

## Irreducibility of a class of 3-manifolds

神戸大 理 高橋 敬介

3-sphere  $S^3$  内の knot  $K$  に沿った係数  $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  の Dehn-surgery により得る orientable closed 3-manifold を  $M(K:r)$  とかくことにする ([6] Ch9.)。

このとき、次の問題が考えられる。

Problem 1. いつ、 $M(K:r)$  は irreducible となるか？

これに関する結果として、例えば、knot  $K$  が

- (i) composite knot ([3])、
- (ii)  $(2, \square)$ -torus knot を除く 2-bridge knot ([2])、
- (iii)  $(2, \square)$ -torus knot を除く alternating knot ([4])

のそれぞれの場合については 任意の  $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  に対して  $M(K:r)$  は irreducible であることがわかっている。

一方、irreducible にならない例として知られているのは

trivial knot に沿った係数 0 の Dehn-surgery と、 $(p, q)$ -cable knot (torus knot も含む) に沿った係数  $pq$  の Dehn-surgery の場合だけである ([5], [1])。

本稿の目標は  $M(K; r)$  が irreducibleかつ sufficiently-large となるための (十分) 条件を求め、任意の non-trivial Dehn-surgery により常に irreducibleかつ sufficiently-large な 3-manifold が得られる knot の class として上記 (i), (ii), (iii) 以外のものを見つけることである。なお、本稿の内容は [7] を要約したものであり、議論はすべて PL-category で進める。

Definition. knot  $K$  の exterior  $X (= S^3 - N(K))$  内に次の条件 (1), (2) をみたす properly embedded planar surface  $F$  が存在するとき、 $K$  は性質  $F_1(\partial/p)$  をもつという。

(1)  $F$  は  $X$  で incompressible かつ  $\partial$ -incompressible である。

(2)  $\partial F$  の各成分は  $(p, q)$ -curve である。

(つまり、 $p \cdot (\text{longitude}) + q \cdot (\text{meridian})$  in  $H_1(\partial N(K))$ )

さらに、次の (3) もみたすとき、 $K$  は性質  $F_n(\partial/p)$  をもつという。

(3)  $\partial F$  の成分の個数は  $n$  である。

また、この  $F$  を性質  $F_1(\partial/p)$  (or  $F_n(\partial/p)$ ) を与える surface ということにする。

次は性質  $\mathcal{F}_n(\mathcal{G}/p)$  と  $M(K; \mathcal{G}/p)$  の irreducibility を関係づける基本的な補題である。証明は次の命題とも略す。

Lemma. knot  $K$  が性質  $\mathcal{F}_n(\mathcal{G}/p)$  をもたないならば  $M(K; \mathcal{G}/p)$  は irreducible である。

Proposition 1.  $K \subset S^3$  を knot,  $p, \mathcal{G}$  を coprime integers とする。

(1)  $K$  が性質  $\mathcal{F}_1(\mathcal{G}/p)$  をもつ

$\iff K$  は trivial knot かつ  $\mathcal{G} = 0$

(このとき、 $M(K; \mathcal{G}/p) \cong S^2 \times S^1$ )

(2)  $K$  が性質  $\mathcal{F}_2(\mathcal{G}/p)$  をもつ

$\iff$  次の (2.1), (2.2) のいずれか一方が成立する。

(2.1)  $K$  は composite knot かつ  $p = 0$

(2.2) knot  $K'$  と coprime integers  $r, t$  が存在して、 $K$  は  $K'$  を companion とする  $(r, t)$ -cable knot かつ  $\mathcal{G}/p = rt$  かつ  $|r| \geq 2$  である。さらに  $K'$  が trivial knot のときは  $|t| \geq 2$  である。

(このとき、 $M(K; \mathcal{G}/p) \cong M(K'; \mathcal{G}/r) \# L(r, t)$ )

これより、性質  $\mathcal{F}_n(\mathcal{G}/p)$  をもつ knot は  $n=1, 2$  のときには完全に characterize されているが、 $n \geq 3$  のときにはまだよくわ

