathscr{D}(L),$$

$$\mathscr{D}(L) = \{u \in H^2(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial \nu_L} + \sigma(\xi)u = 0\}$$

と定義する。よく知られているように L の resolvent は compact であり，したがってその spectrum $\sigma(L)$ は固有値のみから成る。また，$\sigma(L)$ はある放物線の内部にある：



我々が考察する制御系はつぎのように記述される：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\mathscr{L}u, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_L} + \sigma(\xi)u = \displaystyle\sum_{k=1}^{M} f_k(t)h_k(\xi), \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

ここで $f_k(t)$ は制御入力，$h_k(\xi)$ は制御器を表わす。観測は境界上で行なわれ，

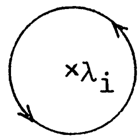
$$(u(t,\cdot),\ w_k)_\Gamma, \qquad 1 \leqslant k \leqslant N \tag{2}$$

で与えられる。ただし，$(\ ,\ )_\Gamma$ は $L^2(\Gamma)$ における内積を示す。

我々の問題はつぎのように書かれる： h_k, w_k が与えられたとき， $f_k(t)$ を (2) の適当なフィードバックとして選ぶことにより，(1) の解の安定性（指数関数的減衰）を保証すること。

σ(L) に対する若干の注意　$\lambda_i \in \sigma(L)$ ならば， $\overline{\lambda_i} \in \sigma(L)$ かつ $\in \sigma(L^*)$ 。 $\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{im_i}$ を λ_i に対応する広義固有空間の一組の basis とすれば， $\overline{\varphi_{i1}}, \dots, \overline{\varphi_{im_i}}$ は $\overline{\lambda_i}$ に対応する広義固有空間の basis になる。

$$P_{\lambda_i} = \frac{1}{2\pi i}\oint (\lambda - L)^{-1} d\lambda$$



; λ_i に対する L の広義固有空間への projection operator とすれば， $P^*_{\lambda_i}$ は L^* の固有値 $\overline{\lambda_i}$ に対応する広義固有空間への projection operator となり，とくに $\dim P_{\lambda_i} L^2(\Omega) = \dim P^*_{\lambda_i} L^2(\Omega)$. $P^*_{\lambda_i} L^2(\Omega)$ の一組の basis を $\psi_{i1}, \dots, \psi_{im_i}$ とおくと，つぎのような図式ができる：

$\lambda_i \nearrow P_{\lambda_i} L^2(\Omega)$; spanned by $\{\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{im_i}\}$ (L)

$\lambda_i \searrow P^*_{\overline{\lambda_i}} L^2(\Omega)$; spanned by $\{\overline{\psi_{i1}}, \dots, \overline{\psi_{im_i}}\}$ (L^*)

$\vdots$

$\overline{\lambda_i} \nearrow P^*_{\lambda_i} L^2(\Omega)$; spanned by $\{\psi_{i1}, \dots, \psi_{im_i}\}$ (L^*)

$\overline{\lambda_i} \searrow P_{\overline{\lambda_i}} L^2(\Omega)$; spanned by $\{\overline{\varphi_{i1}}, \dots, \overline{\varphi_{im_i}}\}$ (L)

とくに λ_i が real valued である場合，φ_{ij}, ψ_{ij} も real valued となるように選べる。

定数 $c > 0$ を十分大きく選び，$L_c = L + c$ とおく。
$h_k \in C^2(\Gamma)$ とすると

$$\exists 1\ \psi_k \in H^2(\Omega); \quad (\mathscr{L} + c)\psi_k = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \nu_L}\psi_k + \sigma(\xi)\psi_k = h_k.$$

よく知られているように $H^{3/2-2\varepsilon}(\Omega) = \mathscr{D}(L_c^{3/4-\varepsilon})$ for $\forall \varepsilon > 0$ であることに注意する。

