数理解析研究所講究録
486巻 1983年 67-84

6. 非線形方程式の解法

日大生産工学部 平野菅保 (Sugayasu Hirano)
亀井光雄 (Mitsuo Kamei)
布広永示 (Eiji Nunohiro)

0. 序

非線形方程式の解を求める場合、一般に、繰り返し法を多く用いている。しかし、解が近接根，複素根であるとき、出発値を定めること、あるいは解が複素平面上のある範囲内に存在しないとき、その存在しないことを知ること等は困難である。一方、近年電子計算機によって、微分に関しては問題の少ない数式処理を比較的容易に使用できるようになってきたので、数式処理を用いて非線形方程式に含まれる関数の微分を行ない、非線形方程式の解を求める数値解法を以下に述べる。

1. 数式処理によるテーラー展開

非線形方程式

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

の解を求める場合、関数 $f(x)$ の高次微分

$$\overset{(i)}{f}(x) \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots \tag{2}$$

を数式処理によって求め、$x = x_0$ を関数 $f(x)$ (1), $\overset{(i)}{f}(x)$ (2) に代入し、非線形方程式 (1) を $x = x_0$ でテーラー展開する。

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \overset{(i)}{f}(x_0) \cdot (\Delta x)^i / i! = 0 \tag{3}$$

$x = x_0$ における初期値が与えられている微分方程式の解の零点を求める場合も、数式処理を用いて、与えられている微分方程式から $\overset{(i)}{f}(x_0)$ (2) を求め、与えられている初期値を代入することによって、方程式 (3) が得られる。

2. ニュートン法

非線形方程式 (1) が与えられている場合、非線形方程式 (3) の $i=2$ 以上の項を無視したニュートン法を用いる。

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) / f'(x_k) \qquad k = 0, 1, 2, \cdots\cdots \tag{4}$$

電子計算機を用いて、適当な出発値 x_0 からニュートン法で計算すると、簡単に解を求められるときもあるが、①出発値 x_0 から遠く離れた解が求められたり、②収束の速度が遅かったり、ときには、③解に収束しなかったりする。

3. 重根

非線形方程式 (1) の係数がすべて実数であり、かつ、解がすべて複素数である場合、出発値 x_0 を実数にとって、ニュートン法で解 x を求めると、計算途中における計算値には虚数成分がなく、複素解 x を求めることができない。したがって

、非線形方程式（1）の係数がすべて実数であり、かつ、非線形方程式（1）が実数であるn重根（nは偶数）を含んでいる場合、係数に入っている丸め誤差のため、実数であるべきn重根の解がn個の複素解になっていると、非線形方程式（1）のn重根の解を求めるため、出発値を実数とすると、ニュートン法によって解を求める計算で、計算桁数をいくら増加しても、n重根の近似解を求めることはできない。

そこで、非線形方程式（3）の$i=3$以上の項を無視する。

$$f(x_k)+f'(x_k)\cdot(\Delta x)+f''(x_k)\cdot(\Delta x)^2/2!=0 \qquad (5)$$

代数方程式（5）から得られる2つの解の中で絶対値の小さい解Δx_{min}を採用して、（$k+1$）回目の近似解

$$x_{k+1}=x_k+\Delta x_{min} \qquad (6)$$

を求める。2次方程式（5）の係数が実数であっても、2次方程式（5）の判別式が

$$\{f'(x_k)\}^2-4\cdot\{f''(x_k)/2!\}\cdot f(x_k)<0$$

となると、2次方程式（5）の解Δx_{min}は虚数成分を含み、k回目までの近似解が実数であっても、（$k+1$）回目の近似解x_{k+1}は複素数となる。

関数$f(x)$を有限次数の多項式に変形できる場合、非線形方程式（1）がn重根を含んでいると、関数$f(x)$を多項式に変形して、代数方程式として解を求めると、解の精度は計算

桁数の $1/n$ 桁となるが、非線形方程式（3）の高次項を無視した繰り返し法（4），または（5）、（6）で解を求めると、解の精度が計算桁数の $1/n$ 桁より良い場合がある。

例1　$$f(x)=(x-a_0)(x^2-a_1)-a_2=0 \qquad (1-1)$$

ただし、a_0，a_1，a_2の有効桁数は計算桁数mに等しい。

3次の非線形方程式（1－1）において

$$\begin{aligned} |a_0^2-a_1| &\leqq min(|a_0^2|,|a_1|)\cdot 10^{-m} \\ |a_2| &\leqq |a_0\cdot a_1|\cdot 10^{-m} \end{aligned} \qquad (1-2)$$

であると、2つの解x_1, x_2の上位m桁は一致する。しかし、3次の非線形方程式（1－1）を展開して得られる

$$g(x)=x^3-a_0x^2-a_1x+C_0=0 \qquad (1-3)$$

$$C_0=a_0\cdot a_1-a_2$$

ただし、零次の係数C_0は$a_0\cdot a_1-a_2$ をm桁で計算して得られるm桁の1つの定数である。

から得られる2つの解x_1, x_2はC_0をm桁で計算するときに入る丸め誤差により、上位ほぼ$m/2$ 桁しか一致しない。

そこで、数式処理を用いて、3次の非線形方程式（1－1）を$x=x_k$ でテーラー展開し、

$$f(x_k+\Delta x)=f(x_k)+f'(x_k)\cdot(\Delta x)+f''(x_k)\cdot(\Delta x)^2/2! + f'''(x_k)\cdot(\Delta x)^3/3!=0 \qquad (1-4)$$

$$f(x_k)=(x_k-a_0)\cdot(x_k^2-a_1)-a_2$$

$$f'(x_k) = (x_k^2 - a_1) + 2x_k(x_k - a_0)$$

$$f''(x_k)/2! = 2x_k + (x_k - a_0) \qquad f'''(x_k)/3! = 1$$

を得る。ニュートン法の繰り返し計算で毎回 $f(x_k)$, $f'(x_k)$ を計算すれば、解 x_1 の有効桁数は m となる。

4. 根の存在範囲と出発値

非線形方程式（3）から代数方程式

$$f_j(\Delta x) = f(x_0) + \sum_{i=0}^{j} f^{(i)}(x_0)\cdot(\Delta x)^i / i! = 0 \qquad (7)$$

