

Tunnel Number 1 Knots の Property P について

北大 理 小林文夫 (Kobayashi Fumio)

§ R.P. Osborne は [Os] で “与えられた tunnel number 1 (H-genus 2) knot K が Property P を持つ事を示すアルゴリズム” を提出したが、ここでは一般に tunnel number 1 (H-genus 2) knot なる Property P を持つ事を示す。その為直接には次の Theorem の証明を目的としている。

Theorem K が tunnel number 1 (H-genus 2) knot であるとき、 K に沿う non-trivial Dehn's surgery で構成した 3-mfd, $X_r(K;r)$, $r \in \mathbb{Q}$ は wave の存在しない genus 2 H-図式を持つ。

Remark K が 2-bridge knot の場合は 落合先生がすでに [Ochi] に於いて示された。従って上の Theorem は その拡張である。

上の Theorem と次の 2 つの Theorem を合わせると、目的の結果を得る

H.O.T - Theorem (本間, 落合 高橋)

S^3 の non-canonical な genus 2 H-図式には wave がある。

Theorem (Thurston et.c)

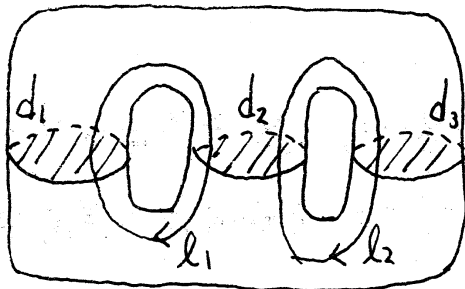
H-genus 2 には Poincaré の反例がない。 //

Def. Knot K が tunnel number 1 (或いは Heegaard genus 2) knot であるとは

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ K は non-trivial knot であり, K の regular n.b.d $N(K; S^3)$ に 1-handle を 1 つ付け加えて, standard な genus 2 handle body にできるとき。 //

Remark tunnel number 1 knots と云う class は, 全ての 2-bridge knots と torus knots を含んでいる。 //

以下 V は S^3 に standard に embedding された genus 2 handle body とし, V の standard meridian discs d_1, d_2, d_3 と standard longitude curves l_1, l_2 を下図で定義する。



l_1, l_2 には適当な向きを付けておく。

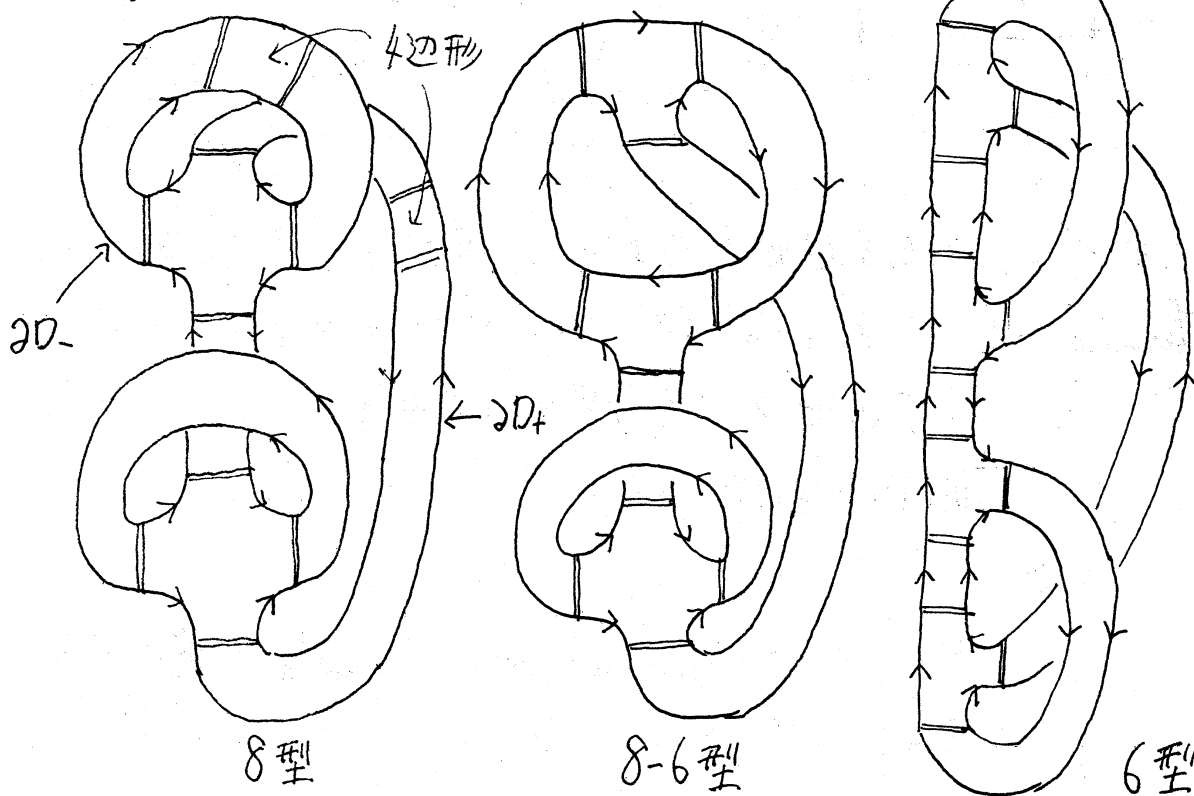
pair $(V; D)$ を V と V に proper に embedding された 2-disc D の組で更に $V - D$ は connected とすると, 対応 $K \cong \text{Core}(V - N^{\circ}(D; S^3))$ により, K を考える事と pair $(V; D)$ を考える事は同じである。