から正しい。

Problem 2.  $n \geq 3$ ,  $p \neq 0$  のとき、性質  $F_n(\mathbb{Z}/p)$  をもつ knot は存在するか？

Problems 1, 2 に関係した定理を述べる。

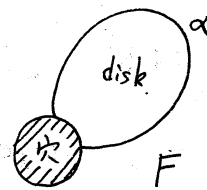
Theorem. knot  $K$  が性質  $F_n(\mathbb{Z}/p)$  (ただし、 $n \geq 3$ ) をもち、これを与える surface を  $F \subset X = S^3 - \mathring{N}(K)$  とする。もし、 $X$  を  $F$  で切り開いて得られる compact 3-manifold の成分の中に  $\partial$ -irreducible なものがあるならば、 $\mathbb{Z}/p$  と異なる任意の  $\ast/r \in \mathbb{Q} \cup \infty$  に対して  $K$  は性質  $F(\ast/r)$  をもたない。従って、 $M(K; \ast/r)$  は irreducible である。さらに、 $r \neq 0$  のとき  $M(K; \ast/r)$  は sufficiently-large である。

outline of proof)  $X$  を  $F$  で切り開いて得られる  $\partial$ -irr. な成分を  $X'$  とおく。仮りに、 $K$  が性質  $F(\ast/r)$  をもつとし、これを与える surface を  $F'$  とおく。このとき、 $F \cap F'$  の成分は arc 又は simple closed curve としておく、そのうち  $A = \{\text{arcs}\}$  とおく。 $n \geq 3$ 、 $F: \partial$ -incomp. を使うと、簡単な議論により、 $F' - A$  の成分の中に boundary が 1 つの cycle であるようなものが、

$X'$  に含まれるものがみつかる。その closure を  $D$  とおくと、 $D$  は disk で、 $X'$  は  $\partial$ -irr. だから  $\partial D \simeq 0$  in  $\partial X'$ .

よって、 $\partial D$  は  $\partial X'$  で disk を bound する。これより、 $\partial D$  の一部で  $A$  の成分である arc  $\alpha$  で、 $F$  において下図のようになっているものがみつかる。これは  $F'$  が  $\partial$ -incomp. であることに反する。

$R \neq 0$  のときは、 $\partial X'$  が 2-sided incompressible surface となっている。  $M(K; t/R)$  は sufficiently-large である。□



Definition. Theorem の条件で  $p=0$ ,  $n=4$  の場合をみたす knot 全体の class を  $\mathcal{K}$  とかくことにする。

Corollary 1.  $K \in \mathcal{K}$  とする。このとき、任意の  $r \in \mathbb{Q}$  に対して  $K$  は性質  $\mathcal{F}(r)$  をもたず、 $M(K; r)$  は irreducible かつ sufficiently-large である。

Corollary 2. 任意の knot  $K \in \mathcal{K}$  は Property R をもつ。

Corollary 3. 任意の knot  $K \in \mathcal{K}$  は Property P をもつ。

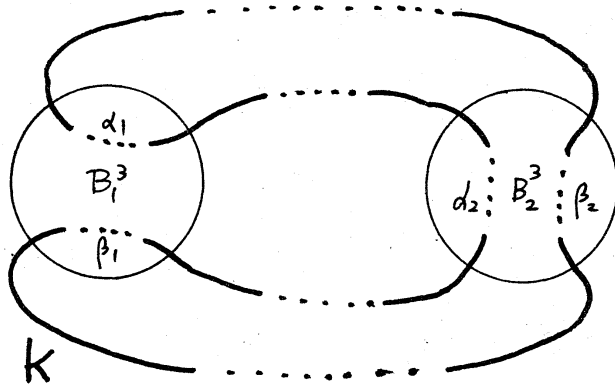
次に  $\mathcal{K}$  に属する knot の構成について考える。

$\alpha_i, \beta_i \in 3\text{-ball } B_i^3$  に embed された arcs ( $i=1,2$ ) で、次の条件をみたすものとする。

(\*)  $B_i^3 - N(\alpha_i \cup \beta_i)$  の closure は  $\partial$ -irreducible である。