$\alpha = 2(1/4 + \varepsilon)$, $x(t) = L_c^{-\alpha/2} u(t)$ とおくと，(1) は $L^2(\Omega)$ における方程式

$$\begin{cases} x'(t) = -Lx(t) + \sum_{k=1}^{M} f_k(t)\, L_c^{3/4-\varepsilon}\psi_k, \\ x(0) = x_0 = L_c^{-\alpha/2} u_0 \end{cases} \tag{3}$$

にうつされる。観測値 (2) については，$w_k \in C^2(\Gamma)$ とすると

$$\exists 1\ g_k \in H^2(\Omega); \quad (\mathscr{L}^* + c)g_k = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \nu_L} g_k + \tilde{\sigma}(\xi)g_k = w_k.$$

ここで，$\mathscr{L}^*$ は formal adjoint of $\mathscr{L}$ であり，$\tilde{\sigma}(\xi)$ は

$$\tilde{\alpha}(\xi) = \alpha(\xi) + \sum_i b_i(\xi)\,\nu_i(\xi)$$

により与えられる。この g_k を用いれば，(2) は一般化された

Green の公式により

$$
\begin{aligned}
(u(t,\cdot),\ w_k)_\Gamma &= (L_c^{1/4+\varepsilon}u,\ L_c^{*\,3/4-\varepsilon}g_k) \\
&= (L_c^{\alpha}x,\ L_c^{*\,3/4-\varepsilon}g_k), \quad 1 \leqslant k \leqslant N
\end{aligned}
\tag{4}
$$

と変形される。

3. 補助動的システム (オブザーバ)

H_0 を無限次元複素 Hilbert 空間とし，A を稠密な定義域 $\mathscr{D}(A)$ をもつ正定値自己共役作用素とする。$\sigma(A)$ は固有値のみから成ると仮定する：

$$
\begin{cases}
0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n < \cdots \longrightarrow \infty, \\
A\zeta_{ij} = \mu_i \zeta_{ij}, \quad i \geqslant 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant n_i, \\
\{\zeta_{ij}\};\ \text{a complete orthonormal system in } H_0.
\end{cases}
$$

$0 < a < 1$ とし，$\mathscr{D}(\sqrt{A}) \times H_0$ における作用素

$$
B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -A & -2a\sqrt{A} \end{bmatrix}, \quad \mathscr{D}(B) = \mathscr{D}(A) \times \mathscr{D}(\sqrt{A})
$$

を考える。容易にわかるように

$$
\sigma(B) = \{\sqrt{\mu_i}\,\omega^{\pm};\quad i \geqslant 1\},
$$

$$
\omega^{\pm} = -a \pm \sqrt{1-a^2}\, i,
$$

$$B\eta_{ij}^{\pm} = \sqrt{\mu_i}\,\omega^{\pm}\,\eta_{ij}^{\pm}, \qquad \eta_{ij}^{\pm} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_i}}\begin{bmatrix} \zeta_{ij} \\ \sqrt{\mu_i}\,\omega^{\pm}\,\zeta_{ij} \end{bmatrix}$$

となる。 $\{\eta_{ij}^{+}\}$, $\{\eta_{ij}^{-}\}$ はそれぞれ $H = \mathscr{D}(\sqrt{A}) \times H_0$ における正規直交系である。

補助動的システムをまず無限次元系として構成し，それは H における方程式

$$\begin{cases} v'(t) = Bv(t) + \sum_{k=1}^{N} (L_c^{\alpha} x(t),\ L_c^{*\,3/4-\varepsilon} g_k)\,\xi_k + \sum_{k=1}^{M} f_k(t)\,\alpha_k, \\ v(0) = v_0 \end{cases} \tag{5}$$

として与えられる。 (1), (5) に現われる $f_k(t)$ を

$$f_k(t) = (v(t),\ \rho_k)_H, \qquad 1 \leqslant k \leqslant M \tag{6}$$

とすることにより閉ループ制御系が構成される。作用素 B が解析半群 e^{tB} を生成することに注意すれば，方程式系 (3), (5), (6) の係数作用素は $t > 0$ で $L^2(\Omega) \times H$ における解析半群を生成する。