従って以後は専ら pair $(V; D)$ を考えていくが, ∂D には向きが
付いており, ∂D と l_1, l_2 は transversal としておく。

Def. Set $\{2V - l_1, l_2 \cup \partial D\}$ で $2V$ を curves $l_1, l_2, \partial D$ で切り
開いたものを表わす。各要素は boundary を含む。

Def. $\Gamma(D)$ で $2V$ を ∂D で切り開いた図形上に curves l_1, l_2 を
記入したものを表わす。

$\Gamma(D)$ は D の取り方により色々考えられるが, 特に次の3つ
の type に名前を付けておく。



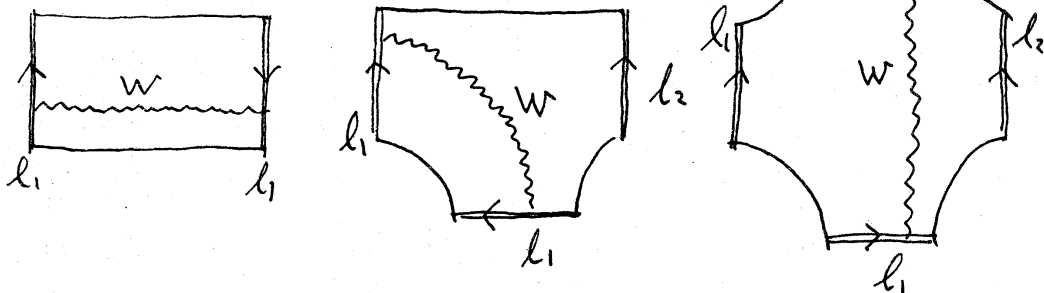
- 4, 6, 8 边形で構成されていて, 6, 8 边形の l_1, l_2 にぞくす
辺は直接, 或いは 4 边形の列によりつながっている。
- $\Gamma(D)$ の 2 つある boundary には ∂D の向きから induce される向

きが付くが、表の領域を左手に見る向きの方を ∂D_+ 、右手に見る向きの方を ∂D_- とする。

。 l_1, l_2 にぞくす辺は 2 重線で記入してある。

Def. $\Gamma(D)$ に関する条件 (*) とは、 $\Gamma(D)$ を構成する各図形 (i.e. $\text{Set}(V - l_1 \cup l_2)$ の各要素) において、 l_1, l_2 にぞくす辺をつなぐ wave がないこと。

