数理解析研究所講究録
485巻 1983年 112-144

逆問題における、ある分岐の現象について

東大理　　鈴木 貴 (Takashi Suzuki)

固有値問題の逆問題は，発展方程式の Identification 問題（例えば Kitamura-Nakagiri [14]）と深くかかわっており，筆者は最近後者についていくつかの結果を得ることができた。（Suzuki [25-28] 及び，その引用文献）ここでは前者，特に逆 Sturm-Liouville 問題について最近得られた結果を報告してみたい。

逆 Sturm-Liouville 問題は，天文学者 V. Ambarzumian の [1] より始まる。それは，Sturm-Liouville 作用素 $A_{p,h,H}$ ($: -\frac{d^2}{dx^2}+p(x)$ in $L^2(0,1)$ with $(-\frac{d}{dx}+h)\cdot|_{x=0} = (\frac{d}{dx}+H)\cdot|_{x=1}=0$) をその固有値 $\sigma(A_{p,h,H}) = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(-\infty<\lambda_0<\lambda_1<\cdots\cdots\to\infty)$ によって決定しようという試みである。1946年に発表された Borg [2] は現在から見ても画期的な論文であり，そこで彼は次の三つのことを（主として Dirichlet 問題：$h=H=0$ 及び Neumann 問題：$h=H=\infty$ に対して）主張しているように思われる：

(I)　p は一般に $\sigma(A_{p,h,H})$ のみによっては決まらないが，$\sigma(A_{p,h,H})$

および $\delta(A_{p,R,H^*})$ $(H^* \neq H)$ の両方によって一意的に決定される。

(II) 但し，$A_{p,R,H}$ が「対称」(後述)である場合には，その制限のもとに $\delta(A_{p,R,H})$ が p を一意的に決定する。

(III) Hill 方程式のバンド構造(例えば Magnus-Winkler[20])が"0個の有限帯"であるポテンシャルは定数である。

1951年にロシア語で発表された Gel'fand-Levitan[9]は，Borg[2]が一意性の定理のみであることに不満を持ち，p をスペクトル関数から再構成することを考え，Gel'fand-Levitan方程式と呼ばれる積分方程式を用いてそれに成功した。この論文の影響は大きくそれに触発されて Krein[15]は予測理論に対し，Marchenko[20]は逆散乱問題に対しそれぞれ1つの解決を提示した。特に Faddeev[5,6]等によって継承・発展されていた逆散乱理論は，1967年に Gardner-Greene-Kruskal-Miura[8]によって KdV方程式の特殊解(ソリトン解)を解析的に求めるのに役立つことが発見されると，1970年代には非線形波動を研究する重要な道具となり，おびただしい成果を生むことになった。(谷内-西原[31]，戸田[32]。Faddeev[6]にはその後本質的な誤りが発見されて修正された。Chadan-Sabatier[3]，Deift-Trubowitz[4]等を参照。)

一方1965年に Hochstadt[11]は Borg[2]の主張(III)の証明を簡略にするとともに更に次のように改良した：

(III') "1有限帯ポテンシャル"は一般化KdV方程式の定常解であることと同値。

1976年にはGoldberg[10], Flaschka[7]等多くの人々によって次のように更に改良されることがわかった：

(III'') "N有限帯ポテンシャル"は"N次の一般化KdV方程式"の定常解であることと同値。

このようにHill方程式のバンド構造の研究はKdV方程式の研究と結びついてMcKean-Moerbeke[22]をはじめとする深い成果を生んだ。(田中－伊達[30]参照。)

ここで我々が考察する(I)(II)の逆Sturm-Liouville問題はBorg[2]以後どうか。1949年にLevinson[17]は(I)(II)について[2]の問題を一般のh, Hに対して考え，やや[2]よりは弱い主張を簡明な証明で示した。1964年に英訳が出版されたLevin[16]によると，V.A. Marchenkoらは，(I)においてpばかりでなく境界での反射係数h, H, H^*も決定されることを示したらしい。その後Levitan-Gasymov[18]は(I)について(p, h, H, H^*)を$\sigma(A_{p,h,H})$と$\sigma(A_{p,h,H^*})$によって再構成する試みをした。これは一意性に関しては[2]を含むわけではない。一方1973年にHochstadt[12]は(I)や(II)に対して有限個の$\sigma(A_{p,h,H})$が未知の場合pがどのような自由度をもつかを考察した。1978年にはHochstadt-Lieberman[13]が一般の場合に$p(x)$ $(1/2 \leqq x \leqq 1)$, h, Hおよび$\sigma(A_{p,h,H})$によって$p(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1/2)$が一

意的に決定されることを示した。

最近筆者は発展方程式の Identification の研究において、Gel'fand-Levitan [9] に啓発されて筆者らが開発した方法 (Suzuki-Murayama [29], Suzuki [25-27]) によってこれらの逆 Sturm-Liouville 問題の一意性に関する結果がすべて見通し良く改良できること (Suzuki [28]) 更により深いこともわかるようになることを知った。この作業はまだ完了したわけではないが、(II) についてはある程度の所まで来たので、ここに紹介してみたい。なお逆 Sturm-Liouville 問題の安定性に関しては水谷明氏 (学習院大理) の考察がある。([23])

§1. Introduction.

Notation 1. $p \in C^1[0,1]$, $h \in \mathbb{R}$, $H \in \mathbb{R}$ に対して $A_{p,h,H}$ を Sturm-Liouville 作用素: $-\frac{d^2}{dx^2}+p(x)$ in $L^2(0,1)$ with $(-\frac{d}{dx}+h)\cdot|_{x=0}=(\frac{d}{dx}+H)\cdot|_{x=1}=0$ とする。▨

良く知られているように、$A_{p,h,H}$ の固有値 $\sigma(A_{p,h,H})=\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ はすべて単純である: $-\infty<\lambda_0<\lambda_1<\cdots\to\infty$。以下で考えるのは係数 $p\in C^1[0,1]$, $h\in\mathbb{R}$, $H\in\mathbb{R}$ が次の条件をみたす時の事である:

Definition 1. $A_{p,h,H}$ が「対称」(symmetric) であるとは、

(i) $p(1-x)=p(x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ (以下このことを $p\in C^1_s[0,1]$ と書く)

かつ

(ii) $k = H$ なることを言う。▨

与えられた対称作用素 $A_{p,k,k}$ に対し，$\lambda_n(p,k)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ をその固有値としよう。Borg [2], Levinson [17], Hochstadt [12] は次の事を示した：

<u>Theorem 0</u>. $q \in C^1_s[0,1]$ が

(1.1) $$\lambda_n(q,k) = \lambda_n(p,k) \qquad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

をみたすとすれば，

(1.2) $$q = p$$

である。▨

即ち，「対称作用素」という version においては，固有値が作用素を一意的に決定するのである。但し (1.1) において，$n=0$ に対しては何も仮定されていないことに注意しよう。

§2. <u>Summary</u>.

対称作用素 $A_{p,k,k}$ と $\Sigma \subset N \equiv \{0,1,2,\cdots\}$ が与えられたとする。$\{\lambda_n(p,k)\}_{n=0}^{\infty}$ を $A_{p,k,k}$ の固有値として，集合

$$\hat{Q} \equiv \hat{Q}_{p,k,\Sigma} \overset{def}{=} \{ (q,j) \in C^1_s[0,1] \times R \mid \lambda_n(q,j) = \lambda_n(p,k)\ (n \in N \setminus \Sigma) \}$$

を考えよう。これはその n 番目の固有値が，$n \in \Sigma$ を除いて $A_{p,k,k}$ のそれと一致する対称作用素の全体を表わしている。この時

<u>Theorem A</u>. $\hat{\hat{Q}}_{p,h,\Sigma}=\{(p,h)\}$なるための必要十分条件は，$\Sigma=\phi$である。▨

この定理は，対称作用素$A_{p,h,h}$がその固有値$\{\lambda_n(p,h)\}_{n=0}^{\infty}$によって特徴付けられることを示す。§1のTheorem 0においては，$\Sigma=\{0\}(\neq\phi)$であったが，かわりに$j=h$が仮定されていた。後者が最小固有値に対する条件$\lambda_0(q,j)=\lambda_0(p,h)$をrecoverしていたわけである。一般の$\Sigma=\{n_1\}$ $(n_1\in\mathbb{N})$に対してはどうであろうか。

$$Q\equiv Q_{p,h,n_1}\overset{\mathrm{def}}{=}\{q\in C^1_s[0,1]\mid \lambda_n(q,h)=\lambda_n(p,h)\ (n\neq n_1)\}$$

$$(=\mathrm{Proj}_1[\hat{\hat{Q}}_{p,h,\{n_1\}}\cap\{(q,j)\mid j=h\}])$$

とおこう。

<u>Theorem B</u>.