<u>作用素方程式 $XL + BX = -C$.</u> 作用素 A か定数 a を適当に調節することにより

$$\sigma(-L) \cap \sigma(B) = \phi .$$

と仮定できる。作用素 C を

$$Cu = \sum_{k=1}^{N} (L_c^{\alpha} u, L_c^{*\,3/4-\varepsilon} g_k)\xi_k, \quad u \in \mathscr{D}(L_c^{\alpha})$$

により定義し, $\mathscr{D}(L_c^{\alpha})$ 上の方程式 $XL + BX = -C$ を考える。ここで ξ_k は一般に

$$\xi_k = \sum_{i,j} \xi_{ij}^{k+} \eta_{ij}^{+} + \sum_{i,j} \xi_{ij}^{k-} \eta_{ij}^{-}$$

と展開されるが，ここではとくに $\overline{\xi_{ij}^{k+}} = \xi_{ij}^{k-}$ と選ぶ。以上の仮定のもとで

Proposition 3.1. 作用素方程式の解 $X \in \mathscr{L}(L^2(\Omega); H)$ が一意に存在する。

H の部分集合 $\hat{H}$ を

$$\hat{H} = \{h = \sum_{i,j} a_{ij}^{+} \eta_{ij}^{+} + \sum_{i,j} a_{ij}^{-} \eta_{ij}^{-}; \quad \overline{a_{ij}^{+}} = a_{ij}^{-}\}$$

とおけば, $\hat{H}$ は実 Hilbert 空間になる。 $L^2(\Omega)$ の部分空間で実数値関数から成るものを $L_R^2(\Omega)$ とすれば，とくに $X \in \mathscr{L}(L_R^2(\Omega); \hat{H})$ となることがわかる。

任意の $\varkappa > 0$ に対して $\mathscr{R}e\, \sigma(-L) > -\varkappa$ となる $\sigma(-L)$ の部分を正確に書けば

$$-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_{K_1}, \quad -\overline{\lambda_1}, \ldots, -\overline{\lambda_{K_1}}; \quad \text{complex conjugate},$$

$$-\lambda_{r1},\ -\lambda_{r2},\ \ldots,\ -\lambda_{rK_2}\ ;\quad \text{real}$$

と並べることになる。これらの固有値に対応する射影作用素を P_K とすれば，とくに $P_K \in \mathscr{L}(L^2_R(\Omega);\ L^2_R(\Omega))$ となる。以下，誤解のおそれがないときは，$-L$ の固有値を単に $-\lambda_1,\ -\lambda_2,\ \ldots,\ -\lambda_n,\ \ldots$ と書く。行列 W_i, Ξ_i を

$$W_i = \left[(w_k,\ \varphi_{ij})_\Gamma\ ;\ \begin{array}{l} k \downarrow 1,\ldots,N \\ j \rightarrow 1,\ldots,m_i \end{array} \right], \qquad i \geqslant 1,$$

$$\Xi_i = \left[\xi^{k+}_{ij}\ ;\ \begin{array}{l} k \downarrow 1,\ldots,N \\ j \rightarrow 1,\ldots,n_i \end{array} \right], \qquad i \geqslant 1$$

と定める。$\eta > 1$ を

$$\eta = 1 + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$$

と与える。以後，作用素 A の固有値 μ_n は

$$\sqrt{\mu_n} \leqslant \text{const.}\, n^\gamma, \qquad n \geqslant 1, \quad 0 < \gamma < \eta \tag{7}$$