例えば次の様な多辺形はない。



それぞれ、4, 6, 8 辺形上で l_1 にぞくす辺をつなぐ wave がある。

Lemma 1 $K \cong \text{Core}(V - N(D; S^3))$ とするとき

- (i) $\Gamma(D)$ は 8, 8-6, 6 型のいずれか。
- (ii) $\Gamma(D)$ は (*) をみたす

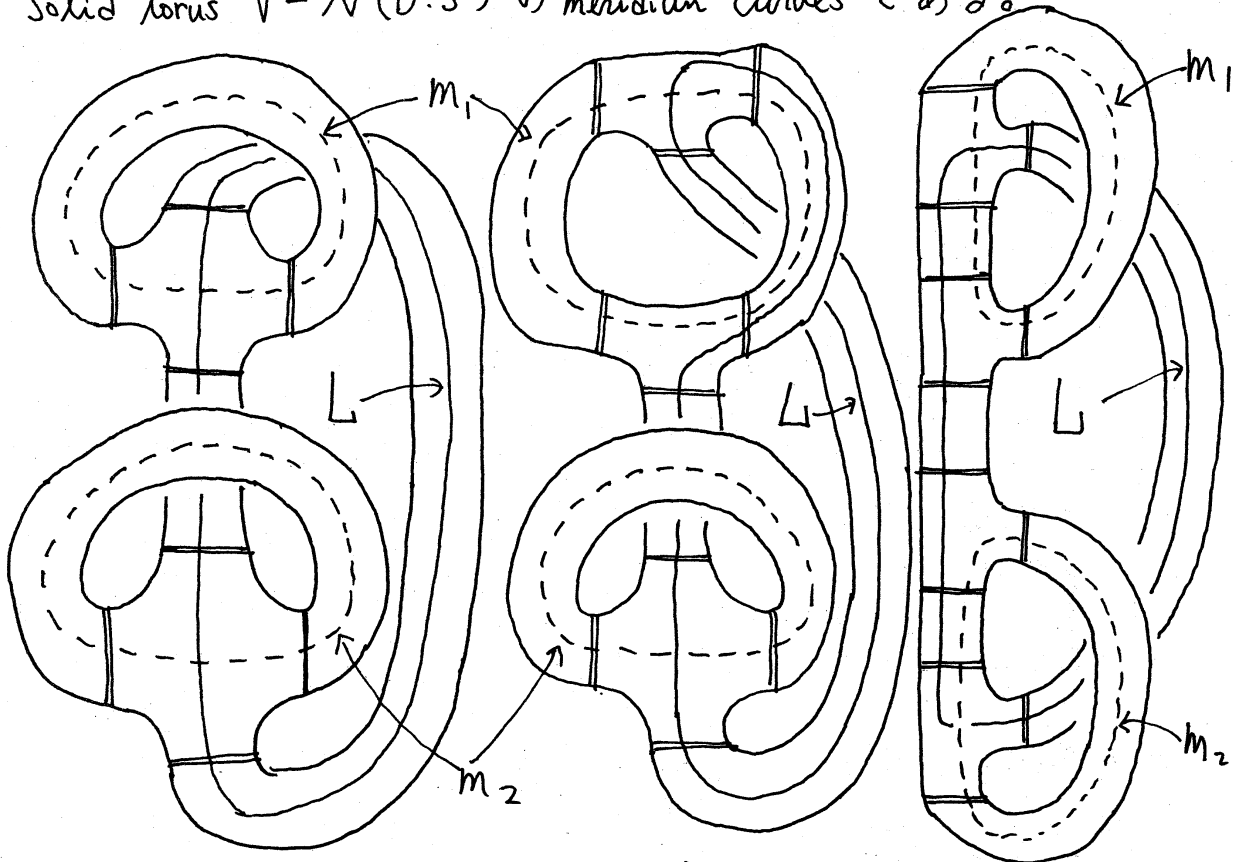
⇒

K に沿う non-trivial Dehn's surgery で構成した 3-mfd, $X_{S^3}(K; r)$ には genus 2 H -図式で wave のないものがある。

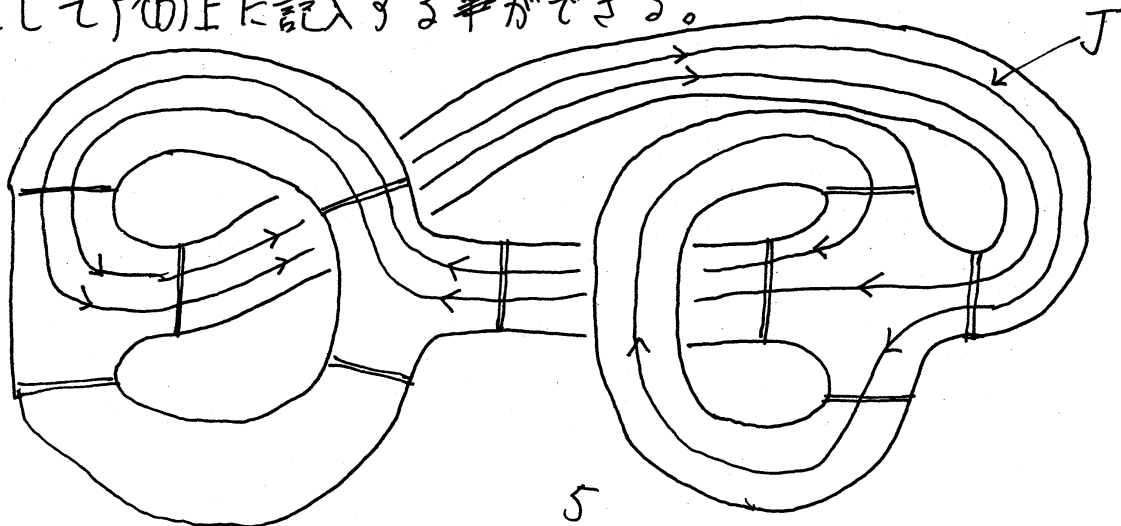
証明の概略

$\Gamma(D)$ が 8, 8-6, 6 型 のとき, $\Gamma(D)$ 上の次の curves m_1, m_2 は

solid torus $V - \dot{N}(D; S^3)$ の meridian curves である。



従って torus $\partial(V - \dot{N}(D; S^3))$ の longitude curve L を $\Gamma(D)$ 上にかくことができる。すると torus $\partial(V - \dot{N}(D; S^3))$ 上の, $\chi_{S^3}(K; \mathbb{R})$ を決定する surgery curve J は, L を P 本 parallel に準備してそれを m_1 (or m_2) に沿って適当に回わして 1 本に つないだ curve として $\Gamma(D)$ 上に記入する事ができる。



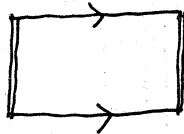
このとき $(\partial V; l_1, l_2; \partial D, J)$ は $\mathcal{X}_{S^3}(K; \frac{2}{p})$ の genus 2 H-図式であるが wave が存在しない。 //

§ 1

Def. 多角形の good 及び bad として (+) と (-)