(i) $n_1=0$の時　$Q_{p,h,n_1}=\{p\}$。

(ii) $n_1\geq 1$の時　$Q_{p,h,n_1}=\{p,\ p-2(\frac{W'}{W})'\}$。▨

Theorem Bの(i)はTheorem 0に他ならない。(但し，ここでは[2][17][12]とは異なる方法で示す。)(ii)において，$'$はxに関する微分を表わす。$W\equiv W(x;p,h,n_1)\neq 0$は$x$の関数で，次のようにして定義される：

<u>Notation 2</u>. $p\in C^1[0,1]$, $h\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}$に対し

$\varphi=\varphi(x;p,h,\lambda)$は　$(-\frac{d^2}{dx^2}+p(x))\varphi=\lambda\varphi$ $(0\leq x\leq 1)$, $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=h$ の解を，

$\varphi^*=\varphi^*(x;p,\lambda)$は　$(-\frac{d^2}{dx^2}+p(x))\varphi^*=\lambda\varphi^*$ $(0\leq x\leq 1)$, $\varphi^*(0)=0$, $\varphi^{*\prime}(0)=1$ の解を，

それぞれ表わす。 ▨

$\lambda=\lambda_n(p,h)$ $(n\in\mathbb{N}\equiv\{0,1,2,\cdots\})$ に対して $\varphi(x;p,h,\lambda)$ は $A_{p,h,h}$ の固有関数になる。$\langle\varphi,\varphi^*\rangle$ は方程式 $(-\frac{d^2}{dx^2}+p(x))\varphi=\lambda\varphi$ の解の基本系になる。

<u>Notation 3.</u> A_p^* は $-\frac{d^2}{dx^2}+p(x)$ in $L^2(0,1)$ with $\cdot|_{x=0}=\cdot|_{x=1}=0$ (Dirichlet 境界条件) を表わす。A_p^* の固有値 $\delta(A_p^*)=\{\lambda_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ $(-\infty<\lambda_1^*<\lambda_2^*<\cdots\to\infty)$ を $\lambda_n^*=\lambda_n^*(p)$ と書く。 ▨

ここで $\lambda_n^*(p)$ が $n=1$ より番号を付けてあることに注意する。

$\lambda=\lambda_n^*(p)$ $(n\geq1)$ に対して $\varphi^*(x;p,\lambda)$ は A_p^* の固有関数になる。

以上の準備のもとで W は次のように定義される：

<u>Notation 4.</u> $n_1\geq1$, $p\in C_s^1[0,1]$, $h\in\mathbb{R}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
W&=W(x;p,h,n_1)\\
&=\varphi^{*\prime}(x;p,\lambda_{n_1}^*(p))\varphi(x;p,h,\lambda_{n_1}(p,h))\\
&\qquad-\varphi^*(x;p,\lambda_{n_1}^*(p))\varphi'(x;p,h,\lambda_{n_1}(p,h))
\end{aligned}
$$
▨

<u>Remark 1.</u> 固有関数の零点に関する Sturm-Liouville の定理及び比較定理によって $W\neq0$, $(\frac{W'}{W})'\in C_s^1[0,1]$ がわかる。 ▨

<u>Remark 2.</u> もし $\lambda_{n_1}(p,h)=\lambda_{n_1}^*(p)$ ならば，W は Wronskian となり，$W'\equiv0$ である。実は $(\frac{W'}{W})'\equiv0 \Leftrightarrow \lambda_{n_1}(p,h)=\lambda_{n_1}^*(p)$ が成立つ。 ▨

一般に，$p\in C_s^1[0,1]$ の時 $\varphi^*(1-x;p,\lambda_n^*(p))=(-1)^{n+1}\varphi^*(x;p,\lambda_n^*(p))$ $(0\leq x\leq1)$ (後述) であるが，これと独立で，

$$(-\tfrac{d^2}{dx^2}+p(x))S=\lambda_{n_1}^*(p)S,\quad S(1-x;p,n)=(-1)^nS(x;p,n)\ (0\leq x\leq1)$$

なる $s=s(x;p,n)\neq 0$ が存在することがわかる。$s(0)\neq 0$ であり，

$$k_n = k_n(p) \overset{\text{def}}{=} s'(0;p,n)/s(0;p,n)$$

とおくと，k_n は s のとり方によらず $n\geq 1$, $p\in C_s^1[0,1]$ によって確定すること，及び

$$\lambda_{n_1}^*(p)=\lambda_{n_1}(p,k) \Leftrightarrow k=k_{n_1}(p)$$

が示される。特に，

<u>Corollary</u>. $Q_{p,k,n_1}=\{p\}$ なるための必要十分条件は，

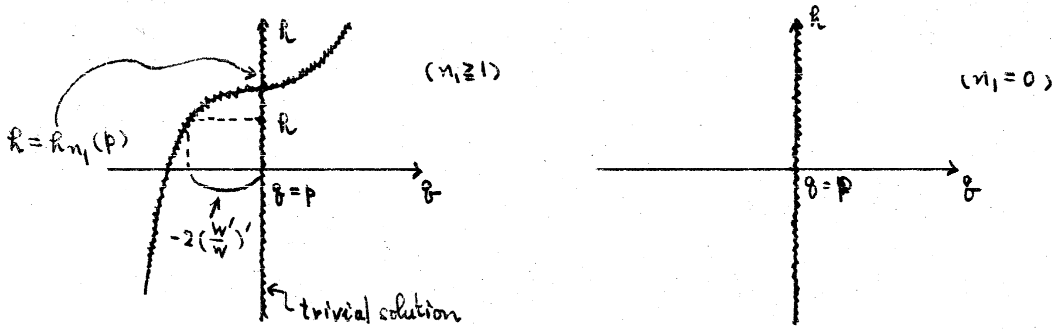
(i) $n_1=0$ 又は (ii) $n_1\geq 1$, $k=k_{n_1}(p)$ である。▨

このように，もとの問題は第3種の境界条件に関するものであるが，その答はDirichlet境界値問題と関連して述べられるのである。

Theorem B により，与えられた $p\in C_s^1[0,1]$ と $n_1\geq 1$ に対し，

$$\lambda_n(q,k)=\lambda_n(p,k)\quad(n\neq n_1)$$

をみたす $(q,k)\in C_s^1[0,1]\times\mathbb{R}$ の集合は下の左図のようになる：



k をパラメータとしてみた時，$n_1\geq 1$ の時はこの集合が $k=k_{n_1}(p)$ において分岐をおこしていることがわかる。皮肉なことに，大域的な一意性が成立つのは分岐点の所だけである。$n_1=0$ の

時は分岐はおこらない。

このような分岐がおこるのは，Identificationの立場からは望ましくない。条件 $j=h$ はその意味では不完全なものであった。別の条件で分岐をひき起こさないものはないであろうか。

<u>Theorem C</u>. $A_{p,h,h}$，$A_{g,j,j}$ を対称作用素，$n_1\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ とする時，

$$\begin{cases}\lambda_n(g,j)=\lambda_n(p,h) & (n\neq n_1)\\ \frac{1}{2}g(0)-j^2=\frac{1}{2}p(0)-h^2\end{cases}$$

ならば，$g\equiv p$，$j=h$ である。∎

$\frac{1}{2}p(0)-h^2$ の物理的意味は明確でないが，この量はこのように固有値の条件を完全に1つ肩がわりすることができる。

この論説は6つの節より成る。以下の§3ではこれらの定理の証明において重要な変形公式について述べ，§4,§5でそれぞれ Theorem A, B の証明の概略を説明する。§6では Theorem C の証明とその一般化について述べる。

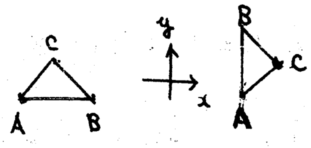
§3. <u>Preliminaries</u>

直角二等辺三角形 $\triangle ABC$ において $\overline{AC}=\overline{BC}$，$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，斜辺 AB はは x軸又は y軸に平行であるとして，$\Omega\subset\mathbb{R}^2$ をその内部とする。与えられた $r\in C^1(\bar{\Omega})$ に対し，双曲型方程式

(3.1) $$K_{xx}-K_{yy} = r(x,y)K \qquad (\bar{\Omega}\text{ 上})$$

に関して次の命題が成立つ：但しνは$\partial\Omega$における外向き単位法線ベクトルとする：

Proposition 1. 任意の$f \in C^2(\overline{AC})$, $g \in C^2(\overline{BC})$; $f|_C = g|_C$ に対し，(3.1) かつ



