数理解析研究所講究録
486巻 1983年 49-66

5. 連立1階常微分方程式の形式整級数解の近似計算法

電通大情数工　藤瀬哲朗
(Teturo Huzise)

1 はじめに

常微分方程式の初期値問題の数値解を求める古典的な方法にTaylor法がある．この方法では，形式整級数解の有限項の打切り近似解を計算するために方程式の構造を接続行列によって表現し，漸化式を導くことが行われる[1,2,5]．一方，1979年のEUROSAMにおいてGeddes[3]はYun[6]やLipson[4]らによるp-adic構成や代数方程式の解法のために用いたNewton法を1元1階常微分方程式に適用し，その有効性を示した．ここでは，このGeddesの考察をある種の連立1階常微分方程式の初期値問題に対して拡張し，簡単な一般化を行う．なお，収束半径についてなどの解析的議論には立入らない．

2 基本定義

$y=(y^1,\cdots,y^n)^T$, $y'=(y^{1\prime},\cdots,y^{n\prime})^T$ とする．Fを標

数0の体（$\mathbb{Q}$と考えてよい），$D=\mathbb{F}[[x]]$, $R=D[y, y'] \equiv D[y^1, \dots, y^n, y'^1, \dots, y'^n]$

とし，$\mathbb{F}^n, D^n, R^n$をそれぞれ$\mathbb{F}, D, R$上のn次元ベクトル空間，

$M_n(\mathbb{F})$, $M_n(D)$をそれぞれ$\mathbb{F}$, D上のn次行列環と定義する．

次節以降で

$$f_i = (f_i^1, \cdots, f_i^n)^T \in \mathbb{F}^n \ (i=0,1,2,\cdots),$$

$$a_i = \begin{pmatrix} a_i^{11} & \cdots & a_i^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_i^{n1} & \cdots & a_i^{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}) \ (i=0,1,2,\cdots)$$

に対して

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \cong \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i^1 x^i, \cdots, \sum_{i=0}^{\infty} f_i^n x^i\right)^T,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \cong \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} a_i^{11} x^i & \cdots & \sum_{i=0}^{\infty} a_i^{1n} x^i \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i^{n1} x^i & \cdots & \sum_{i=0}^{\infty} a_i^{nn} x^i \end{pmatrix}$$

と扱うために必要な定義をいくつか述べる．

定義2.1（ベクトル，行列環上の形式整級数

(i) $\mathbb{F}^n[[x]] \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ f \mid f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i, f_i \in \mathbb{F}^n \ (i=0,1,2,\cdots) \right\}$.

(ii) $M_n(\mathbb{F})[[x]] \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ a \mid a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, a_i \in M_n(\mathbb{F}) \ (i=0,1,2,\cdots) \right\}$.

この節での記法をできるだけ簡単にするために変数を

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \ b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in M_n(\mathbb{F})[[x]],$$

$$d = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i \in D, \qquad f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in \mathbb{F}^n[[x]]$$

と定める．定義2.1による集合に対して乗法を導入する．

定義2.1（乗法）

(i) $D \times F^n[[x]] \longmapsto F^n[[x]]$: $d \cdot f \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=i} d_j f_k \right) x^i$.

(ii) $D \times M_n(F)[[x]] \longmapsto M_n(F)[[x]]$: $d \cdot a \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=i} d_j a_k \right) x^i$.

(iii) $M_n(F)[[x]] \times M_n(F)[[x]] \mapsto M_n(F)[[x]]$: $a \cdot b \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=i} a_j b_k \right) x^i$.

(iv) $M_n(F)[[x]] \times F^n[[x]] \longmapsto F^n[[x]]$: $a \cdot f \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=i} a_j f_k \right) x^i$.

以上の定義と代数学の基本定理により次の命題が成立つ．

命題2.1

(i) $D^n \cong F^n[[x]]$ (as D-module).

(ii) $M_n(D) \cong M_n(F)[[x]]$ (as algebra).