$$j = 1, 2, \cdots\cdots$$

を求め、次いで、代数方程式（7）の解

$$\Delta x_{jk} \qquad k = 1, 2, \cdots\cdots, j \qquad (8)$$

をそれぞれ求める。

一般に、j を大きくすると、$f_j(\Delta x)$（7）から得られる解 Δx_{jk} の絶対値は大きくなり、x_0 の近傍から離れた解となる。しかし、非線形方程式（1）の解が x_0 の近傍にあると

$$\Delta x_{jk} = \Delta x_{j'k'} \qquad j \neq j' \qquad (9)$$

なる Δx_{jk} が存在する。したがって、非線形方程式（1）の解が x_0 の近傍に複数個ある場合、まず、近似解を（8），（9）によって求め、それらの近似解を出発値として、ニュートン法により、非線形方程式（1）の解を求める。

次に、例を5つあげる。

図中の○には非線形方程式（1）の解が存在する。

代数方程式（7）の解を表わす「・」の傍にある数字は、その解がその数字で表わされる次数 j の代数方程式（7）の解であることを示す。

例2　$f(x)=\sin x$　　解の分布を図Ⅰ，Ⅰ′に示す。

解　$x_1=0$，$x_2, x_3=\pm\pi$，$x_4, x_5=\pm 2\pi$

$x_6, x_7=\pm 3\pi$　　$x_0=0.$

例3　$f(x)=-\sin x+0.707107x+0.151741$

$x_0=0.$　　解の分布を図Ⅱ，Ⅱ′に示す。