(3.2) $$K|_{\overline{AC}} = f, \qquad K|_{\overline{BC}} = g$$

なる$K \in C^2(\overline{\Omega})$が唯一つ存在する。▨

Proposition 2. 任意の$f \in C^2(\overline{AB})$, $g \in C^1(\overline{AB})$ に対し，(3.1) かつ

(3.3) $$K|_{\overline{AB}} = f, \qquad \frac{\partial}{\partial \nu} K|_{\overline{AB}} = g$$

なる$K \in C^2(\overline{\Omega})$が唯一つ存在する。▨

Proposition 3. 任意の$f \in C^2(\overline{AC})$, $g \in C^2(\overline{AB})$, $f|_A = g|_A$ に対し，(3.1) かつ

(3.4) $$K|_{\overline{AC}} = f, \qquad K|_{\overline{AB}} = g$$

なる$K \in C^2(\overline{\Omega})$が唯一つ存在する。▨

Proposition 4. 任意の$f \in C^2(\overline{AC})$, $g \in C^1(\overline{AB})$, $k \in \mathbb{R}$ に対し，(3.1) かつ

(3.5) $$K|_{\overline{AC}} = f, \qquad \frac{\partial}{\partial \nu} K + k K|_{\overline{AB}} = g$$

なる$K \in C^2(\overline{\Omega})$が唯一つ存在する。▨

Proposition 1, 2, 3 の証明は Picard [24] にある。Proposition 4 も同様である。実際，与えられた境界条件をみたし，

(3.1′) $$K_{xx} - K_{yy} = 0 \qquad (\overline{\Omega}\text{上})$$

なる $K_0 = K_0(x,y) \in C^2(\overline{\Omega})$ は，f, q の積分を用いて具体的に書き表わすことができる。一方与えられた $F \in C^0(\overline{\Omega})$ に対し，与えられた境界条件を $f = q = 0$ に対してみたし，

(3.1'') $$K_{xx} - K_{yy} = F(x,y) \qquad (\overline{\Omega}\text{上})$$

なる $K = K(x,y)$ も具体的に書き表わすことができる。このことから，これらの問題が Volterra型の積分方程式に帰着され，反復法によって解くことができる。（最初に「反復法」を導入してその有用性を示したのは Picard 自身である。）Proposition 2 は双曲型方程式の Cauchy 問題として知られている。

次に，§2 Notation 2 で与えた $\varphi = \varphi(x; p, h, \lambda)$ を思い起こそう。$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x < 1\}$ とする。

<u>Lemma 1</u>. 与えられた $p, q \in C^1[0,1]$, $h, j \in \mathbb{R}$ に対し，

(3.6.1) $$K_{xx} - K_{yy} + p(y)K = q(x)K \qquad (\overline{D}\text{上})$$

(3.6.2) $$K(x,x) = (j-h) + \frac{1}{2}\int_0^x (q(s) - p(s))\,ds \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

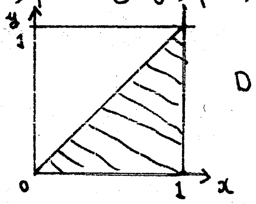
(3.6.3) $$K_y(x,0) = hK(x,0) \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

なる $K = K(x,y) = K(x,y;q,j;p,h) \in C^2(\overline{D})$ が唯一つ存在する。□

<u>Lemma 2</u>（第1変形公式）

(3.7) $$\varphi(x;q,j,\lambda) = \varphi(x;p,h,\lambda) + \int_0^x K(x,y;q,j;p,h)\varphi(y;p,h,\lambda)\,dy$$

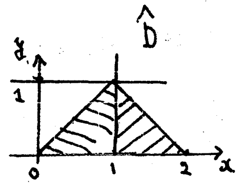
が成立つ。□



Lemma 1 の存在証明は次のようになされる。

まず $q \in C^1[0,1]$ を適当に $\hat{q} \in C^1[0,2]$ に拡張し，$\hat{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid$

$0<y<x<2-y\}$ とおく。 Proposition 3 より，

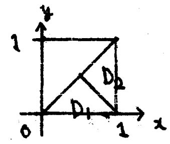


(3.6.1')　$\hat K_{xx} - \hat K_{yy} + p(y)\hat K = \hat q(x)\hat K$　（$\overline{\hat D}$ 上）

(3.6.2')　$\hat K(x,x) = (j-h) + \frac{1}{2}\int_0^x (q(s)-p(s))ds$　$(0\leqq x\leqq 1)$

(3.6.3')　$\hat K_y(x,0) = h\hat K(x,0)$　$(0\leqq x\leqq 2)$

なる $\hat K\in C^2(\overline{\hat D})$ が存在する。 $K=\hat K|_{\overline D}$ とおけばよい。一意性を示すためには，D を $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<y<x<1-y\}$ と $D_2 = D\setminus\overline{D_1}$ に分ける。(3.6.1)，



(3.6.2'')　$K(x,x)=0$　$(0\leqq x\leqq 1)$

かつ (3.6.3) なる $K\in C^2(\overline D)$ が $K\equiv 0$ であることを言う。まず Proposition 3 より $\overline{D_1}$ 上 $K=0$，次いで Proposition 1 より $\overline{D_2}$ 上 $K=0$ が導びかれる。一方 Lemma 2 の証明は初等的である。(3.6)の右辺 $\chi(x)$ が

(3.8)　$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)\right)\chi=\lambda\chi$　$(0\leqq x\leqq 1)$,　$\chi(0)=1$,　$\chi'(0)=j$

をみたすことを言いさえすればよい。詳しい計算は Suzuki[26, 27] にある。//

上の Lemma の要点は K が λ に依存しないことである。そのために固有値に対する条件を K に対する条件に集約することが可能になるのである。

この節の最後に，作対作用素 $A_{p,h,h}$ の固有関数 $\varphi(x;p,h,\lambda_n(p,h))$ に関する次の事実を注意しておく。簡単のため，しばらく $\varphi_n(x)=\varphi(x;p,h,\lambda_n(p,h))$　$(n\in\mathcal{N}\equiv\{0,1,2,\cdots\})$ とおく。

Lemma 3. $\varphi_n(1-x) = (-1)^n\varphi_n(x)$ $(n\in\mathbb{N},\ x\in[0,1])$ が成立つ。☒
実際 $A_{p,h,h}$ が対称であるので $\chi_n(x)=\varphi_n(1-x)$ も $\lambda=\lambda_n(p,h)$ に対応する $A_{p,h,h}$ の固有関数となり,

(3.9) $$\chi_n(x) = c_n\varphi_n(x) \quad (=\varphi_n(1-x))$$

なる $c_n\in\mathbb{R}$ が存在する。$c_n\neq 1$ ならば $\varphi_n(\frac{1}{2})=0$, $c_n\neq -1$ ならば $\varphi_n'(\frac{1}{2})=0$ であるが, $\varphi_n(\frac{1}{2})=\varphi_n'(\frac{1}{2})=0$ ならば $\varphi_n\equiv 0$ となり φ_n の定義に反する。従って $\varphi_n(\frac{1}{2})\neq 0$ か $\varphi_n'(\frac{1}{2})\neq 0$ のどちらかが常に成立ち, 上のことから $c_n=\pm 1$ となる。Sturm-Liouville の定理より, φ_n は $[0,1]$ に丁度 n 個の零点を持つので $c_n=(-1)^n$ がわかる。//

Lemma 4. $\{\varphi_{2m}\}_{m=0}^{\infty}$, $\{\varphi_{2m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ はどちらも $L^2(0,\frac{1}{2})$ の完全直交系をなす。☒
実際 Lemma 3 より $\varphi=\varphi_{2m}$ は

(3.10) $$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+p(x)\right)\varphi=\lambda\varphi \quad (0\leq x\leq\tfrac{1}{2}), \qquad \varphi'(0)-h\varphi(0)=\varphi'(\tfrac{1}{2})=0$$

を $\lambda=\lambda_{2m}(p,h)$ に対してみたし, $[0,\frac{1}{2}]$ に丁度 m 個の零点を持つ。よって Sturm-Liouville の定理より, $\{\varphi_{2m}\}_{m=0}^{\infty}$ は固有値問題 (3.10) の固有関数全体に一致し, 完全直交系をなす。$\{\varphi_{2m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ も同様である。//

§4. Outline of the Proof of Theorem A

$p\in C_s^1[0,1]$, $h\in\mathbb{R}$, $\Sigma\subset\mathbb{N}$ に対し,

(4.1) $$\hat{Q}_{p,h,\Sigma} = \{(q,j)\in C_s^1[0,1]\times\mathbb{R} \mid \lambda_n(q,j)=\lambda_n(p,h)\ (n\in\mathbb{N}\setminus\Sigma)\}$$