証明　略．

最後にa, fに対して形式整級数環の要素と同様に位数を定義する．

定義2.3（位数）

(i) $\forall j < k$ に対して $f_j = 0$ かつ $f_k \neq 0$ であるとき
$\mathrm{ord}(f) \overset{\text{def}}{=} k$.

(ii) $\forall j < k$ に対して $a_j = 0$ かつ $a_k \neq 0$ であるとき
$\mathrm{ord}(a) \overset{\text{def}}{=} k$.

3 Taylor展開

R^nの要素のTaylor展開を考える．記法を簡単にするために
Kronecker積に類似した次の演算を導入する．

定義 3.1

それぞれの成分どうしの積が定義されたベクトル
$a=(a^1,\cdots,a^n)^T$, $b=(b^1,\cdots,b^n)^T$ に対し，

$$a \otimes b \overset{\text{def}}{=} (a^1 b^1,\cdots,a^n b^1, a^1 b^2,\cdots,a^n b^2,\cdots,a^n b^n)^T.$$

これを用いて y, y' についての（実際は多変数の）Taylor展開についての命題を証明なしで示す．

命題 3.1

$y_E, y_E' \in F^n[[x]]$ とするとき，$G(y,y') \in R^n$ は (y_E, y_E') を中心に $R_E \equiv y-y_E$, $R_E' \equiv y'-y_E'$, $H_1, H_2, H_3 \in M_{n,n^2}(D[y,y',R_E,R_E'])$ として

$$(3.1)\qquad G(y,y') = G(y_E,y_E') + G_y(y_E,y_E')R_E + G_{y'}(y_E,y_E')R_E' \\ + H_1\cdot(R_E\otimes R_E) + H_2\cdot(R_E\otimes R_E') + H_3\cdot(R_E'\otimes R_E')$$

とTaylor展開できる．ただし，$G_y, G_{y'}$ はそれぞれ G の y, y' についてのJacobian行列とする．

4 Newton法の適用と主定理

今節以降，$G(y,y') \in R^n$, $\alpha_0 \in F^n$ として y に関する連立

1階常微分方程式の初期値問題

(4.1) $G(y, y') = 0,\ y(0) = \alpha_0$

の形式整級数解 $y \in F^n[[x]]$ の近似解

(4.2) $y_k = y \bmod x^{m_k} = \sum_{i=0}^{m_k - 1} y_i x^i$

をNewton法を用いて計算することを考えることにする．すなわち，$y_k, y_k' \in F^n[[x]]$ を中心として $G(y, y')$ を

$$G(y, y') = G(y_k, y_k') + G_y(y_k, y_k')(y - y_k) + G_{y'}(y_k, y_k')(y' - y_k') + \cdots$$

とTaylor展開し，

$$E_k \equiv y_{k+1} - y_k,\quad E_k' \equiv y_{k+1}' - y_k'$$

と置いて (4.1) を

(4.3) $G(y_k, y_k') + G_y(y_k, y_k') E_k + G_{y'}(y_k, y_k') E_k',$

$E_k(0) = 0$

なる E_k についての連立1階線形常微分方程式の初期値問題で近似してその解を逐次求め，y_k を“修正”して近似解 (4.2) を計算する．このとき，y_k の精度として

(4.4) $O(k) \equiv \mathrm{ord}(y - y_k)$

を用いれば近似解の“収束性”に関して次の定理が成立つ．

定理4.1（主定理）

連立1階常微分方程式の初期値問題 (4.1) に対して，$G(\alpha_0, \alpha_1) = 0$ かつ $G_{y'}(\alpha_0, \alpha_1)$ が $M_n(F)$ 上で単元になるよ

うな $\alpha_1 \in F^n$ が存在すると仮定する．このとき(4.3)を繰返し解くことによって逐次求められる近似解 y_k に対して

$$\bigcirc(k+1) \geqq 2\bigcirc(k) - 1$$

となる．

証明

命題3.1より

$$(4.5)\quad C = -\{H_1\cdot(R_k \otimes R_k) + H_2\cdot(R_k \otimes R_k') + H_3\cdot(R_k' \otimes R_k')\}$$