を満たしていると仮定する。

4．制御系の安定化

作用素 $-L$ の $P_K L^2(\Omega)$ への制限に対応する行列をもとにして出来るある実行列を $-\Lambda$ とする。$(h_k, \psi_{ij})_\Gamma$; $i \leqslant 2K_1 + K_2$ から出来るある実行列を U とする。U は正則なある行列 Ψ が存在して，つぎのように書かれる：

$$U = \Psi \left[(h_k, \psi_{ij})_\Gamma ; \quad \begin{matrix} k \rightarrow \\ i,j \downarrow \end{matrix} \right].$$

Theorem 4.1. $-\Lambda$, U が可制御対であれば，適当な実数値関数 $y_1, \ldots, y_M \in P_K^* L_R^2(\Omega)$ が存在して，評価

$$\left\| \exp t\left\{-L + \sum_{k=1}^{M} (\cdot, y_k) L_c^{3/4-\varepsilon} \psi_k\right\} \right\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega))}$$
$$\leqslant \text{const.}(1 + t^m)\, e^{-\varkappa t}, \quad t \geqslant 0$$

が成り立つ。($m \geqslant 0$; an integer)

制御系 (3), (5), (6) をまとめて

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \mathscr{M}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

と書く。$\varkappa$ を $\varkappa > a\sqrt{\mu_1}$ となるように選んでおく。このとき

Theorem 4.2. $h_1, \ldots, h_M$ が，$-\Lambda$, U が可制御対であるように選ばれているとする。行列 W_i, Ξ_i が

$$\begin{cases} \text{rank } W_i = m_i, & 1 \leqslant i \leqslant 2K_1 + K_2, \\ \text{rank } \Xi_i = N, & i \geqslant 1 \end{cases} \tag{9}$$

を満たすと仮定する。このとき，α_k，$\rho_k \in \hat{H}$，$1 \leqslant k \leqslant M$ が存在して

$$\|e^{t\mathscr{M}}\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega)\times H)} \leqslant \text{const.}\ e^{-a\sqrt{\mu_1}t}, \quad t \geqslant 0$$

が成り立つ。ここで，$\mathscr{L}(L^2(\Omega) \times H)$ を $\mathscr{L}(L_R^2(\Omega) \times \hat{H})$ と変えてもよい。

Theorem 4.2 で得られた補助システムは無限次元系である。最終的には，有限次元の補助システムを構成したい。 Theorem 4.2 における ρ_k は有限個の $\eta_{ij}^{\pm}$ の線形結合，即ち

$$\rho_k = \sum_{i,j(i\leqslant I)} \rho_{ij}^k \eta_{ij}^+ + \sum_{i,j(i\leqslant I)} \overline{\rho_{ij}^k}\, \eta_{ij}^-, \quad 1 \leqslant k \leqslant M$$

と選ぶことができることに注意する。 $S \geqslant I$ とし，作用素 B の固有値 $\sqrt{\mu_i}\omega^{\pm}$, $i \leqslant S$ の固有空間に対応する射影作用素を $\tilde{P}_S$ と表わす。 $L^2(\Omega) \times H$ における作用素 $\mathscr{Q}$ を

$$\mathscr{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}, \quad Pv = \sum_{k=1}^{M} (v, \rho_k)_H (\tilde{P}_S - 1)\alpha_k$$

とし，作用素 $\mathscr{M}$ に摂動 $\mathscr{Q}$ を加える。 S を十分大きく選ぶこと

により，　$0 < \varkappa' < a\sqrt{\mu_1}$　なる任意の $\varkappa'$ に対して

$$\|e^{t(\mathscr{M}+\mathscr{Q})}\|_{\mathscr{L}(L^2(\Omega)\times H)} \leqslant \text{const. } e^{-\varkappa' t}, \quad t \geqslant 0$$

を得る。　$v_1(t) = \tilde{P}_S v(t)$　とおくことにより　$L^2(\Omega) \times \tilde{P}_S H$　における方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v_1 \end{bmatrix} = \mathscr{N}\begin{bmatrix} x \\ v_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ v_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_{10} \end{bmatrix} \tag{10}$$