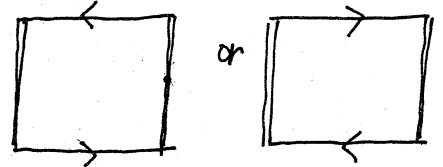
$\Gamma(D)$ を構成する 4, 6, 8 角形に於いて

- 4角形が good とは ∂D_4 にぞくす辺と ∂D -にぞくす辺が各々 1コあるとき。

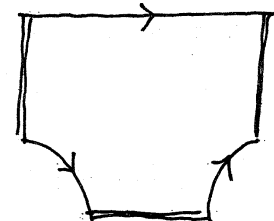


good

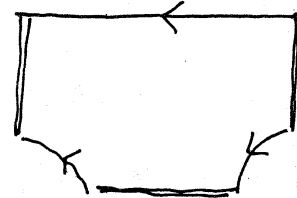
それ以外
を bad



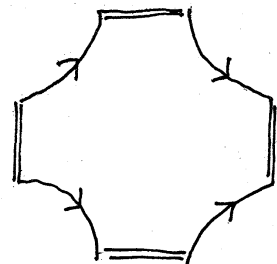
- 6角形が good (+) とは ∂D_4 にぞくす辺が 2コ, ∂D -にぞくす辺が 1コ
のとき



- 6角形が good (-) とは ∂D -にぞくす辺が 2コ, ∂D_4 にぞくす辺が 1コ
のとき



- 8角形が good とは ∂D_4 と ∂D -にぞくす辺がそれぞれ 2コあり右図の様な
とき



Lemma

I の Set $(\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial D)$ は good 8角形 2コ と 4角形 達からなる。

(ii) 2γ の good 8 辺形は bad 4 辺形の列でつながれる。

$\Rightarrow \Gamma(D)$ は 8 型である。

II (i) Set $\{aV-l_1 \cup l_2 \cup \partial D\}$ は good 8 辺形 1γ , 6 辺形が 2γ でそのうち 1γ は good, 残りは 4 辺形達かとなる。

(ii) good 8 辺形と少なくとも 1γ ある good 6 辺形は bad 4 辺形の列でつながれる。

$\Rightarrow \Gamma(D)$ は 8-6 型である

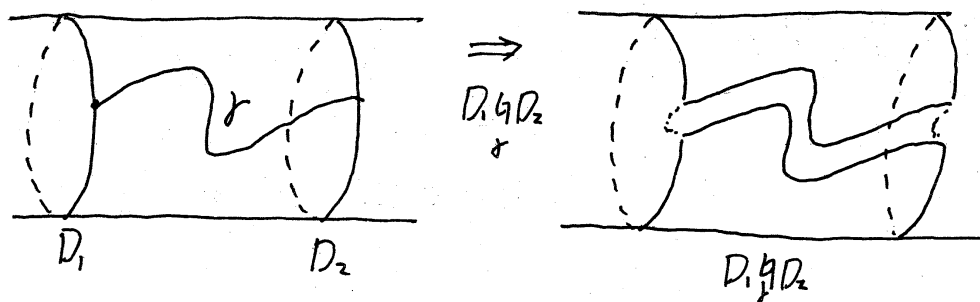
III (i) Set $\{aV-l_1 \cup l_2 \cup \partial D\}$ が 6 辺形 4γ , そのうち少なくとも 3γ が good で, 2γ は good (+) (or (-)) 1γ は good (-) (or (+)) 残りは 4 辺形達かとなる。

(ii) 2γ ある good (+) (or (-)) 6 辺形は bad 4 辺形の列でつながれる。

$\Rightarrow \Gamma(D)$ は 6 型である。 //

この Lemma は $\Gamma(D)$ が orientable である事, boundary が 2γ である事, 及び ∂D_{\pm} の向きに注意して Set $\{aV-l_1 \cup l_2 \cup \partial D\}$ にぞくす多辺形を l_1, l_2 に沿って張り合わせていけば容易にわかる。

Def. 2枚の discs D_1, D_2 の arc γ に沿う band sum $D_1 \natural D_2$



つまり, V に proper に embedding されている D_1, D_2 から $2V$ 上の arc γ により定義された band により新しく 1 枚の disc $D_1 \natural D_2$ を造る操作である。

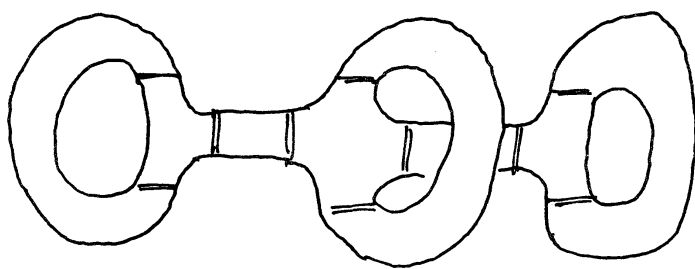
- Lemma 2
- (i) $\Gamma(D_1)$ は 8, 8-6, 6 型のいずれか
 - (ii) $\Gamma(D_1)$ は (*) をみたす。
 - (iii) $2D_2$ は $\Gamma(D_1)$ 上の m_1 , or m_2 の curve (Lemma 1)
 - (iv) Set $\{2V - l_1 \cup l_2 \cup (D_1 \natural D_2)\}$ には 2 辺形がない。
 - (v) $\gamma \cap (l_1 \cup l_2) \neq \emptyset$