であった。

Theorem 1. $\hat{Q}_{p,h,\phi} = \{(p,h)\}$ ▨

及び

Theorem 2. $\hat{Q}_{p,h,\{n_1\}} \neq \{(p,h)\}$ $(n_1 \in \mathbb{N})$ ▨

を示す。

今 $(g,j) \in \hat{Q}_{p,h,\{n_1\}}$ とすると,

(4.2) $\quad \varphi'(1;g,h,\lambda) + h\varphi(1;g,h,\lambda) = 0 \quad (\lambda = \lambda_n(p,h),\ n \neq n_1)$

が成立つ。簡単のために以下 $\varphi_n = \varphi(\cdot\,;p,h,\lambda_n(p,h))$ とおくと,第1変形公式 (3.7) により (4.2) は $K = K(x,y) = K(x,y;g,j;p,h)$ に対する関係式

(4.3) $\quad (j - h + K(1,1))\varphi_n(1) + \int_0^1 \{K_x(1,y) + jK(1,y)\}\varphi_n(y)\,dy = 0 \quad (n \neq n_1)$

と同値である。$K \in C^2(\overline{D})$ 故,

$$a_n \overset{\mathrm{def}}{=} \int_0^1 \{K_x(1,y) + jK(1,y)\}\varphi_n(y)\,dy, \quad \rho_n \overset{\mathrm{def}}{=} \int_0^1 \varphi_n(x)^2\,dx$$

とすると,$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{\rho_n} < \infty$ 特に $a_n/\sqrt{\rho_n} \to 0$ $(n \to \infty)$ となる。漸近挙動

(4.4) $\quad \rho_n = \frac{1}{2} + O(\frac{1}{n^2}) \quad (n \to \infty)$

が知られている(例えば Levitan-Sargsjan [19])ので,$a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ を得る。一方

(4.5) $\quad \varphi_n(x) = \cos n\pi x + O(\frac{1}{n}) \quad (x \in [0,1];\ n \to \infty)$

([19])であるから,(4.3) は

(4.6.1) $\quad j = h - K(1,1)$,

(4.6.2) $\int_0^1 \{K_x(1,y) + j K(1,y)\} \varphi_n(y) dy = 0 \quad (n \neq n_1)$

を導びく。次に Lemma 3 より

(4.7) $\begin{cases} \varphi'(\frac{1}{2}; p, k, \lambda) = \varphi'(\frac{1}{2}; g, j, \lambda) = 0 & (\lambda = \lambda_n(p,k); n: \text{even}, n \neq n_1) \\ \varphi(\frac{1}{2}; p, k, \lambda) = \varphi(\frac{1}{2}; p, k, \lambda) = 0 & (\lambda = \lambda_n(p,k); n: \text{odd}, n \neq n_1) \end{cases}$

であるから同様に (4.5) を用いて

(4.8) $\int_0^{\frac{1}{2}} K(\tfrac{1}{2}, y) \varphi_n(y) dy = 0 \quad (n: \text{odd}, n \neq n_1)$

(4.9) $K(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} K_x(\tfrac{1}{2}, y) \varphi_n(y) dy = 0 \quad (n: \text{even}, n \neq n_1)$

を得る。 (4.8), (4.9), Lemma 4 より

(イ) n_1: even の時

(4.10.e) $K(\tfrac{1}{2}, y) = 0, \quad K_x(\tfrac{1}{2}, y) = c\, \varphi_{n_1}(y) \quad (0 \leq y \leq \tfrac{1}{2})$

(ロ) n_1: odd の時

(4.10.o) $K(\tfrac{1}{2}, y) = c\, \varphi_{n_1}(y), \quad K_x(\tfrac{1}{2}, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq \tfrac{1}{2})$

なる $c \in \mathbb{R}$ が存在する。(ロ)の場合には $\varphi_{n_1}(\frac{1}{2}) = 0$ であるのでいずれの場合も (1.9) の $K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$ は自動的にみたされている。

以上によって次の補題の ⇒ が示された：

<u>Lemma 5</u>. $g \in C_s^1[0,1]$, $j \in \mathbb{R}$ に対し,

$(g, j) \in \hat{Q}_{p,k,\{n_1\}} \Leftrightarrow$ (3.6) (4.6) (4.10) をみたす $K \in C^2(\bar{D})$, $c \in \mathbb{R}$ が存在する。 ∎

⇐ が成立つことを示そう。

(3.6) より $K = K(\cdot, \cdot; g, j; p, k)$ であり, (3.7) が成立つ。一方 (4.6) より (4.2) が成立つ。従って各 $n \neq n_1$ に対し $m(n) \in \mathcal{N}$ が存

在して

(4.11) $$\lambda_n(p,h) = \lambda_{m(n)}(g,j) \qquad (n \neq n_1)$$

である。 $m(n)=n \ (n\neq n_1)$ を示せばよい。 (4.10), (3.7), Lemma 4 より,

$$\varphi(\tfrac{1}{2}; g, j, \lambda_n(p,h)) = 0 \quad (n: \text{odd},\ n\neq n_1)$$

$$\varphi'(\tfrac{1}{2}; g, j, \lambda_n(p,h)) = 0 \quad (n: \text{even},\ n\neq n_1)$$

が成立つので, Lemma 3 より (4.11) において

(4.12) $$m(n) \equiv n \quad (\text{mod } 2;\ n\neq n_1)$$

であることがわかる。一方漸近挙動

(4.13) $$\lambda_n(p,h)^{\frac{1}{2}} = n\pi + O(\tfrac{1}{n}) \ (n\to\infty), \quad \lambda_m(g,j)^{\frac{1}{2}} = m\pi + O(\tfrac{1}{m}) \ (m\to\infty)$$

([19]) より, (4.11) から

(4.14) $$m(n) = n \quad (n \geqq n_0)$$

なる $n_0 \in \mathcal{N}$ が存在することもわかる。更に

(4.15) 写像 $\mathcal{N}\setminus\{n_1\} \ni n \longmapsto m(n) \in \mathcal{N}$ は順序を保存する。

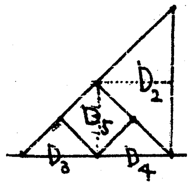
(4.12) (4.14) (4.15) より $m(n)=n \ (n\neq n_1)$ が導びかれる。//

Proof of Theorem 1: $(g,j) \in \hat{Q}_{p,h,\phi}$ とすると, (4.2) に加えて更に

$$\varphi'(1; g, j, \lambda) + j\,\varphi(1; g, j, \lambda) = 0 \quad (\lambda = \lambda_{n_1}(p,h))$$

が成立つ。Lemma 5 の ⇒ の証明をたどると, この時 $C=0$ になる:

(4.16) $$K(\tfrac{1}{2}, y) = K_x(\tfrac{1}{2}, y) = 0 \quad (0 \leqq y \leqq \tfrac{1}{2})\text{。}$$



更に (4.6.2) において

(4.17) $\qquad K_x(1,y)+jK(1,y)=0 \qquad (0\leq y\leq 1)$

も成立つ。§3 Lemma 1 の証明においてDをD_1とD_2に分けた。更にD_1を$D_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<y<x<\frac{1}{2}-y\}$, $D_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<y<x-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}-y\}$, $D_5=D_1\setminus(\overline{D_3}\cup\overline{D_4})$ に分ける。(3.6.1), (4.16), Proposition 2 によって$\overline{D_5}$上 $K=0$, 従って (3.6.1), (3.6.3), Proposition 4 によって $\overline{D_3}\cup\overline{D_4}$ 上 $K=0$, 従って更に (3.6.1), (4.17), Proposition 4 によって$\overline{D_2}$上 $K=0$ となり, $K\equiv 0$ を得る。特に (3.6.2) より $q\equiv p$, $j=h$ である。//

次に,

<u>Lemma 6</u>. 与えられた $p,q\in C_s^1[0,1]$, $h,j,c\in\mathbb{R}$ に対し, (3.6.1), (3.6.3), (4.6.2), (4.10) をみたす $K=K(x,y)\in C^2(\overline{D})$ は一意に存在し, 変数分離形

(4.18) $\qquad K(x,y) = g(x)\,\varphi_{n_1}(y)$

によって与えられる。ここで $g=g(x)\in C^2[0,1]$ は $\lambda_{n_1}=\lambda_{n_1}(p,h)$ に対し,

(イ) n_1 : even の時

(4.19.e) $\qquad \left(-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)\right)g=\lambda_{n_1}g \quad (0\leq x\leq \frac{1}{2}),\quad g(\frac{1}{2})=0,\quad g'(\frac{1}{2})=c$