解　$x_1, x_2= 0.78540245\cdots\cdots \pm 0.00525351\cdots\cdots i$

$x_3=-1.6266250\cdots\cdots$

$x_4, x_5= 7.5453647\cdots\cdots \pm 2.4363277\cdots\cdots i$

$x_6, x_7= -7.5344815\cdots\cdots \pm 2.3805796\cdots\cdots i$

例4　$f(x)=e^{-x}+0.367879x-0.735758$

$x_0=0.$　　解の分布を図Ⅲ，Ⅲ′に示す。

$x_1, x_2= 1.00000079\cdots\cdots \pm 0.00154869\cdots\cdots i$

$x_3, x_4= -1.0888417\cdots\cdots \pm 7.4614894\cdots\cdots i$

例5　$f(x)=-e^{-x^2}-0.632121x+1.10601$

$x_0=1.0$　　解の分布を図Ⅳ，Ⅳ′に示す。

$x_1=0.36045561\cdots\cdots$　　$x_2=1.6434683\cdots\cdots$

$x_3=0.35899085\cdots\cdots$

$x_4, x_5= 1.963\cdots\cdots \pm 2.026\cdots\cdots i$

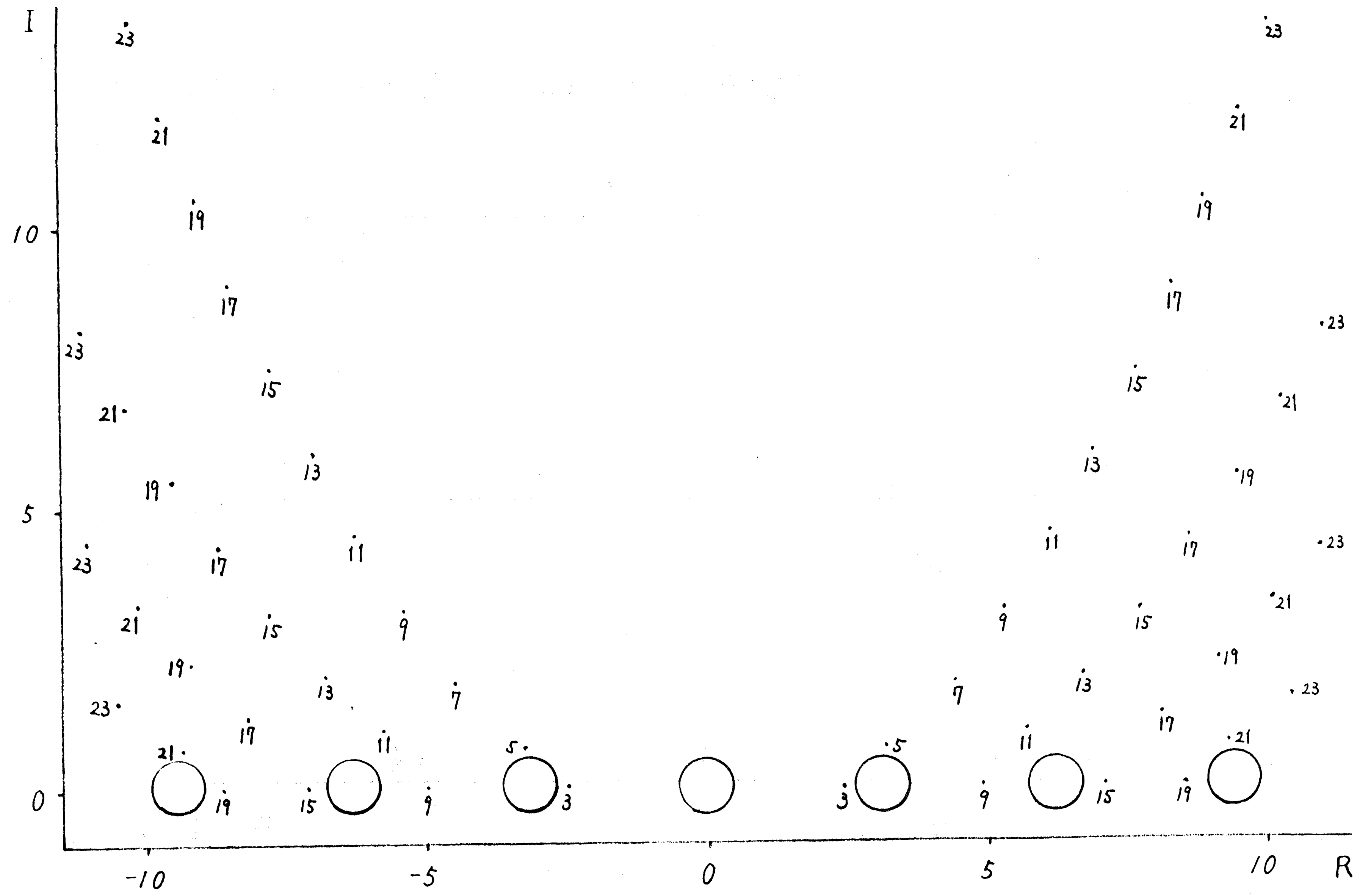
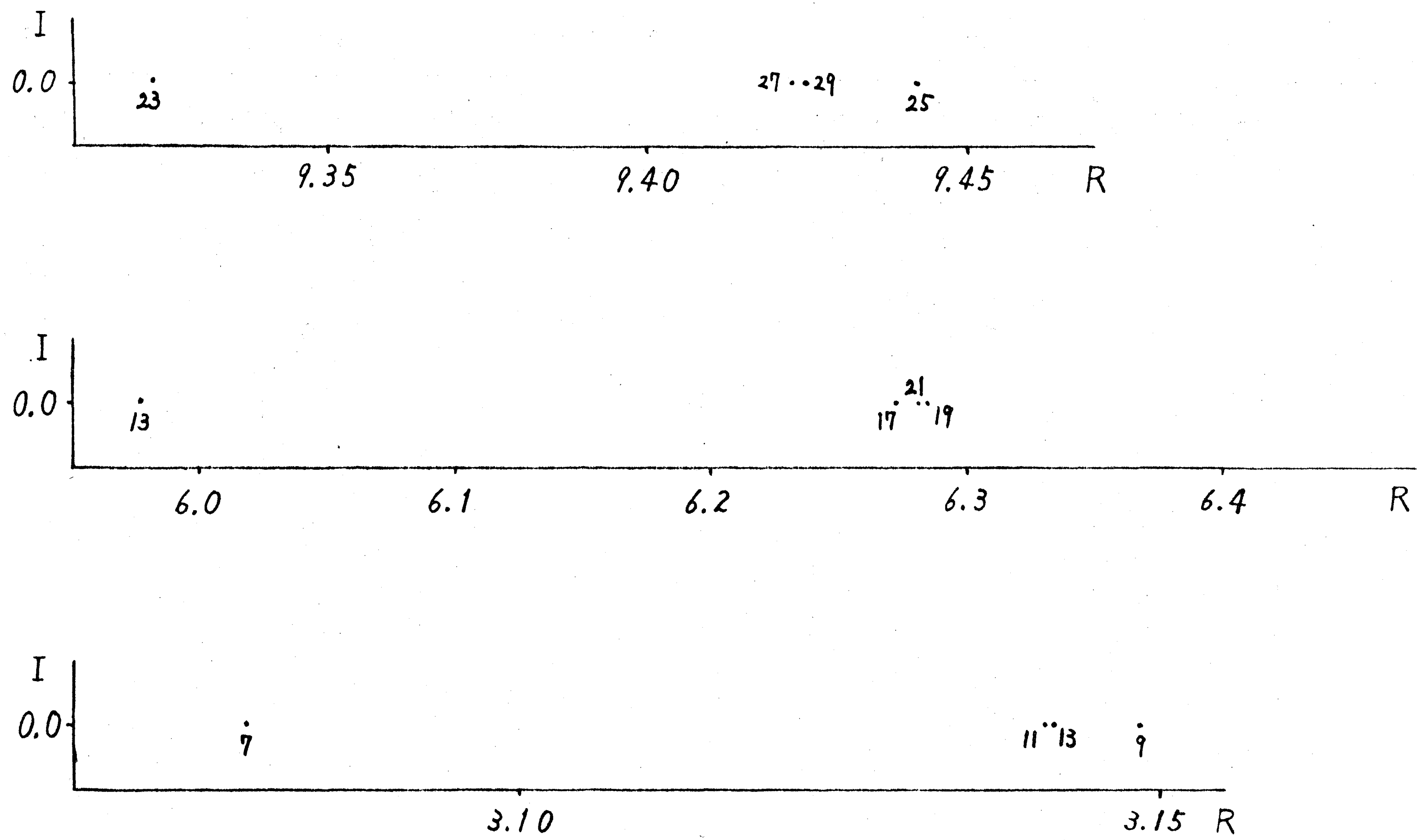
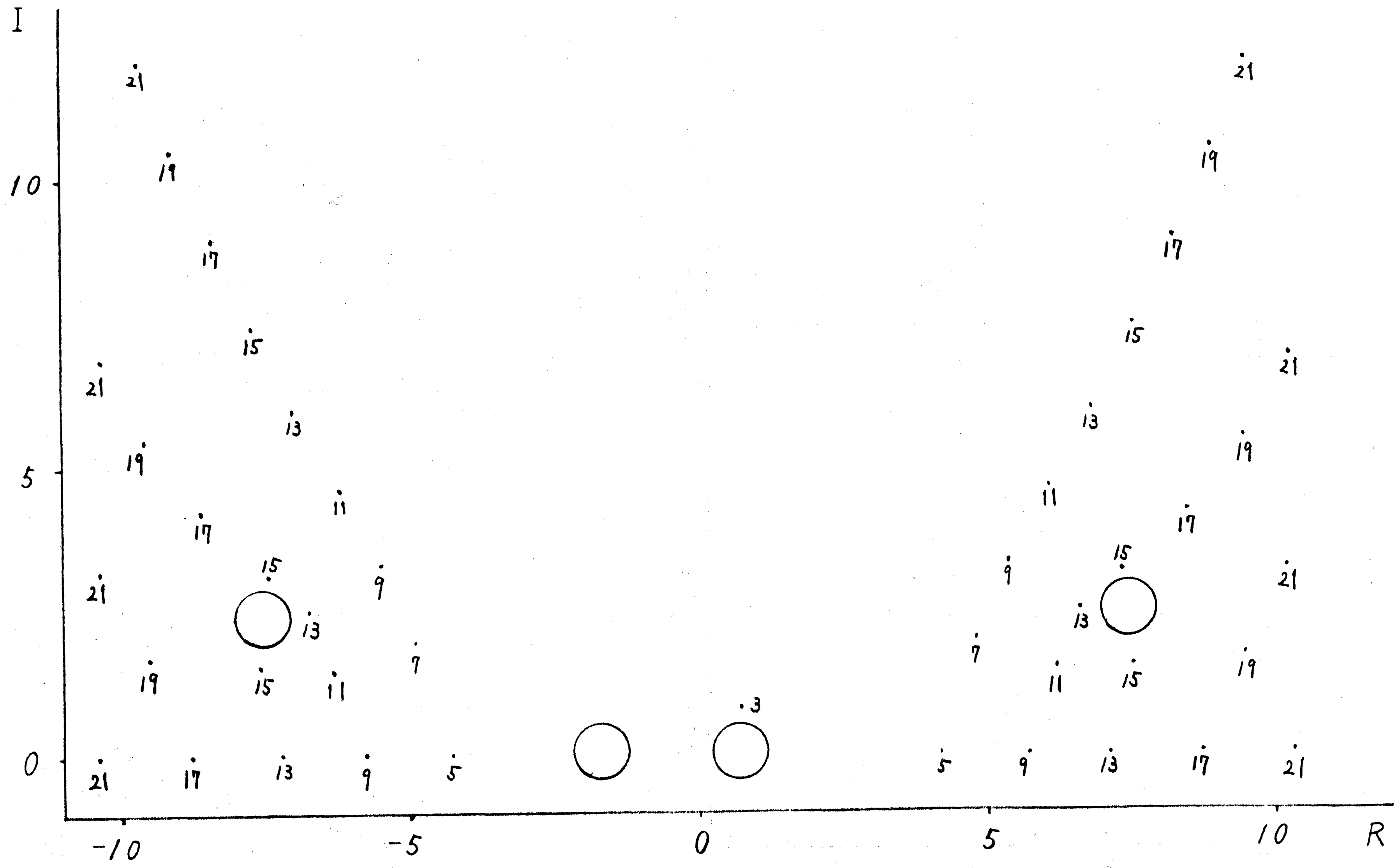