$\Gamma(D_1 \natural D_2)$ は 8, 8-6, 6 型のいずれかである。

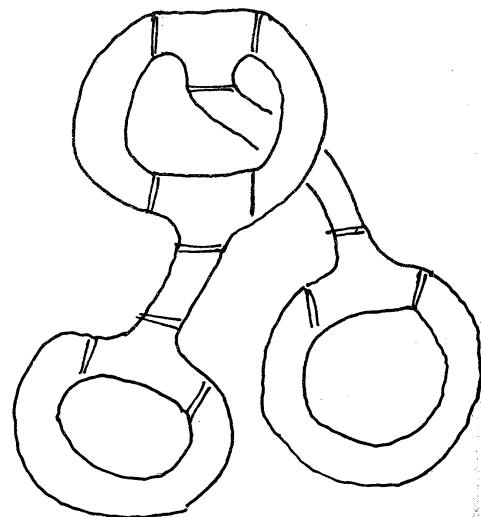
証明の概略

(i) と (iii) より $\Gamma(D_1)$ を $2D_2$ で切り開くと次のいずれかである。



I 型

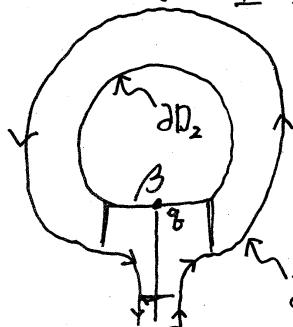
$\Gamma(D_1)$ が 8, 8-6 型 のとき



II 型

$\Gamma(D_1)$ が 8-6, 6 型 のとき

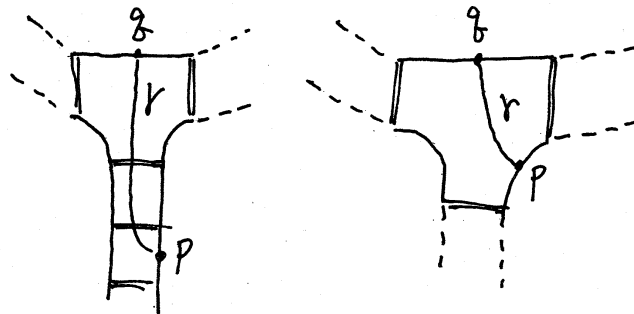
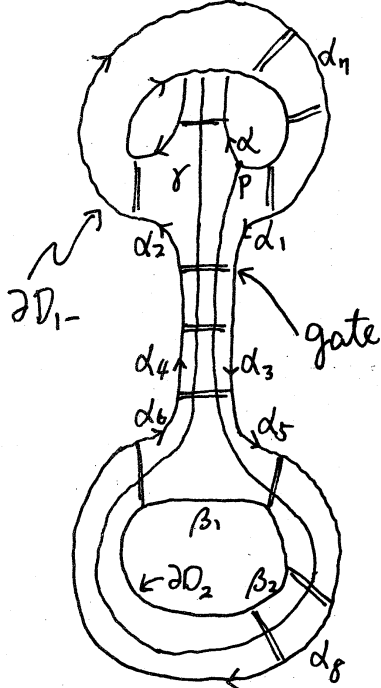
ここではI型のとくに説明する。



◦ I型の図形上に band sum を定義する arc γ をかく。 γ の2つの端点を P, Q とする。

$$P = \gamma \cap \partial D_{1\pm}, \quad Q = \partial D_2$$

このとき (iv), (v) より, 点 P, Q は4辺形の边上にはなく, また1つの多辺形の边上に P, Q の両方があることもない。



◦ 点 P は8辺形の边上にある。

◦ 点 P が ∂D_{1+} に接する边上にあれば必ず γ は gate を通る。

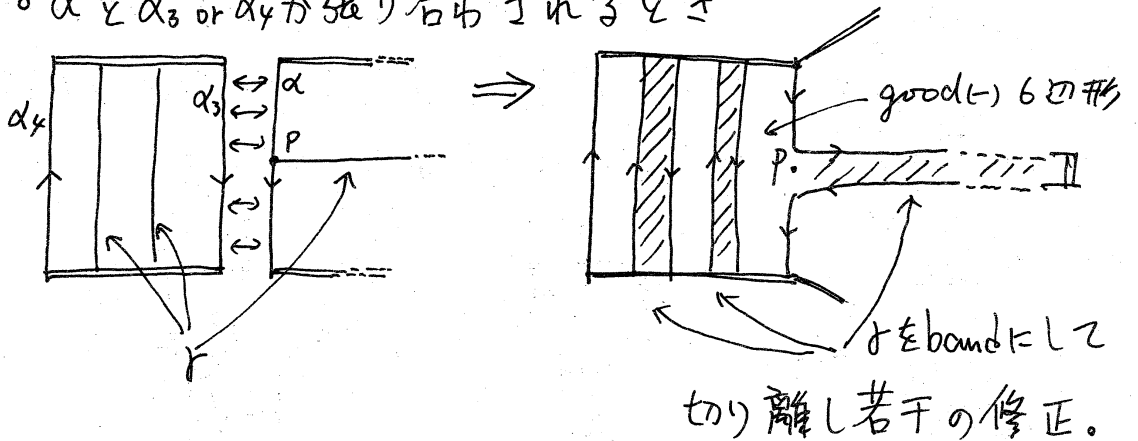
- 点 P ののっている辺を α , 点 Q ののっている辺を β とする。
- 上図で α は ∂D_{1+} に接する辺だから, α と ∂V 上で identify される辺は ∂D_{1-} に接する辺であり, それは図で $\alpha_1 \sim \alpha_8$ である。
- 同様に辺 β と identify される辺は β_1 か β_2 である。