(ロ) n_1 : odd の時

(4.19.o) $\qquad \left(-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)\right)g=\lambda_{n_1}g \quad (0\leq x\leq \frac{1}{2}),\quad g(\frac{1}{2})=c,\quad g'(\frac{1}{2})=0$

の一意解である。▨

<u>Proof of Lemma 6</u>: $\varphi_n(x)=\varphi(x;p,h,\lambda_n(p,h))$ であった。

(4.18) なる $K\in C^2(\overline{D})$ が (3.6.1) (3.6.3) (4.6.2) (4.10) をみたすことは容易に確かめられる。そのような $K\in C^2(\overline{D})$ が一意であることを言う。そのためには $c=0$ として (3.6.1), (3.6.3), (4.6.2), (4.10) をみたす $K\in C^2(\overline{D})$ が $K\equiv 0$ であることを示せばよい。ところが Theorem 1 の証明によってこの時まず $\overline{D_1}$ 上 $K=0$ であることがわかる。一方 (4.6.2) より

$$K_x(1,y)+jK(1,y)=\alpha\varphi_{n_1}(y) \quad (0\leq y\leq 1)$$

なる $\alpha\in\mathbb{R}$ が存在するが，$K=0$ ($\overline{D_1}$上) より $K_x(1,0)=K(1,0)=0$ であるから $\alpha=0$ 即ち (4.17) が成立つ。これより．Theorem 1 の証明によって $\overline{D_2}$ 上 $K=0$ も導びかれる。//

Lemma 5, 6 によって $g\in C^1_s[0,1]$, $j\in\mathbb{R}$ に対し，$(g,j)\in\hat{Q}_{p,k,\{n_1\}}$ と (4.19) 及び

$$g(x)\varphi_{n_1}(x)=(j-k)+\frac{1}{2}\int_0^x(g(s)-p(s))ds \tag{4.20.1}$$

$$g(1)\varphi_{n_1}(1)=k-j \tag{4.20.2}$$

なる $g\in C^2[0,1]$, $c\in\mathbb{R}$ が存在することとは同値である。(4.19) と (4.20.1) により，g, j を消去すると $g\in C^2[0,1]$ は

$$\frac{d^2}{dx^2}g=\left(2\frac{d}{dx}(g\varphi_{n_1})+p-\lambda_{n_1}\right)g \quad (0\leq x\leq 1) \tag{4.21}$$

をみたすこと及び g, j は g を用いて

$$g=p+2\frac{d}{dx}(g\varphi_{n_1}),\quad j=k+g(0) \tag{4.22}$$

と与えられることがわかる。$\varphi_{n_1}(1-x)=(-1)^{n_1}\varphi_{n_1}(x)$ であるから，(4.19) における g の $x=\frac{1}{2}$ での条件を用いると，(4.21) の $x=\frac{1}{2}$ で

の Cauchy 問題の解の一意性より，

(4.23) $$g(1-x) = (-1)^{n_1+1} g(x) \qquad (0 \le x \le 1)$$

が従う。特に $(g\varphi_{n_1})(1-x) = -(g\varphi_{n_1})(x)$ であるから，(4.20.2) は (4.22) より自動的に導かれ，更に (4.22) なる f は $f(1-x)=f(x)$ をみたす。以上によって次の定理の前半が示された：

Theorem 3. $\lambda_{n_1}=\lambda_{n_1}(p,k)$, $\varphi_{n_1}=\varphi(\cdot\,;p,k,\lambda_{n_1}(p,k))$ とおく。$(f,j)\in\hat{Q}_{p,k,\{n_1\}}$ なるための必要十分条件は，(4.21) (4.23) なる $g\in C^2[0,1]$ が存在して (f,j) が (4.22) のように与えられることである。$(f,j)\in\hat{Q}_{p,k,\{n_1\}}$ と (4.21) (4.23) なる $g\in C^2[0,1]$ のこの対応は1対1で，特に $g\neq 0$ ならば $(f,j)\neq(p,k)$ である。▨

Theorem 3 の後半を証明しよう。実際 $(f,j)\in\hat{Q}_{p,k,\{n_1\}}$ に対し，(4.21), (4.23) なる $g_1, g_2\in C^2[0,1]$ が存在して

$$f = p + 2\frac{d}{dx}(g_\ell\varphi_{n_1}), \quad j = k + g_\ell(0) \qquad (\ell=1,2)$$

が成立ったとすると，$K_\ell(x,y) = g_\ell(x)\varphi_{n_1}(y)\in C^2(\bar{D})$ は (3.6) を今与えられた (f,j) に対してみたす。(3.6) の解の一意性から，$K_1\equiv K_2$ ($\bar{D}$ 上) であり，$g_1(x)=g_2(x)$ $(0\le x\le 1)$ が従う。//

Proof of Theorem 2: 与えられた $p\in C^1_s[0,1]$, $k\in\mathbb{R}$, $n_1\in\mathbb{N}$ に対し，$c\in\mathbb{R}$ を十分小にとれば n_1 が even の時は $g(\frac{1}{2})=0$, $g'(\frac{1}{2})=c$, n_1 が odd の時は $g(\frac{1}{2})=c$, $g'(\frac{1}{2})=0$ をみたす (4.21) の解 $g\neq 0$, $g\in C^2[0,1]$ が存在する。その時 g は (4.23) をみたし，(4.22) によって (f,j) を定めれば Theorem 3 より $(f,j)\in\hat{Q}_{p,k,\{n_1\}}$, $(f,j)\neq(p,k)$ が成立

う。//

Hochstadt [12] は $j=k$ の時 $(g,j)\in\hat{Q}_{p,k,\{n_1\}}$ (即ち $g\in Q_{p,k,n_1}$) であるとすると，(4.21) なる $g\in C^2[0,1]$ が存在して g が (4.22) 第一式のように与えられなくてはいけないことを示している。けれども，(4.23) 及び (4.22) 第二式には気付いていない。彼の方法は境界値問題の Green 関数の構成法に基づくもので，変形公式を用いた我々の方法とは異なる。彼はなお一般の有限集合 Σ に対して $(g,j)\in\hat{Q}_{p,k,\Sigma}$ $(j=k)$ であるための必要条件を出しているが，変形公式を用いればこれを必要十分条件に改良することも可能である。

§5. Outline of the proof of Theorem B

$\lambda_{n_1}=\lambda_{n_1}(p,k)$, $\varphi_{n_1}=\varphi(\cdot\,;p,k,\lambda_{n_1}(p,k))$ とおいて

(5.1) $$\frac{d^2}{dx^2}g=\left(2\frac{d}{dx}(g\varphi_{n_1})+p-\lambda_{n_1}\right)g \qquad (0\le x\le 1)$$

(5.2) $$g(1-x)=(-1)^{n_1+1}g(x) \qquad (0\le x\le 1)$$

を考えよう。Theorem 3 により

(5.3) $$Q_{p,k,n_1}\equiv\{g\in C^1_s[0,1]\mid \lambda_n(g,\underset{\sim}{k})=\lambda_n(p,k)\quad(n\neq n_1)\}$$

$$=\{p+2\frac{d}{dx}(g\varphi_{n_1})\mid g\in C^2[0,1];\ (5.1),\ (5.2) \text{及び}\ \underset{\sim\sim\sim}{g(0)=0}\}$$

が成立ち，Theorem B の証明は非線型方程式 (5.1) の研究に帰着される。

最初に

<u>Theorem 4</u>. $n_1=0$ ならば $Q_{p,h,n_1}=\{p\}$ ☒

を示す。

<u>Lemma 7</u>. (5.1)の解 $g\in C^2[0,1]$ は

(5.4) $$\varphi_{n_1} g' - \varphi_{n_1}' g = (\varphi_{n_1} g)^2 + \gamma \qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

をみたす。ここで $\gamma\in\mathbb{R}$ は定数である。

<u>Proof of Lemma 7</u>:

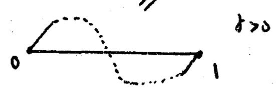
(5.5) $$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+p(x)\right)\varphi_{n_1} = \lambda_{n_1}\varphi_{n_1} \quad (0\leqq x\leqq 1), \quad \varphi_{n_1}(0)=1, \quad \varphi_{n_1}'(0)=h$$

を思い起こすと，(5.1)より

$$(\varphi_{n_1} g' - \varphi_{n_1}' g)' = \varphi_{n_1} g'' - \varphi_{n_1}'' g = 2(g\varphi_{n_1})' g\varphi_{n_1} = ((g\varphi_{n_1})^2)'$$