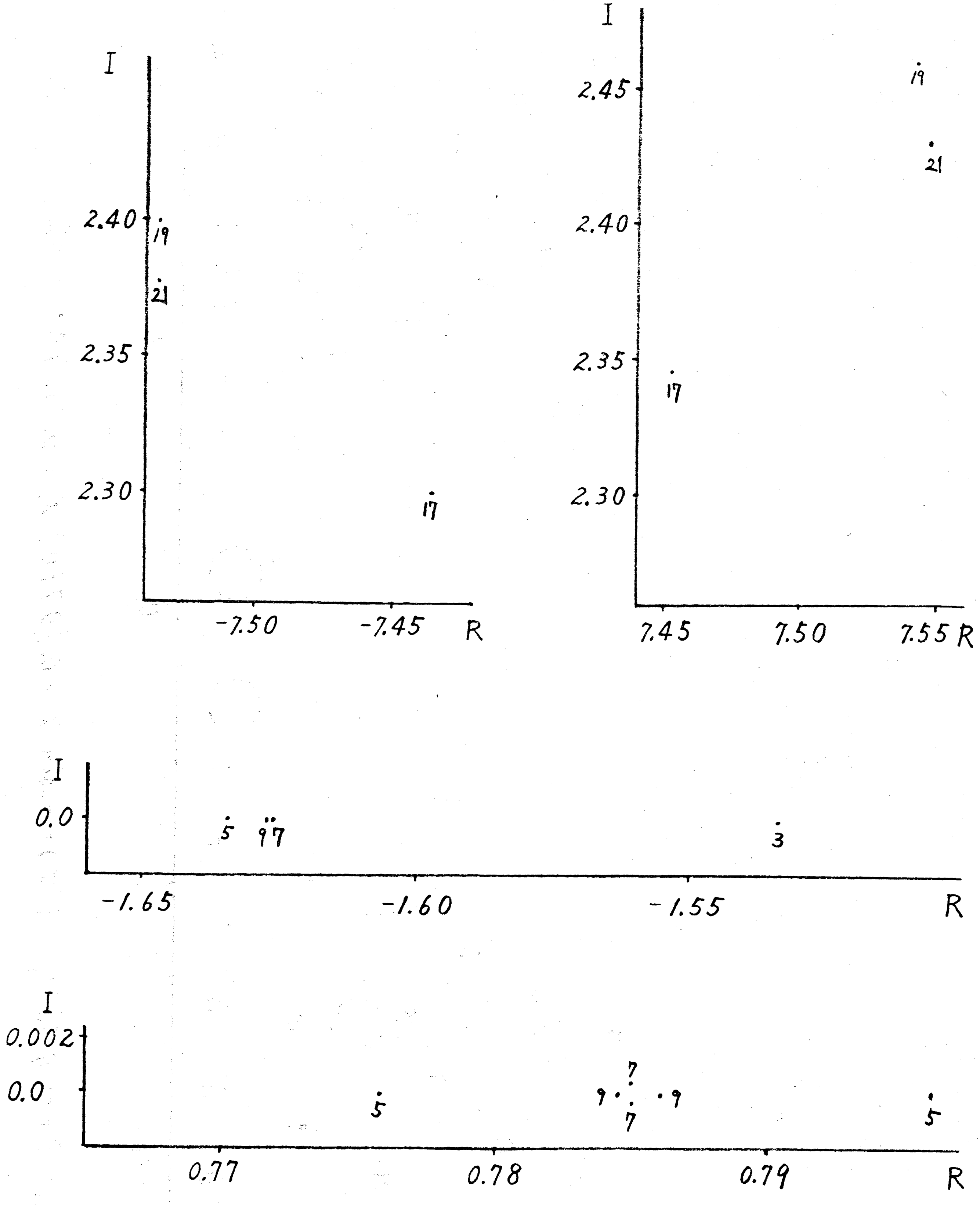
図 I　解の分布図　$f(x) = \sin x$ の場合　　$x_0 = 0.$