さて $\text{Set}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ がどのような図形から成っているかを調べる。 α_2 には α_1 からの向きが付いている。

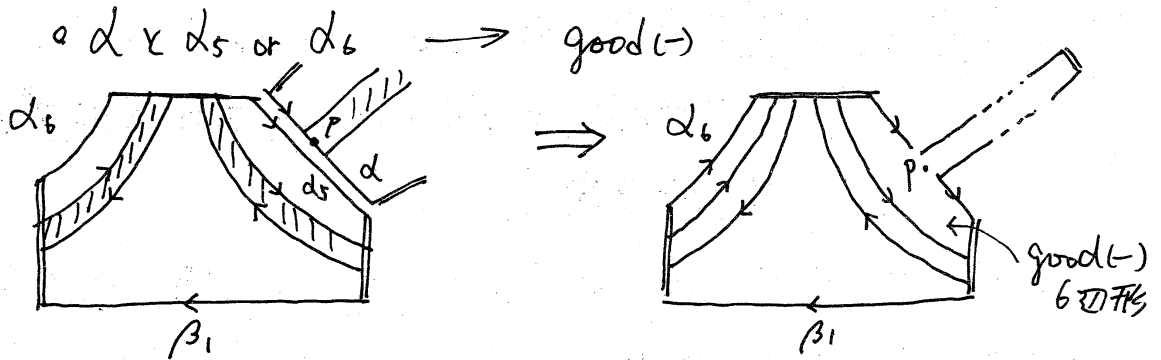
(1) まず点 P を内点を含む図形について。

・仮定(*)より α と α_1 or α_2 は張り合わせられない。

・ α と α_3 or α_4 が張り合わせられるとき

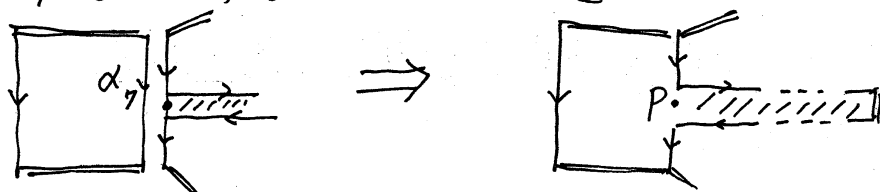


従って 点 P は $\text{Set}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ で $\text{good}(-)$ 6 辺形の内部である。