を得る。//

<u>Proof of Theorem 4</u>: $n_1=0$ 故，$[0,1]$ 上 $\varphi_{n_1}>0$ である。$g(0)=0$, (5.1), (5.2) なる $g\in C^2[0,1]$ が $g\equiv 0$ 以外に存在しないことを言う。$g\not\equiv 0$ とする。(5.4)において $\gamma=0$ ならば $g(0)=g'(0)=0$ となり(5.1)の Cauchy 問題の一意性より $g\equiv 0$ となる。$\gamma\neq 0$ とすると $g(x_0)=0$ なる $x_0\in[0,1]$ に対し $\mathrm{sgn}\, g'(x_0)=\mathrm{sgn}\,\gamma$ (一定)となるが，これは $g(0)=0$ 及び(5.2)より導びかれる $g(1)=0$ に反す。//

次に Theorem B の(ii)の証明にはいる。その前 

に第3種境界値問題に対する Theorem 1〜3 と同様にして，Dirichlet 問題に対する次の定理が成立つことに注意しよう。§2 の Notation 3 に留意して，

<u>Theorem 1*</u>. $g, p\in C^1_s[0,1]$ に対し，$\lambda_n^*(g)=\lambda_n^*(p)$ $(n\in\mathbb{N}^*\equiv$

$\{1,2,\cdots\})$ ならば $g\equiv p$ である。 ▨

<u>Theorem 2*</u>. $p\in C^1_s[0,1]$, $n_1\in\mathcal{N}^*\equiv\{1,2,\cdots\}$ に対し,

(5.6) $$Q^*_{p,n_1}=\{g\in C^1_s[0,1]\mid \lambda^*_n(g)=\lambda^*_n(p)\quad (n\in\mathcal{N}^*\setminus\{n_1\})\}$$

とおくと, $Q^*_{p,n_1}\neq\{p\}$ である。 ▨

<u>Theorem 3*</u>. $\lambda^*_{n_1}=\lambda^*_{n_1}(p)$, $\varphi^*_{n_1}=\varphi^*(\cdot\,;p,\lambda^*_{n_1}(p))$ とおく時, $g\in Q^*_{p,n_1}$ なるための必要十分条件は

(5.7) $$\frac{d^2}{dx^2}f=\left(2\frac{d}{dx}(f\varphi^*_{n_1})+p-\lambda^*_{n_1}\right)f\qquad (0\leq x\leq 1)$$

(5.8) $$f(1-x)=(-1)^{n_1}f(x)\qquad (0\leq x\leq 1)$$

なる $f\in C^2[0,1]$ が存在して

(5.9) $$g=p+2\frac{d}{dx}(f\varphi^*_{n_1})$$

が成立つことである。 $g\in Q^*_{p,n_1}$ と $f\in C^2[0,1]$ のこの対応は1対1で, 特に $f\neq 0$ ならば $g\neq p$ である。 ▨

これらの定理は Lemma 1~4 に対応する次の補題によって証明される:

<u>Lemma 1*</u> 与えられた $p,g\in C^1[0,1]$ に対し

(5.10.1) $$F_{xx}-F_{yy}+p(y)F=g(x)F\qquad (\bar{D}\text{上})$$

(5.10.2) $$F(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x(g(s)-p(s))ds\qquad (0\leq x\leq 1)$$

(5.10.3) $$F(x,0)=0\qquad (0\leq x\leq 1)$$

なる $F=F(x,y)=F(x,y;g;p)\in C^2(\bar{D})$ が唯一つ存在する。 ▨

<u>Lemma 2*</u> (第3変形公式). §2 Notation 2 の $\varphi^*(x;p,\lambda)$ に関して,

(5.11) $$\varphi^*(x;g,\lambda)=\varphi^*(x;p,\lambda)+\int_0^x F(x,y;g;p)\,\varphi^*(y;p,\lambda)dy$$

が成立つ。▨

<u>Lemma 3*</u>. 簡単のため $\varphi_n^*(x)=\varphi^*(x;p,\lambda_n^*(p))$ $(n\in\mathcal{N}^*)$ とおくと,
$\varphi_n^*(1-x)=(-1)^{n+1}\varphi_n^*(x)$ $(n\in\mathcal{N}^*, x\in[0,1])$ が成立つ。▨

<u>Lemma 4*</u>. $\{\varphi_{2m}^*\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\varphi_{2m+1}^*\}_{m=0}^{\infty}$ はどちらも $L^2(0,\frac{1}{2})$ の完全直交系をなす。▨

Theorem 1*~3* は Theorem 1~3 と比べると似て非なるものがある。Theorem 1~3 においては境界条件は第3種であるがその反射係数 $h\in\mathbb{R}$ は固定せずに自由に動かして考えていた。それに対して Theorem 1*~3* においては境界条件は Dirichlet に固定されている。それにもかかわらず Theorem 1*~3* の結論は Theorem 1~3 の結論と全く対応している。その理由は Lemma 1* にある。適合性の条件によって (5.10.3) から $F(0,0)=0$ であり, (5.10.2) における $F(0,0)$ を (3.6.2) のように自由に動かす余地がなくなっているのである。

順番から行くと, (5.11) を第2変形公式と呼ぶのが適当であるが, 筆者はすでにそれを別の意味で使ってしまった。[28] には第2変形公式を用いた針金の丸い輪における熱方程式などに対する筆者の Identification の研究が引用されている。

さて実は $\sigma(A_{p,h,h})=\{\lambda_n(p,h)\}_{n=0}^{\infty}$ と $\sigma(A_p^*)=\{\lambda_n^*(p)\}_{n=1}^{\infty}$ には次のような関係があるのである:

<u>Theorem 5</u>. $p,q\in C_s^1[0,1]$ と $n_1\in\mathcal{N}^*\equiv\{1,2,\cdots\}$ に対し,

$$(5.12)\qquad \lambda_n^*(p)=\lambda_n^*(q)\qquad (n\in\mathcal{N}^*\setminus\{n_1\})$$

が成立つことと，$k \in K$が存在して

(5.13) $$\lambda_n(p,k) = \lambda_n(q,k) \quad (n \in N \setminus \{n_1\})$$

が成立つこととは同値である。更にこの時 $q \neq p$ であれば

(5.14) $$\lambda_{n_1}^*(p) = \lambda_{n_1}(q,k), \qquad \lambda_{n_1}^*(q) = \lambda_{n_1}(p,k)$$

が成立つ。▨

この定理において，$n_1=0$ の時は (5.12) を $\lambda_n^*(p)=\lambda_n^*(q)$ $(n \in N^*)$ と見なすことによると Theorem 1* によってこれは $p \equiv q$ を導く。一方 Theorem 4 即ち Theorem B の (i) によって (5.13) $(n_1=0)$ からも $p \equiv q$ を得る。このように解釈すると Theorem 5 の前半は $n_1=0$ に対しても成立つ。

この奇妙な定理はそれ自身興味深いものであるばかりでなく，Theorem B の (ii) の証明に本質的な役割を果たす重要なものである。もはや紙数もオーバーし当初の予定を変更して証明を省略しなければならないのは残念であるが，現在準備中の筆者の論文を参照してくださるようにお願いいたします。

Theorem 5 をもとにして Theorem B の (ii) の証明を考えてみよう。まず §2 の Corollary の (ii)，即ち

Theorem 6. $n_1 \geq 1$, $\lambda_{n_1}^*(p) = \lambda_{n_1}(p,k)$ ならば $Q_{p,k,n_1} = \{p\}$ ▨

を示そう。実際この時 $q \in Q_{p,k,n_1}$ は (5.13) をみたす。$q \neq p$ とすると Theorem 5 より (5.14) が成立つが，仮定 $\lambda_{n_1}^*(p)=\lambda_{n_1}(p,k)$ より $\lambda_{n_1}(p,k)=\lambda_{n_1}^*(p)=\lambda_{n_1}(q,k)$ である。即ち，

$$\lambda_n(q,h)=\lambda_n(p,h)\quad(n\in\mathcal{N})$$

となり，Theorem 1 から $q\equiv p$ となって矛盾である。//

次に，

<u>Theorem 7</u>. Q_{p,h,n_1} の元で p と異なるものは高々1つ。▨

を示そう。実際 $q_1, q_2\in Q_{p,h,n_1}$, $q_\ell\not\equiv p$ $(\ell=1,2)$ とすると Theorem 5 より

$$\lambda_n^*(q_1)=\lambda_n^*(p)=\lambda_n^*(q_2)\quad(n\in\mathcal{N}^*\setminus\{n_1\})$$

$$\lambda_n^*(q_1)=\lambda_{n_1}(p,h)=\lambda_{n_1}^*(q_2)$$

であるから $\lambda_n^*(q_1)=\lambda_n^*(q_2)$ $(n\in\mathcal{N}^*)$ となり Theorem 1* より $q_1\equiv q_2$ を得る。//