(\*\*)  $\iota_*: \pi_1(\partial B_2^3 - (\partial \alpha_2 \cup \partial \beta_2)) \rightarrow \pi_1(B_2^3 - (\alpha_2 \cup \beta_2))$  は injective である。

このとき、 $B_1^3, B_2^3$  を  $S^3$  の中に互いに disjoint に embed し、下図のように  $B_1^3 \cup B_2^3$  の外で、 $\alpha_i, \beta_i$  ( $i=1,2$ ) の端点を4本の arcs で任意に結んで得られる knot  $K$  は  $\mathcal{K}$  に属する。

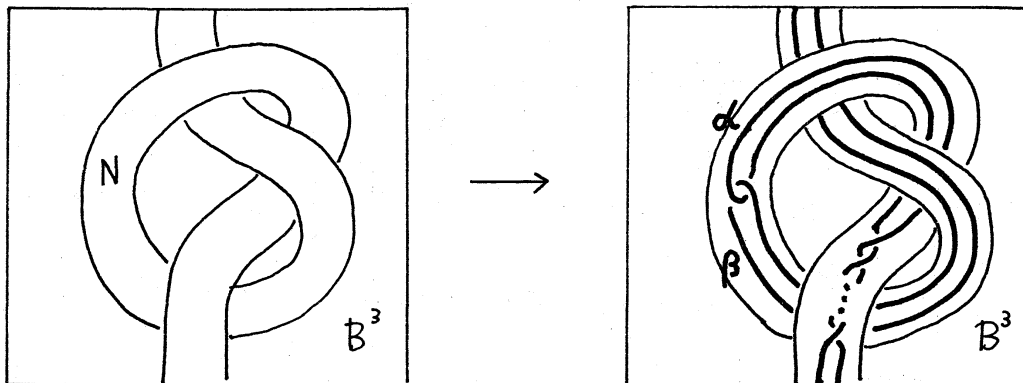


逆に、 $\mathcal{K}$  に属する任意の knot は上記の方法で得られる。

以下において、3-ball と 2本の arcs との pair  $(B^3, \alpha \cup \beta)$  で条件(\*) または (\*\*) をみたすものの例を与える。ただし、その証明は略す。