図I′ 解の分布図 $f(x)=\sin x$ の場合 $x_0=0.$

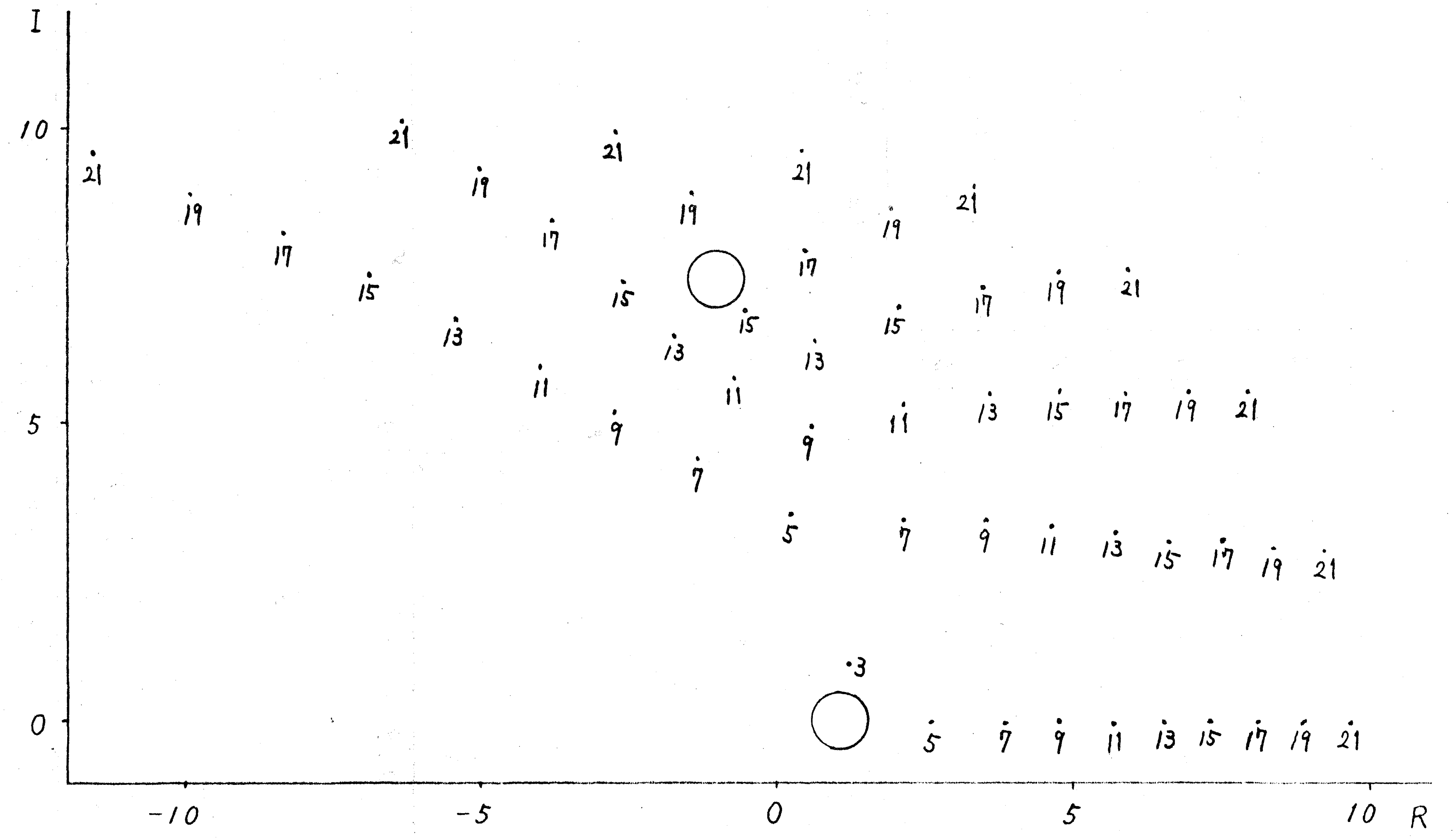


図II 解の分布図 $f(x) = -\sin x + 0.707107x + 0.151741$ の場合 $x_0 = 0.$



図Ⅱ′ 解の分布図

$f(x) = -\sin x + 0.707107x + 0.151741$ の場合　$x_0 = 0.$