を得る。ここで，$\mathscr{N}$ は

$$\mathscr{N} = \begin{bmatrix} -L & \sum_{k=1}^{M} (\cdot, \rho_k)_H L_c^{3/4-\varepsilon}\psi_k \\ \sum_{k=1}^{N} (L_c^{\alpha}\cdot, L_c^{*3/4-\varepsilon} g_k)\tilde{P}_S \xi_k & B_1 + \sum_{k=1}^{M} (\cdot, \rho_k)_H \tilde{P}_S \alpha_k \end{bmatrix},$$

　　B_1;　B の $\tilde{P}_S H$ への制限

により与えられる。(10) の解　$x(t)$, $v_1(t)$ は　$x_0 \in L_R^2(\Omega)$,　$v_{10} \in \hat{H}$　のとき，それぞれ　$L_R^2(\Omega)$, $\hat{H}$ に属し，$e^{t\mathscr{N}}$ は $e^{t(\mathscr{M}+\mathscr{Q})}$ と同様な評価をもつ。

方程式 (10) からもとの制御系にもどるために $u(t,\cdot) = L_c^{\alpha/2} x(t)$ とおくと，$t \geqslant 0$ に対して

$$\left\|\begin{bmatrix} u(t,\cdot) \\ v_1(t) \end{bmatrix}\right\|_{L^2(\Omega)\times\tilde{P}_S H} \leqslant \text{const. } e^{-\varkappa' t}\left\|\begin{bmatrix} u_0 \\ v_1(0) \end{bmatrix}\right\|_{L^2(\Omega)\times\tilde{P}_S H}$$

なる評価を得る。 v_1 が有限次元 vector であることを考慮すれば， (10) からつぎの方程式系を得る：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t,\cdot) = -\mathscr{L}u(t,\cdot), \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \nu_L} + \sigma(\xi)u = \displaystyle\sum_{k=1}^{M} \mathbf{c}'_k\, \mathbb{y}(t) h_k(\xi), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\mathbb{y}(t) = \mathscr{F}\,\mathbb{y}(t) + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} (u(t,\cdot), w_k)_\Gamma\, \boldsymbol{\xi}_k + \mathscr{C}\,\mathbb{y}(t), \\[2ex] u(0,\cdot) = u_0 \in L^2_R(\Omega), \quad \mathbb{y}(0) = \mathbb{y}_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{11}$$

上に現われる係数はすべて実数値である。 du/dt は $L^2(\Omega)$ における微分を表わし， $u(t,\cdot) \in H^2(\Omega)$, $t > 0$ である。 $|\mathbb{y}(t)| \sim \|v_1(t)\|_H$ であるから，結局，上の制御系の解の安定性が証明された。

<u>Remark 1.</u> $\mathscr{F}$ の固有値は $\sqrt{\mu_1}\omega^{\pm}$, $\sqrt{\mu_2}\omega^{\pm}$, ..., $\sqrt{\mu_s}\omega^{\pm}$ となる。 (7) とは全く異なった性質の固有値をもつ $\mathscr{F}$ を構成することも可能である。

<u>Remark 2.</u> 方程式系 (11) の解がどのような条件のもとで古典的な意味での解になっているかという問題に関しては，つぎのような少々荒い議論が可能である：

(i) $u_0 \in \mathscr{D}(L_c^r)$, $r > 1/4$， 空間次元 $m \leqslant 6$, あるいは

(ii) $u_0 \in \mathscr{D}(L_c^r)$, $r > 5/4$, $\mathbb{y}_0 = \mathbf{0}$, $m \leqslant 10$ ならば

$$u(\cdot) \in C^1((0, \infty); C(\bar{\Omega})) \cap C((0, \infty); C^2(\bar{\Omega}))$$

となる。もっと精密な解の考察には，放物形方程式の基本解に対する Hölder 評価までさかのぼる必要がある。