と置くと(3.1)は

$$(4.6)\quad G(y,y') = G(y_k,y_k') + G_y(y_k,y_k')R_k + G_{y'}(y_k,y_k')R_k' - C$$

と書ける．(4.6)から(4.3)を辺々引いて整理すれば

$$G_{y'}(y_k,y_k')(y' - y_{k+1}') + G_y(y_k,y_k')(y - y_{k+1}) = C$$

すなわち

$$(4.7)\quad G_{y'}(y_k,y_k')R_{k+1}' + G_y(y_k,y_k')R_{k+1} = C,$$
$$R_{k+1}(0) = 0$$

なる連立1階線形常微分方程式の初期値問題に帰着できる．仮定より $G_{y'}(y_k,y_k')$ は $M_n(F)[[x]]$ 上で単元になるから

$$G_{y'}(y_k,y_k') \equiv A_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \quad (a_0 \neq 0),$$
$$G_y(y_k,y_k') \equiv B_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu,$$
$$C = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu, \quad R_{k+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu x^\nu$$

と置けば(4.7)を

$$(4.8)\quad R_{k+1} = A_k^{-1}(C - B_k R_{k+1}),\quad R_{k+1}(0) = 0$$

と書き直すことができる．この式より簡単に

$$(4.9)\quad (\nu+1) r_{\nu+1} = a_0^{-1}\Big\{C_\nu - \sum_{\xi+\eta=\nu;\, \xi>0,\, \eta>0} (a_\xi + \eta b_\xi) r_\eta - b_0 r_\nu\Big\},$$

$$r_0 = 0$$

と漸化式が導かれ，(4.9)の初期条件及び変数の添字に注意すれば

$$O(k+1) = \mathrm{ord}(C) + 1$$

となることがわかる．ところが

$$\mathrm{ord}(C) \geqq \min\{H_1 \cdot (R_k \otimes R_k), H_2 \cdot (R_k \otimes R_k'), H_3 \cdot (R_k' \otimes R_k')\}$$

$$\geqq 2\,\mathrm{ord}(R_k') = 2\,\mathrm{ord}(R_k) - 2$$

$$= 2O(k) - 2$$

である．よって

$$\therefore\quad O(k+1) \geqq 2O(k) - 1.$$

さらに$G(y, y')$を以下のように分類することによりこの定理の系を示すことができる．

分類4

1　$G(y, y')$がy'について非線形であるとき．

　ex.) $(y')^2 - y = 0$．

2　$G(y, y')$がy'について線形で，かつy'の成分とyの成分の積が存在するとき．

ex.) $y'y-1=0$.

3 $G(y,y')$ が y' について線形で，かつ y' の成分と y の成分の積が存在しないとき.

ex.) $y'-y^2=0$.

系 4.1

(i) $G(y,y')$ が分類 4.1 のとき

$$\bigcirc_{(k+1)} \geqq 2\bigcirc_{(k)} - 1.$$

(ii) $G(y,y')$ が分類 4.2 のとき

$$\bigcirc_{(k+1)} \geqq 2\bigcirc_{(k)}.$$

(iii) $G(y,y')$ が分類 4.3 のとき

$$\bigcirc_{(k+1)} \geqq 2\bigcirc_{(k)} + 1.$$

ただし，(ii), (iii) の場合は定理 4.1 の α_1 を仮定する必要はない.

証明

(ii) では $R_k' \otimes R_k' = 0$，(iii) では $R_k \otimes R_k' = 0$ となることから明らか.

この系より，例えば $G(y,y')$ が分類 4.3 に属しているとき

$$y_0 = \alpha_0$$

とすると

$$y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \pmod{x^3},$$
$$y_2 = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_6 x^6 \pmod{x^7},$$
$$y_3 = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{14} x^{14} \pmod{x^{15}}$$

と近似解の正しい係数の数が約2倍ずつ求まっていくことがわかる.