図III　解の分布図　$f(x)=e^{-x}+0.367879x-0.735758$ の場合　$x_0=0.$

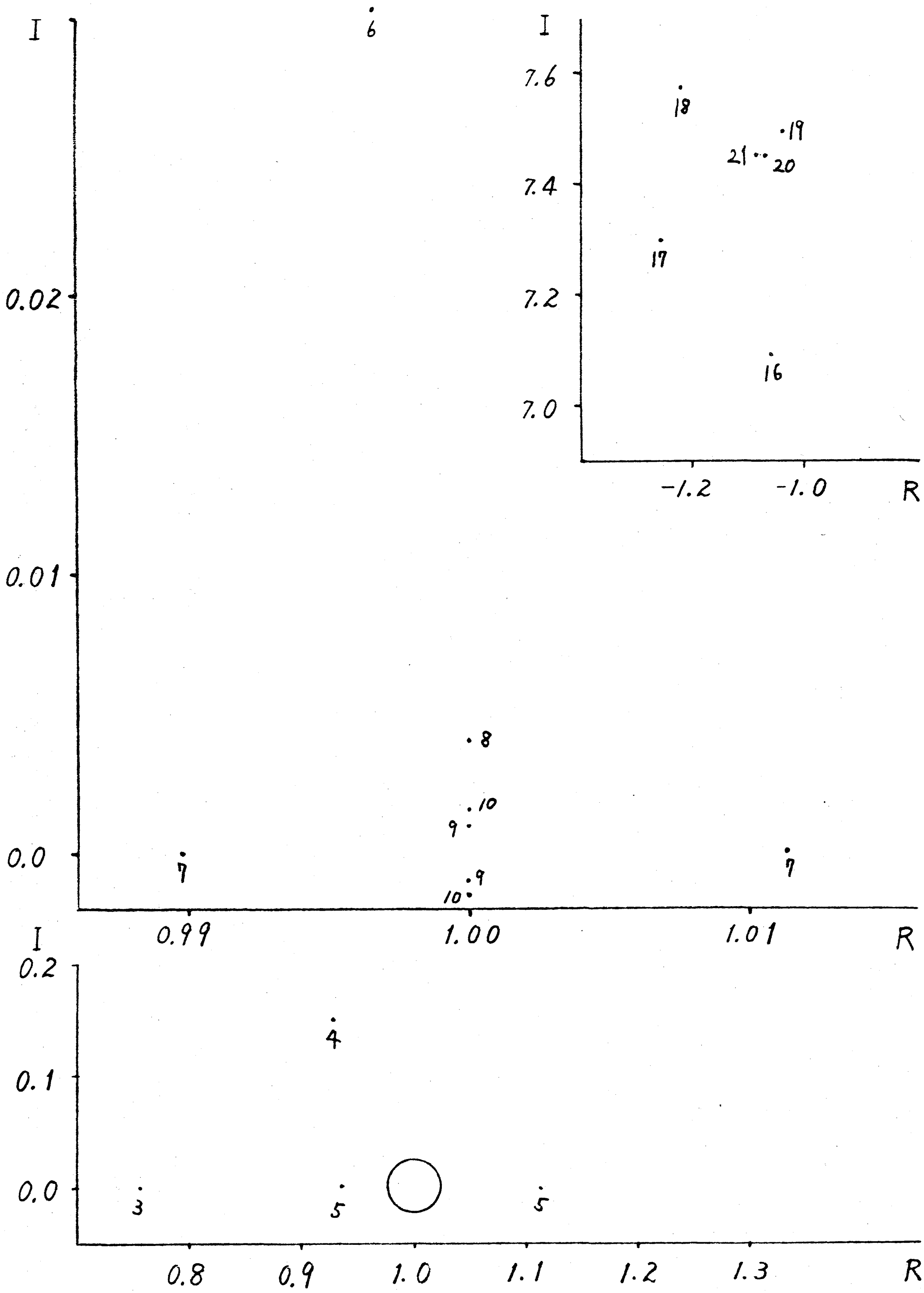
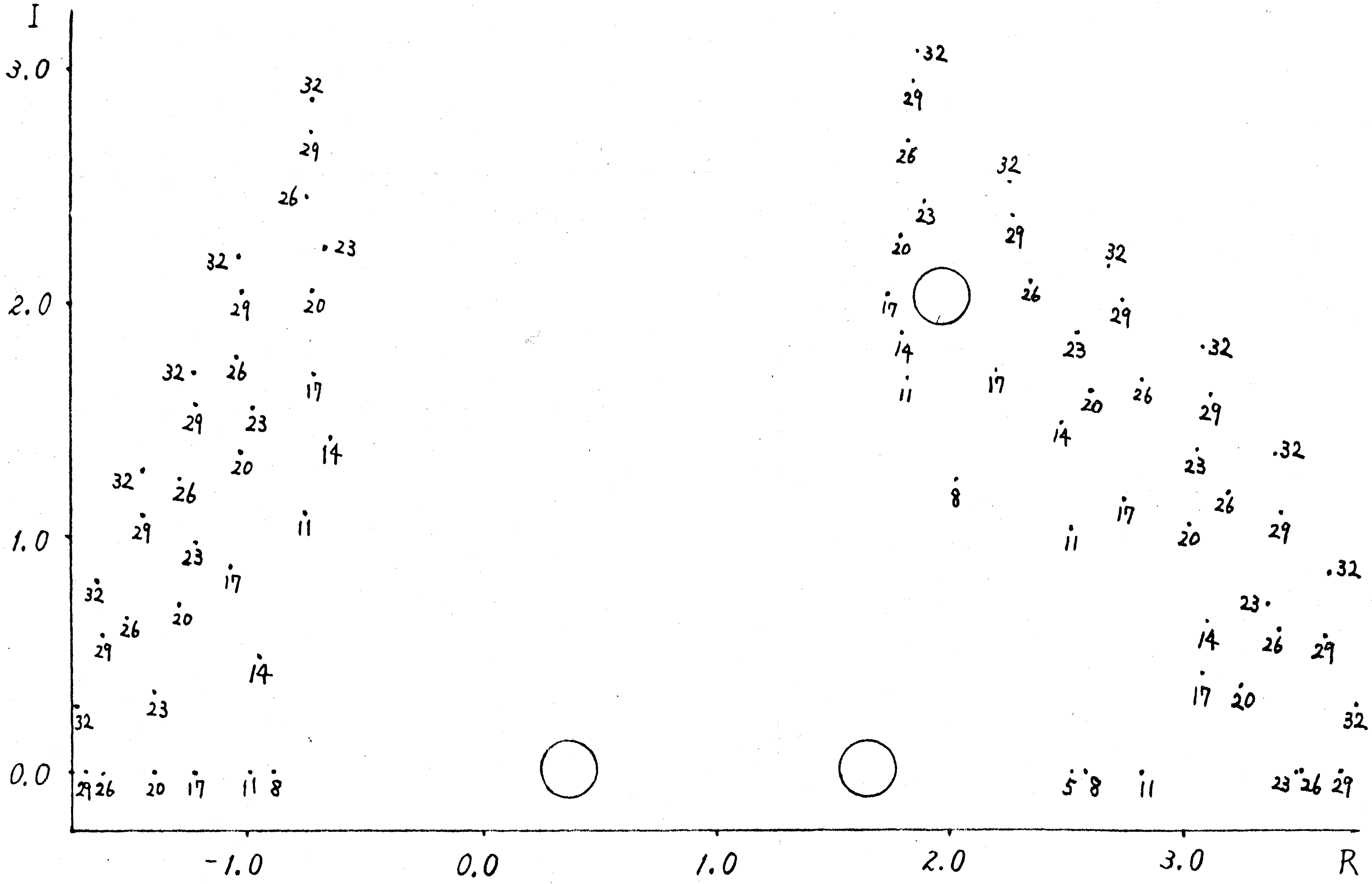
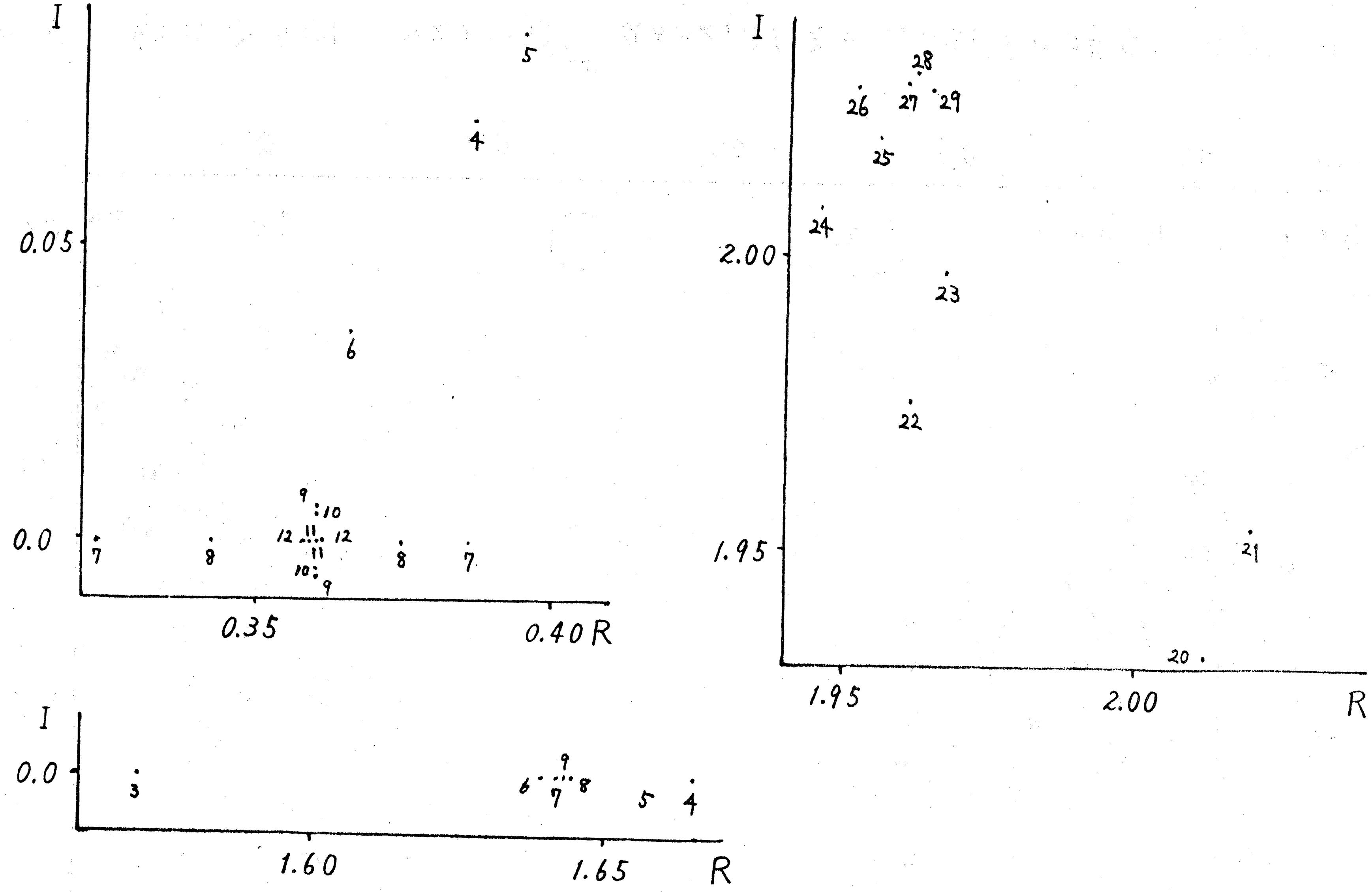