Remark. (\*) をみたす  $\Leftrightarrow$  (\*\*) をみたす。

Example 1. 条件(\*) をみたす例。

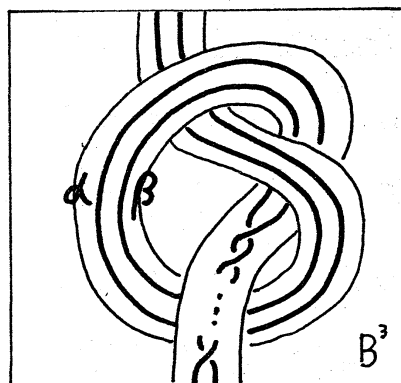


knotted arc の regular nbd.  $N$  を考える。

$N$  の中に  $\alpha, \beta$  を上図のように入れる。

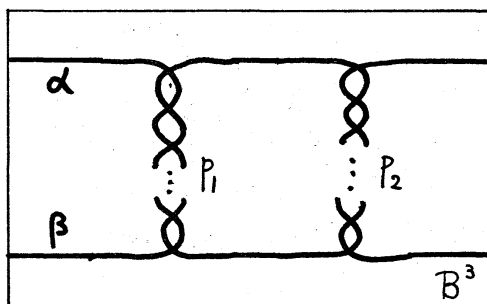
Example 2. 条件(\*\*) をみたす例。

Example 1. と同様に. knotted arc の reg. nbd.  $N$  の中に右図のように  $\alpha, \beta$  を入れる。

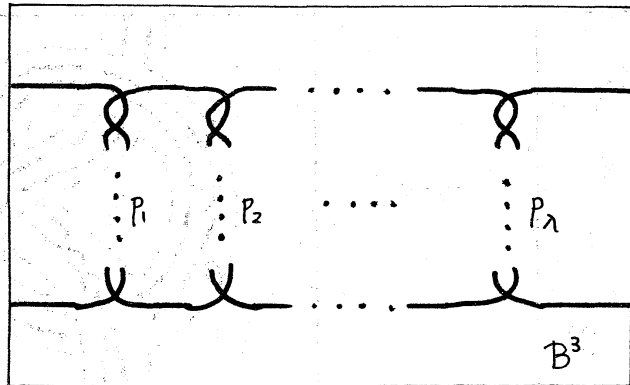


Example 3. 条件(\*) をみたす例。

$$|P_1| = |P_2| \geq 2$$



Example 4. 条件(\*\*)をみたす例。



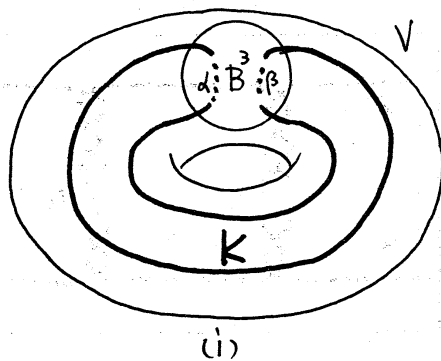
$|P_1|, |P_2|, \dots, |P_n|$  のうち  
2以上のものが、2つ以上  
ある。

最後に、 $\mathcal{K}$ に属する knot の例を与える。

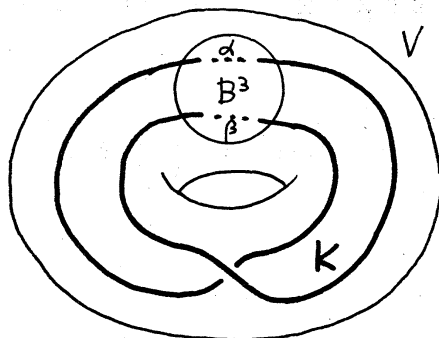
Proposition 2.  $(B^3, \text{dup})$  が条件(\*)をみたし、 $K$ を solid torus  $V$  内の knot  $Z$  図1の(i)または(ii)のものとする。

また、 $\tilde{K} \subset S^3$ を non-trivial knot、 $h: V \xrightarrow{\cong} N(\tilde{K})$ を homeo. とする。このとき、 $h(K) \in \mathcal{K}$ である。

proof)  $(S^3 - h(B^3), h(K) \cap (S^3 - h(B^3)))$  は Example 2 より、条件(\*\*)をみたすから。□



(i)

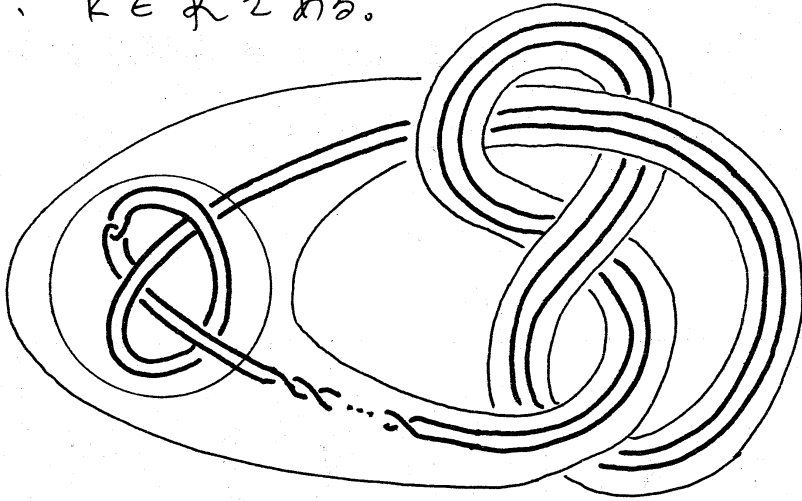


(ii)

図 1.