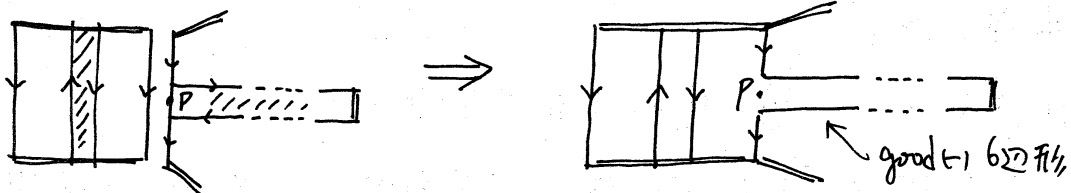


・ α と α_7 → $\text{good}(-)$ 6 边形

α_7 を辺にする 4 边形に δ が通っていないとき

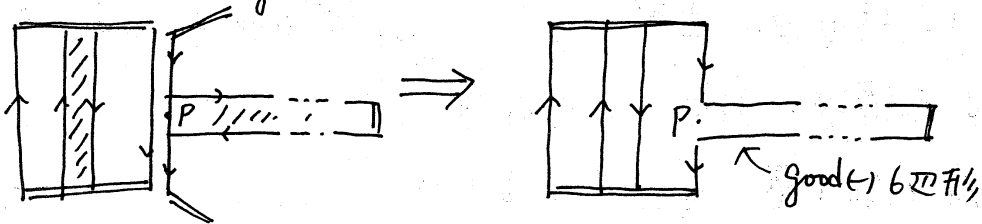


d_7 を辺にする 4 辺形に r が通っているとき



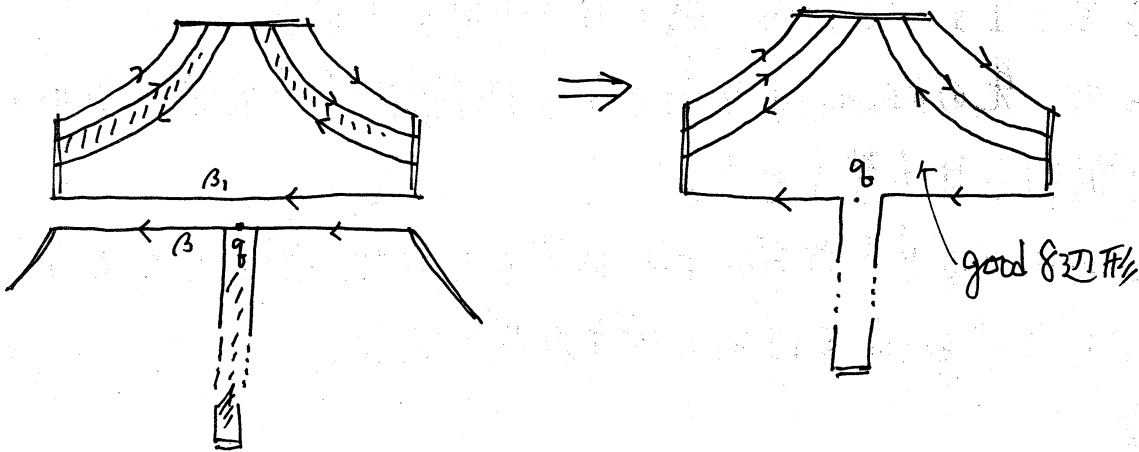
1) それにして $good(-)$ 6 辺形

◦ d_7 と d_8 → $good(-)$ 6 辺形



(II) 稜 q を内稜に含む多辺形について

◦ β と β_1 が張り合わされるとき、 q を内稜に含む図形は $good$ 8 辺形である。



◦ β と β_2 → $good(-)$ 6 辺形。このとき β_1 を辺に含む多辺形は $good(+)$ 6 辺形である。

さて稜 P と稜 q をそれぞれ内稜に含む多辺形は、 r かつ

定義される bad 4 辺形の列 (i.e. band) でつながれるから次がわかった。

(i) β と β_1 が張り合わされるとき。

Set $\{2V - l_1 \cup l_2 \cup (D_1 \cup D_2)\}$ は good 8 辺形 1 つと good (+) 6 辺形 1 つ, 更に I 型図形を構成する 8 辺形か 3 つも 1 つ 6 辺形かでき, 残りは 4 辺形。そして good 8 辺形と good (+) 6 辺形は bad 4 辺形の列でつながれる。

(ii) β と β_2 が張り合わされるとき。

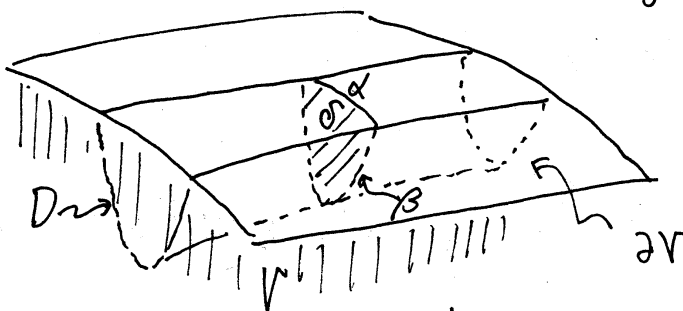
Set $\{2V - l_1 \cup l_2 \cup (D_1 \cup D_2)\}$ は 点 P を内点にする good (+) 6 辺形, (この 2 つは bad 4 辺形の列でつながれている) β_1 を辺にする good (+) 6 辺形, そして I 型図形を構成する 8 辺形か 3 つも 1 つの 6 辺形, 残りは 4 辺形より成る。

従って, 先の Lemma より (i) のとき $P(D_1 \cup D_2)$ は 8-6 型, (ii) のとき $P(D_1 \cup D_2)$ は 6 型となる。