図 III′ 解の分布図

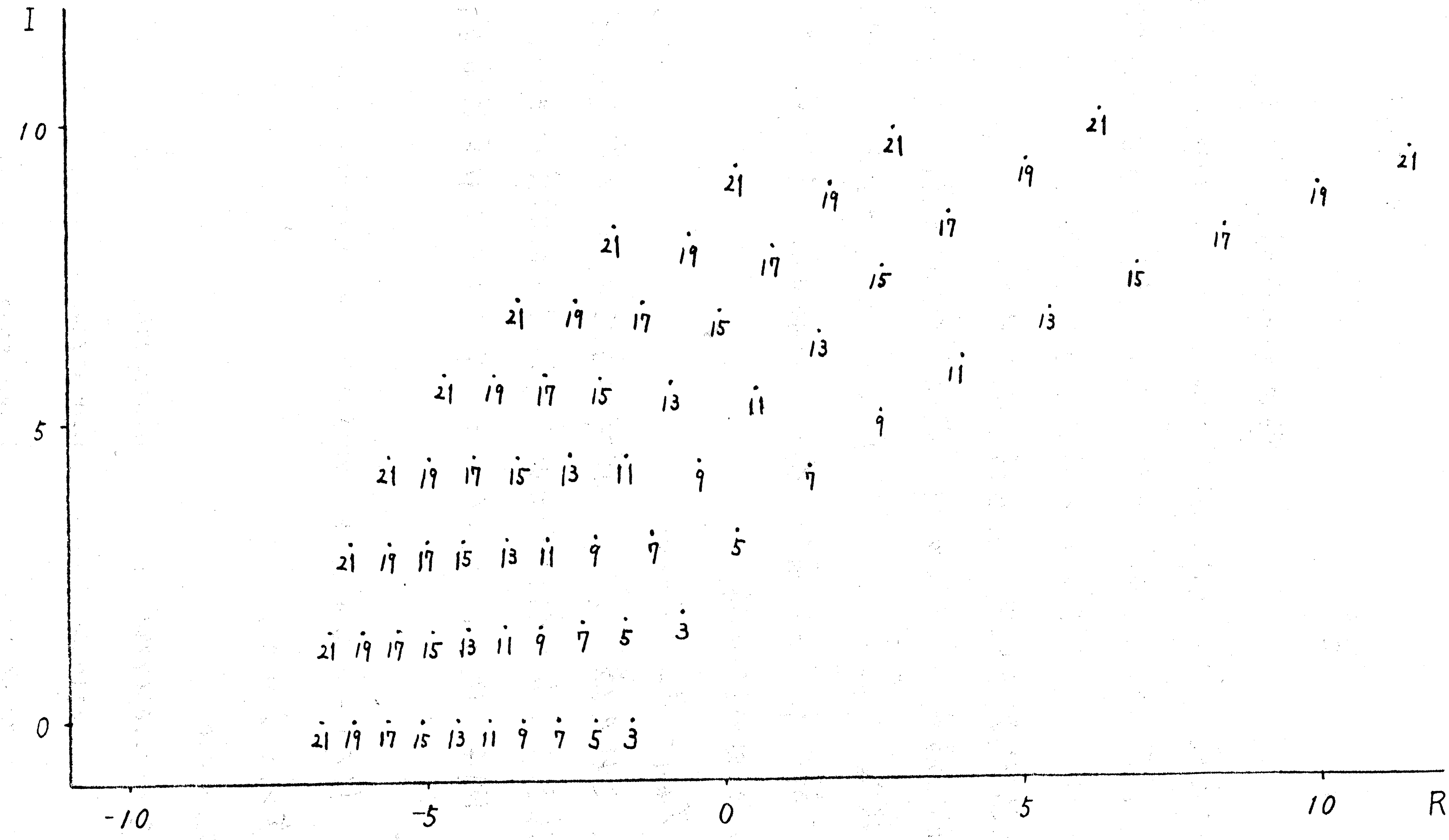
$f(x)=e^{-x}+0.367879x-0.735758$ の場合 $x_0=0.$