5 主定理の拡張

前節において連立1階常微分方程式に対してもGeddesの考察とほぼ同様なことがいえることがわかった. ここではさらに定理の仮定を弛めて簡単な一般化を行う. まず(4.7)の各項に注目し, 改めて

$$G_{y'}(y_k, y_k') \equiv x^l A_k \ (l \geq 0), \quad A_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu,$$
$$G_y(y_k, y_k') \equiv x^m B_k \ (m \geq 0), \quad B_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$$

と置き直す. (4.7) の連立1階常微分方程式が

$$(5.1) \qquad x^l A_k R_{k+1}' + x^m B_k R_{k+1} = C, \quad R_{k+1}(0) = 0$$

と表せる場合に対して近似解 y_k の"精度"について考察し定理4.1を拡張してみる.

定理5.1 (拡張定理)

分類 4.1, 4.2, 4.3 について

$$p = \begin{cases} -1 & (4.1) \\ 0 & (4.2) \\ +1 & (4.3) \end{cases}$$

とするとき，(5.1) より求まる近似解 y_k について次のことがいえる．

(i) $\ell < m+1$ のとき．

a_0 を一意に決める y_i が求まり，かつ

$$O(j) \geqq \max(O(i), \ell+1-p)$$

である y_j が求まっているとき，a_0 が $M_n(F)$ 上で単元ならば

$$O(k+1) \geqq 2 \cdot O(k) - \ell + p$$

となる．

(ii) $\ell = m+1$ のとき．

a_0, b_0 を一意に決める y_i が求まり，かつ

$$O(j) \geqq \max(O(i), \ell+1-p)$$

である y_j が求まっているとき，$\det b_0 = 0$ かつ $i=1,2,\cdots$ について (ia_0+b_0) が $M_n(F)$ 上で単元ならば

$$O(k+1) \geqq 2 \cdot O(k) - \ell + p$$

となる．

(iii) $\ell > m+1$ のとき．

b_0 を一意に決める y_i が求まり，かつ

$$O(j) \geqq \max(O(i), m+2-p)$$

である y_j が求まっているとき，b_0 が $M_n(F)$ 上で単元ならば

$$O(k+1) \geqq 2 \cdot O(k) - m - 1 + p$$

となる.

証明

(i) (5.1)は

$$x^l\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)r_{\nu+1}x^\nu\right) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu\right)^{-1}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu x^\nu - x^m\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu x^\nu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}r_\nu x^\nu\right)\right\}$$

と書けることから漸化式

$$(\nu+1)r_{\nu+1}=\begin{cases} a_0^{-1}\left(c_{l+\nu}-\sum_{\xi+\eta=\nu;\,\xi>0}\eta a_\xi r_\eta\right) & (\nu<m-l),\\ a_0^{-1}\left(c_{l+\nu}-\sum_{\xi+\eta=\nu+l-m}b_\xi r_\eta-\sum_{\xi+\eta=\nu;\,\xi>0}\eta a_\xi r_\eta\right) & (\nu\geqq m-l)\end{cases}$$

が求まる. 添字に注意すれば

$$\therefore\ O(k+1)\geqq 2O(k)-l+p.$$

(ただし, $l=0$ で分類4.2, 4.3 の場合は初期値 y_0 が定まるだけで条件を満す.)

(ii) 同様に漸化式が

$$\{(\nu+1)a_0+b_0\}r_{\nu+1}=c_{l+\nu}-\sum_{\xi+\eta=\nu+1;\,\xi>0,\,\eta>0}(\eta a_\xi+b_\xi)r_\eta$$

となることから

$$\therefore\ O(k+1)\geqq 2O(k)-l+p.$$

(iii) 漸化式が

$$b_0r_{\nu+1}=\begin{cases} c_{m+\nu+1}-\sum_{\xi+\eta=\nu+1;\,\xi>0}b_\xi r_\eta & (\nu<l-m-1),\\ c_{m+\nu+1}-\sum_{\xi+\eta=\nu+m-l+2}\eta a_\xi r_\eta-\sum_{\xi+\eta=\nu+1;\,\xi>0}b_\xi r_\eta & (\nu\geqq l-m-1)\end{cases}$$

となることから

$$\therefore \quad O(k+1) \geqq 2O(k) - m - 1 + p.$$

6 算法

$\ell = m = 0$ の場合のみ考えることにする.