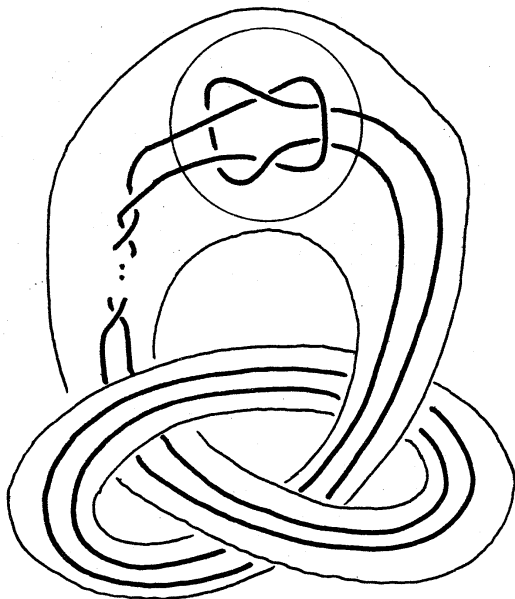


Example 5.  $K$  が composite knot を companion とする doubled knot のとき、 $K \in \mathcal{K}$  である。



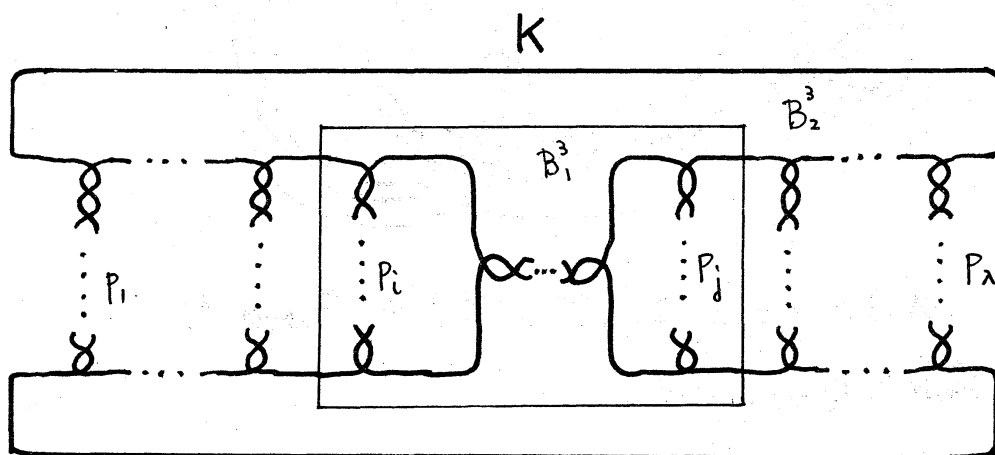
これは、Prop. 2. の  $(B^3, \alpha \cup \beta)$  が Example 1. のものである場合になっている。

Example 6. Prop. 2. の  $(B^3, \alpha \cup \beta)$  が Example 3. のものである場合、特に下図のような Whitehead's double は  $\mathcal{K}$  に属する。



Example 7.  $p_1, p_2, \dots, p_\lambda$  が次の条件 (i), (ii) をみたすとき、pretzel knot  $K(p_1, p_2, \dots, p_\lambda) \in \mathcal{K}^2$  である。

- (i)  $|p_1|, |p_2|, \dots, |p_\lambda|$  のうち 2 以上のものが 4 個以上ある。  
 (ii)  $|p_i| = |p_j|$  かつ  $|p_k| = 1$  ( $i < k < j$ ) をみたす  $i < j$  が存在する。



$(B_1^3, K \cap B_1^3)$  は Example 3 より 条件(\*) をみたす。

$(B_2^3, K \cap B_2^3)$  は Example 4 より 条件(\*\*) をみたす。

## — References —

- [1] C. McA. Gordon : Dehn surgery and satellite knots, preprint.
- [2] A. Hatcher, W. Thurston : Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements, to appear.
- [3] W. Jaco, R. Myers : An algebraic determination of closed orientable 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 253 (1979). 149-170.
- [4] W. Menasco : Incompressible surfaces in the complement of alternating knots and links, preprint.
- [5] Moser : Elementary surgery along a torus knot, Pacific J. Math., 38 (1971) 737-745.
- [6] D. Rolfsen : Knots and Links, Math. Lecture Series 7, Publish or Perish Inc., Berkeley, (1976)
- [7] K. Takahashi : Dehn's Construction and Irreducibility of Three-Manifolds, Master Thesis, Kobe Univ. (1983).