以上 Theorem 6, 7 と Remark 1, 2によって結局 Theorem B の (ii) を示すには，

<u>Theorem 8</u>. $n_1\geq 1$ ならば $p-2\left(\frac{W'}{W}\right)'\in Q_{p,h,n_1}$ ▨

を証明しさえすればよいことがわかる。ここではこの定理を証明するかわりに，$p-2\left(\frac{W'}{W}\right)'$ が出て来た計算過程を述べてそれに替えたいと思う。証明の方向は，以下の考察で自ずと明らかになるものと思われる。

以下では，$n_1\geq 1$，$q\in Q_{p,h,n_1}$, $q\not\equiv p$ と仮定して，q がどのようなものでなければならないかを見たい。$\lambda_{n_1}=\lambda_{n_1}(p,h)$, $g_{n_1}=g(\cdot\,;p,h,\lambda_{n_1}(p,h))$ とおくとこの時 Theorem 3 によって

(5.34) $$\frac{d^2}{dx^2}g=\left(2\frac{d}{dx}(g\,g_{n_1})+p-\lambda_{n_1}\right)g\quad(0\leq x\leq 1)$$

(5.35) $$g(1-x)=(-1)^{n_1+1}g(x)\quad(0\leq x\leq 1)$$

なる $g \in C^2[0,1]$, $g \not\equiv 0$ が存在して

(5.36) $$g - p = 2\frac{d}{dx}(g\varphi_{n_1})$$

となる。一方 Theorem 5 及び Theorem 3* によって $\lambda_{n_1}^* = \lambda_{n_1}^*(p)$, $\varphi_{n_1}^* = \varphi_{n_1}^*(\cdot;$ $p, \lambda_{n_1}^*(p))$ に対し,

(5.37) $$\frac{d^2}{dx^2}f = \left(2\frac{d}{dx}(f\varphi_{n_1}^*) + p - \lambda_{n_1}^*\right)f \quad (0 \leq x \leq 1)$$

(5.38) $$f(1-x) = (-1)^{n_1} f(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

なる $f \in C^2[0,1]$, $f \not\equiv 0$ が存在して,

(5.39) $$g - p = 2\frac{d}{dx}(f\varphi_{n_1}^*)$$

が成立つ。ここで Theorem 5 の証明から実は

(5.40) $$\lambda_{n_1}^*(g) = \lambda_{n_1}(p,k)\ (=\lambda_{n_1}), \quad g = \text{constant} \times \varphi^*(\cdot; g, \lambda_{n_1}^*(g))$$

(5.41) $$\lambda_{n_1}(g,k) = \lambda_{n_1}^*(p)\ (=\lambda_{n_1}^*), \quad f = \text{constant} \times \varphi(\cdot; g, k, \lambda_{n_1}(g,k))$$

が成立つ。

簡単のため以下 $\lambda_{n_1} (=\lambda_{n_1}(p,k) = \lambda_{n_1}^*(g)) = \lambda$, $\lambda_{n_1}^* (=\lambda_{n_1}^*(p) = \lambda_{n_1}(g,k))$ $=\lambda^*$, $\varphi_{n_1} (=\varphi(\cdot; p, k, \lambda_{n_1}(p,k))) = \varphi$, $\varphi_{n_1}^* (=\varphi^*(\cdot; p, \lambda_{n_1}^*(p))) = \varphi^*$, $\varphi(\cdot;$ $g, k, \lambda_{n_1}(g,k)) = \chi$, $\varphi^*(\cdot; g, \lambda_{n_1}^*(g)) = \chi^*$ と書く。$f = \underset{\neq 0}{\text{constant}} \times \chi$ $g = \underset{\neq 0}{\text{constant}} \times \chi^*$ である。(5.36), (5.39) より

$$(\chi\varphi^*)' = \text{constant} \times (\chi^*\varphi)'$$

であるが, $x=0$ において (左辺) $= k \times 0 + 1 \times 1 = 1$, $(\chi^*\varphi)'(0) = 1 \times 1 + 0 \times k$ $=1$ であるので,

$$\chi\varphi^* = \chi^*\varphi + \text{constant}$$

となる。再び $x=0$ とおき,

(5.42) $$\chi\varphi^* = \chi^*\varphi$$

を得る。比較定理によってφ^*とφの一方の零点は他方の相隣る零点の間に1つづつあることがわかり、

(5.43) $$\chi^* = c\varphi^*, \quad \chi = c\varphi$$

なる $c \in C^2[0,1]$ が存在することがわかる。

(5.44) $$\alpha = \lambda - \lambda^*$$

に対し、$\chi^{*\prime\prime}\chi - \chi^*\chi'' = -\alpha\chi^*\chi$ が成立つ。これに(5.43)を代入すると、

$$(\cancel{c''\varphi^*} + 2c'\varphi^{*\prime} + c\varphi^{*\prime\prime})c\varphi - c\varphi^*(\cancel{c''\varphi} + 2c'\varphi' + c\varphi'')$$
$$= -\alpha c^2\varphi^*\varphi$$

となるが、$\varphi^{*\prime\prime}\varphi - \varphi^*\varphi'' = \alpha\varphi^*\varphi$, $c \neq 0$ より

$$c'(\varphi^{*\prime}\varphi - \varphi^*\varphi') = -\alpha c\varphi^*\varphi$$

を得る。 $W = \varphi^{*\prime}\varphi - \varphi^*\varphi'$ であったので、$W' = \alpha\varphi^*\varphi$, よって

$$c'W = -cW' \qquad 即ち \qquad (cW)' = 0$$

となる。$\varphi(0) = \chi(0) = 1$ であるから、(5.43) より $c(0)=1$, 又 $W(0) = 1\times1 - 0\times k = 1$ であるので $cW = 1$, 即ち

(5.43′) $$\chi^* = \varphi^*/W, \quad \chi = \varphi/W$$

が成立つ。

これを利用して、$q = \lambda^* + \frac{\chi''}{\chi}$ ($\because \lambda(q,k) = \lambda^*$) を求めると、$q = p - 2\left(\frac{W'}{W}\right)'$ が出て来る。実際 (5.43′) より

$$\frac{\chi''}{\chi} = \frac{\varphi''}{\varphi} + (-2\varphi'WW' + 2\varphi W'^2 - \varphi WW'')/W^2\varphi$$

$$= p - \lambda + (-2\varphi' w w' + 2\varphi w'^2 - \varphi w w'')/w^2\varphi$$

となり，

$$q = p - \alpha - \frac{2\varphi' w'}{w\varphi} + 2\frac{w'^2}{w^2} - \frac{w''}{w}$$

を得る。ここで $w' = \alpha\varphi^*\varphi$ を用いると，簡単な計算から

$$q - p = 2\left(\frac{w'^2}{w^2} - \frac{w''}{w}\right) = -2\left(\frac{w'}{w}\right)'$$

が得られる。//

§6. Outline of the proof of Theorem C.

ここでは§2 の Theorem C，即ち

Theorem 9. $p, q \in C_s^1[0,1]$, $h, j \in \mathbb{R}$, $n_1 \in \mathcal{N} \equiv \{0,1,2,\cdots\}$ に対し

(6.1) $$\lambda_n(q, j) = \lambda_n(p, h) \quad (n \in \mathcal{N} \setminus \{n_1\})$$

かつ

(6.2) $$\frac{1}{2}q(0) - j^2 = \frac{1}{2}p(0) - h^2$$

であるならば

(6.3) $$q \equiv p, \qquad j = h$$

である。▨

を示し，更にその一般化について言及したい。

Proof of Theorem 9: §2 Notation 2 の $\varphi(x; p, h, \lambda)$ を思い出し，$p \in C^1[0,1]$, $h \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

(6.4) $$\mathcal{S}(\lambda; p, h, \lambda) = \varphi'(1; p, h, \lambda) + h\varphi(1; p, h, \lambda)$$

とおくと，第1変形公式 (3.7) によって

$$\rho(\lambda; g, j) = \varphi'(1; g, j, \lambda) + j\varphi(1; g, j, \lambda)$$
$$= (\varphi'(1; p, h, \lambda) + K(1,1; g, j; p, h)\varphi(1; p, h, \lambda) + j\varphi(1; p, h, \lambda)$$
$$+ \int_0^1 \{K_x(1, y; g, j; p, h) + jK(1, y; g, j; p, h)\}\varphi(y; p, h, \lambda)\,dy$$

を得る。$\lambda_{n_1} = \lambda_{n_1}(p, h)$, $\varphi_{n_1} = \varphi_{n_1}(p, h)$ と書くと、§4 の Theorem 3 の証明によって、仮定 (6,1) のもとでは K は