定理5.1の計算手続きより算法を構成する. 連立線形常微分方程式の初期値問題(4.3)の解は, 計算に必要な項に注意してオーソドックスに漸化式を用いて計算することにする.

$$G_{y'}(y_k, y_k') \bmod x^{O(k+1)-O(k)} = \sum_{\nu=0}^{O(k+1)-O(k)-1} a_{\nu,O(k)} x^{\nu},$$

$$G_{y}(y_k, y_k') \bmod x^{O(k+1)-O(k)} = \sum_{\nu=0}^{O(k+1)-O(k)-1} b_{\nu,O(k)} x^{\nu},$$

$$-G(y_k, y_k') \bmod x^{O(k+1)} = \sum_{\nu=0}^{O(k+1)-1} c_{\nu,O(k)} x^{\nu},$$

$$-\left(G(y_k, y_k') \,/\, x^{O(k)-1}\right) \bmod x^{O(k+1)-O(k)} = \sum_{\nu=0}^{O(k+1)-O(k)-1} \tilde{c}_{\nu,O(k)} x^{\nu},$$

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} x^{\nu},$$

$$\left(E_k \,/\, x^{O(k)-1}\right) \bmod x^{O(k+1)-O(k)} = \sum_{\nu=0}^{O(k+1)-O(k)-1} \tilde{\alpha}_{\nu} x^{\nu},$$

$$\left(E_k' \,/\, x^{O(k)-1}\right) \bmod x^{O(k+1)-O(k)} = \sum_{\nu=0}^{O(k+1)-O(k)-1} (O(k)+\nu+1)\tilde{\alpha}_{\nu} x^{\nu}$$

(ただし, $a_{\nu,k} \equiv a_{\nu}(\alpha_0, \cdots, \alpha_{k-1})$, $b_{\nu,k} \equiv b_{\nu}(\alpha_0, \cdots, \alpha_{k-1})$
$\tilde{c}_{\nu,k} \equiv \tilde{c}_{\nu}(\alpha_0, \cdots, \alpha_{k-1})$, $c_{\nu,k} \equiv c_{\nu}(\alpha_0, \cdots, \alpha_{k-1})$)

と置けば, $\nu = 0, 1, \cdots, O(k+1) - O(k) - 1$ に対して

$$(6.1)\quad \alpha_{O(E)+\nu}=\tilde{\alpha}_{\nu+1}$$
$$=\frac{a_0^{-1}}{O(E)+\nu}\left[\tilde{c}_\nu-\sum_{\xi+\eta=\nu;\,\xi>0,\,\eta>0}\left\{b_\xi+(O(E)+\eta-1)a_\xi\right\}\tilde{\alpha}_\eta-b_0\tilde{\alpha}_\nu\right]$$

となる．(6.1)及び系4.1の結論から形式整級数解 α_i は次の計算式に整理できる．

計算式

(i) 分類4.1のとき．

$$\alpha_2=\frac{a_{0,2}^{-1}}{2}\cdot c_{1,2}$$

及び $n=2,3,4,\cdots$ に対し

$$\alpha_{2n-1}=\frac{a_{0,n+1}^{-1}}{2n-1}\left[c_{2n-2,n+1}-\sum_{\xi+\eta=n-2;\,\xi>0,\,\eta>0}\left\{b_{\xi,n+1}+(n+\eta)a_{\xi,n+1}\right\}\alpha_{n+\eta}-b_{0,n+1}\alpha_{2n-2}\right],$$

$$\alpha_{2n}=\frac{a_{0,n+1}^{-1}}{2n}\left[c_{2n-1,n+1}-\sum_{\xi+\eta=n-1;\,\xi>0,\,\eta>0}\left\{b_{\xi,n+1}+(n+\eta)a_{\xi,n+1}\right\}\alpha_{n+\eta}-b_{0,n+1}\alpha_{2n-1}\right].$$