図Ⅳ　解の分布図　$f(x)=-e^{-x^2}-0.632121\,x+1.10601$ の場合　$x_0=1.0$



図Ⅳ′ 解の分布図 $f(x)=-e^{-x^2}-0.632121x+1.10601$ の場合 $x_0=1.0$



図Ⅴ　解の分布図　$f(x)=-e^{x}$ の場合　　$x_0=0.$

例6　$f(x) = -e^{x}$

$x_0 = 0.$　　　　解の分布を図Ⅴに示す。

非線形方程式（1）の解が図上に存在しない例が例6である。代数方程式（7）の次数jをだんだん大きくすると、解の絶対値はそれに応じてだんだん大きくなっていく。

5.　近似代数方程式による繰り返し法

非線形方程式（3）の（$m+1$）次以上の項を無視して得られる

$$f(x_k) + \sum_{i=1}^{m} f^{(i)}(x_k) \cdot (\Delta x)^{i} / i! = 0 \qquad m \geq 2 \qquad (10)$$

のm個の解の中で絶対値が一番小さい解Δx_{min}を採用して（$k+1$）回目の近似解

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_{min} \qquad (11)$$

を求め、これの繰り返しで、非線形方程式（1）の解を求める。近接根を多くもつ解ほどmが大きいほうが収束が速い。

例3，例4，例5について、3，5，7次で収束計算を行なった。

例3　$f(x) = -\sin x + 0.707107\,x + 0.151741 = 0$

3次式（$j = 3$）

$x_0 = 0.0$

$x_1 = 0.76667748$ ------ $+ 0.07762143$ ------ i

$x_2 = 0.78519465$ ------ $+ 0.00537348$ ------ i

$x_3 = 0.78540245$ ------ $+ 0.00525351$ ------ i

5 次式 ($j = 5$)

$x_0 = 0.0$

$x_1 = 0.77715911 \cdots\cdots$

$x_2 = 0.78540245 \cdots\cdots \quad + 0.00525351 \cdots\cdots i$

7 次式 ($j = 7$)

$x_0 = 0.0$

$x_1 = 0.78539755 \cdots\cdots \quad + 0.00533661 \cdots\cdots i$

$x_2 = 0.78540245 \cdots\cdots \quad + 0.00525351 \cdots\cdots i$

例4 $f(x) = e^{-x} + 0.367879\,x - 0.735758 = 0$

3 次式 ($j = 3$)

$x_0 = 0.0$

$x_1 = 0.75669830 \cdots\cdots$

$x_2 = 0.98369183 \cdots\cdots$

$x_3 = 1.00000152 \cdots\cdots \quad + 0.00154686 \cdots\cdots i$

$x_4 = 1.00000079 \cdots\cdots \quad + 0.00154869 \cdots\cdots i$

5 次式 ($j = 5$)

$x_0 = 0.0$

$x_1 = 0.93425265 \cdots\cdots$

$x_2 = 1.00000081 \cdots\cdots \quad + 0.00154861 \cdots\cdots i$

$x_3 = 1.00000079 \cdots\cdots \quad + 0.00154869 \cdots\cdots i$

7 次式 ($j=7$)

$x_0 =$ 0.0

$x_1 =$ 0.98956982 ------

$x_2 =$ 1.00000079 ------ + 0.00154869 ------ i

例 5 $f(x) = -e^{-x^2} - 0.632121\, x + 1.10601 = 0$

3 次式 ($j=3$)

$x_0 =$ 1.0

$x_1 =$ 0.52478063 ------

$x_2 =$ 0.36044359 ------ + 0.00692301 ------ i

$x_3 =$ 0.36045508 ------ + 0.00000001 ------ i

$x_4 =$ 0.36045561 ------

5 次式 ($j=5$)

$x_0 =$ 1.0

$x_1 =$ 0.39526154 ------ + 0.08671003 ------ i

$x_2 =$ 0.36048853 ------ + 0.00000587 ------ i

$x_3 =$ 0.36045561 ------

7 次式 ($j=7$)

$x_0 =$ 1.0

$x_1 =$ 0.38556905 ------

$x_2 =$ 0.36045561 ------