(6.5) $$\frac{d^2}{dx^2}g = \left(2\frac{d}{dx}(g\varphi_{n_1}) + p - \lambda_{n_1}\right)g \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

(6.6) $$g(1-x) = (-1)^{n_1+1}g(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

なる $g \in C^2[0,1]$ を用いて、

(6.7) $$K(x, y; g, j; p, h) = g(x)\varphi_{n_1}(y)$$

と表わされており、(4.6.1) によって $K(1,1; g, j; p, h) = h - j$ であるので、

(6.8) $$\rho(\lambda; g, j) = \rho(\lambda; p, h) + (g'(1) + jg(1))\int_0^1 \varphi_{n_1}(y)\varphi(y; p, h, \lambda)\,dy$$

となる。一般に

$$(\lambda - \mu)\int_0^1 \varphi(y; p, h, \mu)\varphi(y; p, h, \lambda)\,dy$$
$$= [\varphi'(y; p, h, \mu)\varphi(y; p, h, \lambda) - \varphi(y; p, h, \mu)\varphi'(y; p, h, \lambda)]_{y=0}^{y=1}$$
$$= \varphi'(1; p, h, \mu)\varphi(1; p, h, \lambda) - \varphi(1; p, h, \mu)\varphi'(1; p, h, \lambda)$$

であるから、$a = g'(1) + jg(1)$ とおく時、

(6.9) $$(\lambda - \lambda_{n_1})\rho(\lambda; g, j) = (\lambda - \lambda_{n_1})\rho(\lambda; p, h) + a\{\varphi'_{n_1}(1)\varphi(1; p, h, \lambda) - \varphi_{n_1}(1)\varphi'(1; p, h, \lambda)\}$$
$$= (\lambda - \lambda_{n_1} - a\varphi_{n_1}(1))\rho(\lambda; p, h) \qquad (\because \varphi'_{n_1}(1) = -h\varphi_{n_1}(1))$$

が成立つ。従ってもし

(6.10) $$a \equiv g'(1) + j\, g(1) = 0$$

であるならば

(6.11) $$\rho(\lambda; g, j) = \rho(\lambda; p, k)$$

となる。$\rho(\cdot; p, k) = 0$ の零点全体が $\{\lambda_n(p,k)\}_{n=0}^{\infty}$ であり、いずれも単純（[19]）であるので、

(6.12) $$\lambda_n(g, k) = \lambda_n(p, k) \quad (n \in \mathcal{N})$$

となり、Theorem 1 によって (6.3) が成立つ。

さて a を計算しておこう。Theorem 3 により

(6.13) $$g - p = 2\frac{d}{dx}(g\varphi_{n_1}), \quad j - k = g(0) \; (= (g\cdot\varphi_{n_1})(0))$$

であるので、

$$a = g'(1) + j\, g(1) = \pm(g'(0) - j\, g(0)) \quad (\because (6.6))$$
$$= \pm(g'(0) - j\, g(0))\varphi_{n_1}(0) = \pm\{(g\varphi_{n_1})'(0) - g(0)\varphi_{n_1}'(0) - j\, g(0)\varphi_{n_1}(0)\}$$
$$= \pm\{(g\varphi_{n_1})'(0) - (j+k)(g\varphi_{n_1})(0)\}$$
$$= \pm\{\tfrac{1}{2}(g(0) - p(0)) - (j+k)(j-k)\}$$

となり、(6.2) の時確かに $a = 0$ であることがわかる。//

Theorem 9（即ち Theorem C）は次のように一般化することができる。その前に次の事実がある：

<u>Theorem 10</u> $\Sigma = \{n_\ell \mid 1 \le \ell \le N\} \subset \mathcal{N}$ を有限集合，$p, g \in C_S^1[0,1]$，$k, j \in \mathbb{R}$ とする時，

(6.14) $$\lambda_n(g, j) = \lambda_n(p, k) \quad (n \in \mathcal{N} \setminus \Sigma)$$

であるならば，

(6.15) $$r \equiv g - p \in C^2[0,1]$$

である。∎

これに留意して、

<u>Theorem 11</u>. $p, g \in C^1_s[0,1]$, $h, j \in \mathbb{R}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \neq n_2$ とする時,

(6.16) $$\lambda_n(g,j) = \lambda_n(p,h) \quad (n \neq n_1, n_2)$$

(6.17) $$\frac{1}{2} r(0) = (j-h)(j+h) \quad (\Leftrightarrow (6.2))$$

(6.18) $$\frac{1}{2} r''(0) = \frac{1}{2}(j-h)(p'(0)+g'(0)) + (j+h) r'(0) - (j-h)(j+h)(j^2+4jh+h^2)$$

ならば、(6.3) が成立つ。∎

(6.16)を更にゆるめた時、それをrecoverするような(6.17)(6.18)のような条件があるものと期待されるが未だ求め得ていない。但し、その時は p, g の境界点 $x=0$ における微分可能性をもっと高く仮定する必要があるように思われる。

References

[1] Ambarzumian, V., Z. Phys., 53 (1929) 690-695.

[2] Borg, G., Acta Math., 78 (1946) 1-96.

[3] Chadan, K., Sabatier, P.C., Inverse problems in quantum scattering theory, Springer-Verlag, New York Heiderberg Berlin, 1977.

[4] Deift, P., Trubowitz, E., Comm. Pure Appl. Math., 32 (1979) 121-251.

[5] Faddeev, L.D., Uspehi Mat. Nauk. 14 (1959) no.4 (88) 57-119; English transl., J. Math. Phys., 4 (1963) 72-104.

[6] ——. Trudy Mat. Inst. Steklov 73 (1964) 314-336; English transl., A.M.S. Transl. ser. 2., 65 (1967) 139-166.

[7] Flashka, H., Arch. Rat. Mech. Anal., 59 (1975) 293-304.

[8] Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal,M.D., Miura, R.M., Pys. Rev. Lett., 19 (1967) 1095-1097.

[9] Gel'fand, I.M., Levitan, B.M., Izvest. Akad. Nauk. SSSR 15 (1951) 309-360; English transl., A.M.S. Transl. ser. 2., 1 (1955) 253-304.

[10] Goldberg, W., J. Math. Anal. Appl., 55 (1976) 549-554.

[11] Hochstadt, H., Arch. Rat. Mech. Anal., 19 (1965) 353-362.

[12] ——, Comm. Pure Appl. Math., 26 (1973) 715-729.

[13] ——, Lieberman, B., SIAM J. Appl. Math., 34 (1978) 676-680.

[14] Kitamura, S., Nakagiri, S., SIAM J. Control & Optimization, 15 (1977) 785-802.

[15] Krein, M.G., Dokl. Akad. Nauk. SSSR., 87 (1952) 881-884.

[16] Levin, B.Y., Distributions of zeros of entire functions,; English transl., A.M.S. Providence, Rhode Island, 1964.

[17] Levinson, N., Mat. Tidsskr, B., (1949) 25-30.

[18] Levitan, B.M., Gasymov, M.G., ; English transl., Russian Math. Surveys, 19 (1964) 1-63.

[19] Levitan, B.M., Sargsjan, Introduction to spectral thory,; English transl., A.M.S. Providence, Rhode Island, 1975.

[20] Magnus, W., Winkler, S., Hill's equation, Dover, New York, 1979.

[21] Marchenko, V.A., Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 104 (1955) 695-698.

[22] Mckean, H.P., Morebeke, P., Inv. Math., 30 (1975) 217-274.

[23] Mizutani, A., to appear.

[24] Picard, E., Leçons sur quelques types simples d'equation aux dérivées partielles, Paris-Imprimerie Gauthier-Villars, Paris, 1950. (山口昌哉・田村祐三訳, 偏微分方程式論, 現代数学社,1977).

[25] Suzuki, T., 熱方程式の逆問題, C&A セミナー会報 16, 13-20; 17, 10-11 (1981).

[26] ——, 熱方程式の逆問題, 数学 34 (1982) 55-64.

[27] ——, IN Glowinski, R., Lions, J.L. (eds.). Computing Me-

thods in Applied Sciences and Engineering, V., 659-668, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[28] ——, to appear in"U.S.-Japan seminar on nonlinear partial differential equations in applied sciences"

[29] ——, Murayama, R., Proc. Japan Akad., 56 (1980) 259-263.

[30] 田中俊一・伊達悦朗，KdV 方程式，紀伊国屋書店，1979.

[31] 谷内俊弥・西原功修，非線形波動，岩波書店，1977.

[32] 戸田盛和，非線形格子力学，岩波書店，1978.