(ii) 分類4.2のとき．

$$\alpha_1=a_{0,1}^{-1}\cdot c_{1,1}$$

及び $n=1,2,3,\cdots$ に対し

$$\alpha_{2n-1}=\frac{a_{0,n}^{-1}}{2n-1}\left[c_{2n-2,n}-\sum_{\xi+\eta=n-1;\,\xi>0,\,\eta>0}\left\{b_{\xi,n}+(n-1+\eta)a_{\xi,n}\right\}\alpha_{n-1+\eta}-b_{0,n+1}\alpha_{2n-2}\right],$$

$$\alpha_{2n}=\frac{a_{0,n+1}^{-1}}{2n}\left[c_{2n-1,n+1}-\sum_{\xi+\eta=n-1;\,\xi>0,\,\eta>0}\left\{b_{\xi,n+1}+(n-1+\eta)a_{\xi,n+1}\right\}\alpha_{n+\eta}-b_{0,n+1}\alpha_{2n-1}\right].$$

(iii) 分類4.3のとき．

$$\alpha_1=a_{0,1}^{-1}\cdot c_{1,1}$$

及び $n=1,2,3,\cdots$ に対し

$$\alpha_{2n-1}=\frac{a_{0,n}^{-1}}{2n-1}\left[C_{2n-2,n}-\sum_{\xi+\eta=n-1;\xi\geq 0,\eta\geq 0}\{b_{\xi,n}+(n-1+\eta)a_{\xi,n}\}\alpha_{n-1+\eta}-b_{0,n}\alpha_{2n-2}\right],$$

$$\alpha_{2n}=\frac{a_{0,n}^{-1}}{2n}\left[C_{2n-1,n}-\sum_{\xi+\eta=n;\xi\geq 0,\eta\geq 0}\{b_{\xi,n}+(n-1+\eta)a_{\xi,n}\}\alpha_{n-1+\eta}-b_{0,n}\alpha_{2n-1}\right].$$

7 implementationに関する注意

計算例を付録に示す.

前節で示した計算式をprogram化してみると，級数の積がある部分は多項式のconvolutionを必要とする場合が多いことがわかる．そこで $G(y,y')\in R^n$ であることに注意して，変数を増してLeibnitzの公式などを適用することにより $G(y,y')$ を y, y' について3次以上の項を消去してしまえばprogramを簡単化できる場合がある．例えばVan der Polの方程式を連立化して

$$G(y,y')=\begin{pmatrix} y_1'-y_2 \\ y_2'-\mu(1-y_1^2)y_2+y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

とした場合

$$G_{y'}(y,y')=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ G_y(y,y')=\begin{pmatrix}0&-1\\1+2\mu y_1y_2&-\mu(1-y_1^2)\end{pmatrix}$$

となり，3次の項を1つ，2次の項を2含むのに対し，

$$G(y,y') = \begin{pmatrix} y_1' - y_2 \\ y_2' - \mu(1-y_3)y_2 + y_1 \\ y_3' - 2y_1 y_1' \end{pmatrix}$$

とすれば

$$G_{y'}(y,y') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2y_1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_y(y,y') = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -\mu(1-y_3) & \mu y_2 \\ -2y_1' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となって3次の項を減らすことができる．実はこれは冒頭で述べた[1]で導かれる漸化式と結びつけられる場合のひとつであることがわかる．

Reference

[1] Barton,D. et al : Taylor series method for ordinary differential equations-- An evaluation, In Mathematical Software,1971,pp.369-390.

[2] Corliss,G. et al: Solving ordinary equations using Taylor series, ACM Trans. Math. Softw. 8.2 (June 1982),pp.114-144.

[3] Geddes,K.O.: Convergence behaviour of the Newton iteration for first order differential equations, In Proc. 1979 European Symp. on Symbolic and Algebraic Manipulation, Ng,E.W.(Ed.), Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science 72, pp.74-87.

[4] Lipson,J.: Newton's method: Great algebraic Algorithm, In Proc. 1976 ACM Symp. on Symbolic and Algebraic Comput., Jenks,R.D.(Ed.),pp.260-270.

[5] Norman,A.C.: Expanding the solution of implicit sets of ordinary differential equations in power series, Compt.J. 19(1976),pp.63-68.

[6] Yun,D.Y.Y.: Algebraic algorithms using p-adic constructions, In Proc. 1976 ACM Symp. on Symbolic and Algebraic Comput., Jenks,R.D.(Ed.),pp.248-259.

付録

(i) $(1+x^2)y''+1+(y')^2=0\ ,\ y(0)=a_0,\ y'(0)=b_0$

$$YK1 := -\frac{X^{6} B0^{4} (B0^{2}+1)}{6} + \frac{X^{5} B0^{3} (B0^{2}+1)}{5} - \frac{X^{4} B0^{2} (B0^{2}+1)}{4} + \frac{X^{3} B0 (B0^{2}+1)}{3} - \frac{X^{2} (B0^{2}+1)}{2} + X B0 + A0$$

(ii) $y_1' = (1-y_2)y_1\ ,\quad y_1(0)=a_0$

$y_2' = -(1-y_1)y_2\ ,\quad y_2(0)=b_0$

（y_1 のみ）

$$\begin{aligned}YK1 :=\ & X^{6} A0 (- A0^{5} B0 + 57 A0^{4} B0^{2} - 11 A0^{4} B0 - 302 A0^{3} B0^{3} + 142 A0^{3} B0^{2} - 32 A0^{3} B0 + 302 A0^{2} B0^{4} - 66 A0^{2} B0^{3} + 80 A0^{2} B0^{2} - 26 A0^{2} B0 - 57 A0 B0^{5} - 90 A0 B0^{4} - 40 A0 B0^{3} + 8 A0 B0^{2} - 5 A0 B0 + B0^{6} + 9 B0^{5} + 20 B0^{4} + 10 B0^{3} + B0^{2} - B0 + 1)/720 \\ & + X^{5} A0 (- A0^{4} B0 + 26 A0^{3} B0^{2} - 7 A0^{3} B0 - 66 A0^{2} B0^{3} + 31 A0^{2} B0^{2} - 11 A0^{2} B0 + 26 A0 B0^{4} + 9 A0 B0^{3} + 8 A0 B0^{2} - 4 A0 B0 - B0^{5} - 5 B0^{4} - 5 B0^{3} - B0 + 1)/120 \\ & + X^{4} A0 (- A0^{3} B0 + 11 A0^{2} B0^{2} - 4 A0^{2} B0 - 11 A0 B0^{3} + 4 A0 B0^{2} - 3 A0 B0 + B0^{4} + 2 B0^{3} + B0^{2} - B0 + 1)/24 \\ & + X^{3} A0 (- A0^{2} B0 + 4 A0 B0^{2} - 2 A0 B0 - B0^{3} - B0 + 1)/6 + X^{2} A0 (- A0 B0 + B0^{2} - B0 + 1)/2 + X A0 (- B0 + 1) + A0\end{aligned}$$

(iii) $y'' - \mu(1-y^2)y' + y = 0$, $y(0) = a_0$, $y'(0) = b_0$

(MU=μ)

```
      6       10      5     9   4       8      5        7
YK1:=X *( - A0  *B0*MU  - A0 *MU  + 5*A0 *B0*MU  + 52*A0 *
           2   4       7   4        6      5        6
         B0 *MU  + 4*A0 *MU  - 10*A0 *B0*MU  + 80*A0 *B0*
           3         5   2   4       5   4        5   2
         MU  - 156*A0 *B0 *MU  - 6*A0 *MU  + 29*A0 *MU  -
               4   3   3        4      5         4      3
         200*A0 *B0 *MU  + 10*A0 *B0*MU  - 164*A0 *B0*MU  +
               3   2   4         3   2   2       3   4
         156*A0 *B0 *MU  - 250*A0 *B0 *MU  + 4*A0 *MU  - 32*
           3   2         2   3   3       2      5        2
         A0 *MU  + 264*A0 *B0 *MU  - 5*A0 *B0*MU  + 88*A0 *
              3        2                 4   2           2
         B0*MU  - 69*A0 *B0*MU + 60*A0*B0 *MU  - 52*A0*B0 *
           4            2   2        4          2
         MU  + 150*A0*B0 *MU  - A0*MU  + 3*A0*MU  - A0 - 64*
           3   3        3           5          3
         B0 *MU  + 22*B0 *MU + B0*MU  - 4*B0*MU  + 3*B0*MU)/
            5    8      4     7   3       6      4        5
     720 + X *(A0 *B0*MU  + A0 *MU  - 4*A0 *B0*MU  - 22*A0 *
                 2   3       5   3       4      4        4
               B0 *MU  - 3*A0 *MU  + 6*A0 *B0*MU  - 29*A0 *
                    2        3   2   3       3   3       3
               B0*MU  + 44*A0 *B0 *MU  + 3*A0 *MU  - 8*A0 *
                         2   3   2       2      4        2
               MU + 30*A0 *B0 *MU  - 4*A0 *B0*MU  + 32*A0 *
                    2           2   3           2
               B0*MU  - 22*A0*B0 *MU  + 22*A0*B0 *MU - A0*
                 3                  3   2        4
               MU  + 2*A0*MU - 14*B0 *MU  + B0*MU  - 3*B0*
                 2              4       6      3     5   2
               MU  + B0)/120 + X *( - A0 *B0*MU  - A0 *MU
               4      3       3   2   2       3   2       2
         + 3*A0 *B0*MU  + 8*A0 *B0 *MU  + 2*A0 *MU  - 3*A0 *
             3       2                2   2        2
        B0*MU  + 8*A0 *B0*MU - 8*A0*B0 *MU  - A0*MU  + A0 -
            3           3                  3    4      2
        2*B0 *MU + B0*MU  - 2*B0*MU)/24 + X *(A0 *B0*MU  +
          3          2      2          2
        A0 *MU - 2*A0 *B0*MU  - 2*A0*B0 *MU - A0*MU + B0*
          2            2       2
        MU  - B0)/6 + X *( - A0 *B0*MU - A0 + B0*MU)/2 + X*

     B0 + A0
```

（この結果を簡単にまとめると以下のようになる.）

$$
\begin{aligned}
y \bmod x^7 = a + bx &- \tfrac{1}{2}\left\{a + \mu b (a-1)(a+1)\right\} x^2 \\
&+ \tfrac{1}{6}\Big[-b + \mu a\left\{(a-1)(a+1) - 2b^2\right\} \\
&\qquad + \mu^2 b (a-1)^2 (a+1)^2 \Big] x^3 \\
&+ \tfrac{1}{24}\Big[a + 2\mu b\left\{(2a-1)(2a+1) - b^3\right\} \\
&\qquad + \mu^2 a\left\{-(a-1)^2(a+1)^2 + 8b^2(a-1)(a+1)\right\} \\
&\qquad - \mu^3 b (a-1)^3 (a+1)^3 \Big] x^4 \\
&+ \tfrac{1}{120}\Big[b + 2\mu a\left\{-(2a-1)(2a+1) + 11b\right\} \\
&\qquad + \mu^2 b\left\{-(a-1)(a+1)(29a^2-3) + 2b^3(15a^2-7)\right\} \\
&\qquad + \mu^3 a\left\{(a-1)^3(a+1)^3 - 22b^2(a-1)^2(a+1)^2\right\} \\
&\qquad + \mu^4 b (a-1)^4 (a+1)^4 \Big] x^5 \\
&+ \tfrac{1}{720}\Big[-a + 3\mu b\left\{-(23a^2-1) + 264b^2\right\} \\
&\qquad + \mu^2 a\left\{(a-1)(a+1)(29a^2-3) - 30b^2(5a^2-3) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + 60b^4\right\} \\
&\qquad + 40\mu^3 b\left\{(20a^2-1)(a-1)^2(a+1)^2 - 2b^2(a-1)(a+1)(25a^2-8)\right\} \\
&\qquad + \mu^4 a\left\{-a(a-1)^4(a+1)^4 + 52b^2(a-1)^3(a+1)^3\right\} \\
&\qquad - \mu^5 b (a-1)^5 (a+1)^5 \Big] x^6
\end{aligned}
$$