この例では 点 P が $2D_+$ 上にあるとしたが, $2D_-$ 上にあるとすると上で good 6 辺形の符号が逆になる。 //

§ 2

Def. pair $(V: D)$ に対する 2-Compressing disc δ とは次のもの。



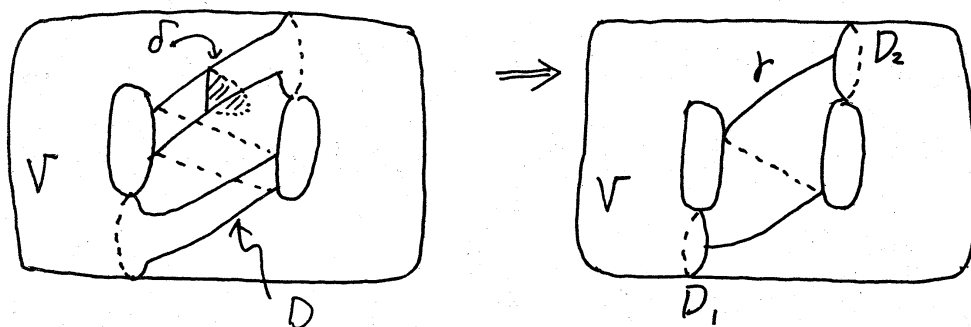
$$\alpha = 2V \cap \delta$$

$$\beta = D \cap \delta$$

$$\alpha \cup \beta = 2\delta, \alpha \cap \beta = \{zpt\}$$

更に α と ∂D の subarc でできる ∂V 上の S.C.C は ∂V 上 homotopic zero ではない。

従って pair $(V:D)$ に 2-Compressing disc δ があれば $D = D_1 \cup D_2$ と考えられる。ここで δ は $\alpha = \partial V \cap \delta$ に 1 点で transversal に交わる arc として定義される。



Lemma pair $(V:D)$ に対して D は V の standard meridian discs d_1, d_2, d_3 に parallel な何枚かの discs を適当な順に band sum したものである。

従って pair $(V:D)$ に対して上の Lemma に云う discs の最小の枚数として或る自然数が対応する。これを $n(D)$ とかく。

Def. K を tunnel number 1 (H-genus 2) knot とするとき

$$n(K) \stackrel{\text{def}}{=} \min \{ n(D) \mid K \cong \text{Core}(V - N(D; S^3)) \}$$

Remark

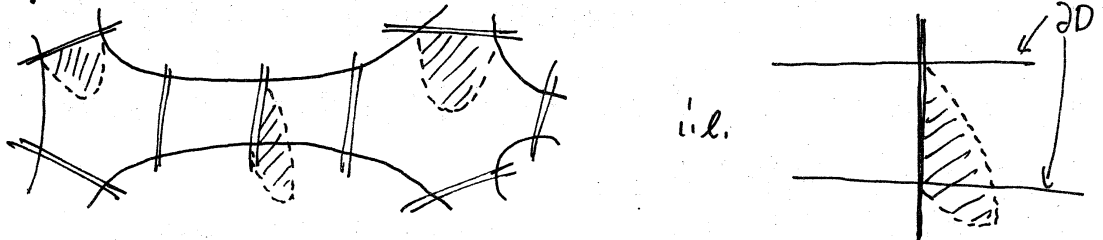
$n(K) = 2 \iff K: 2\text{-bridge knot}$

Def. type (a), (b), (c) の 2-compressing disc とは次のもの。

V の Core (i.e. spine) を S としたとき, $\delta \cap S = \emptyset$ で,

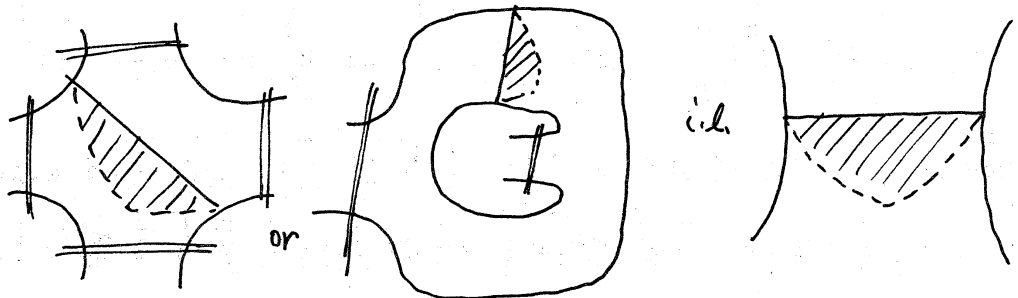
勿論 2-Compressing disc であり.

◦ type (a) の disc δ : $\partial V \cap \delta$ が l_1 or l_2 上にある.

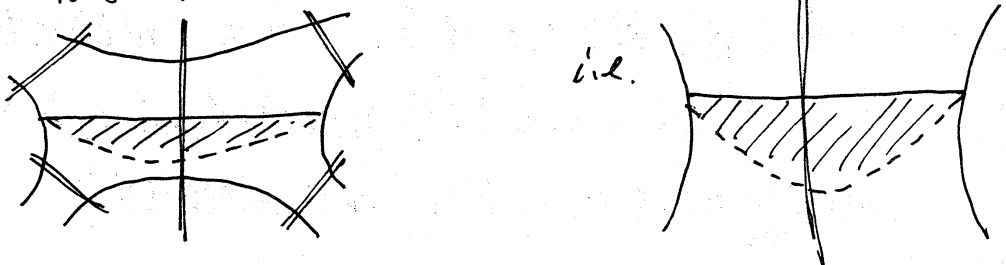


◦ type (b) の disc δ : $(\partial V \cap \delta) \cap (l_1 \cup l_2) = \emptyset$ かつ $\partial V \cup D$ を setwise に固定した V 上の ambient isotopy で type (a) の disc に重ねられるな

い。



◦ type (c) の disc δ : $\# \{ (\partial V \cap \delta) \cap (l_1 \cup l_2) \} = 1$. かつ $\partial V \cup D$ を setwise に固定した V 上の ambient isotopy で type (a), (b) の disc に重ねられない。

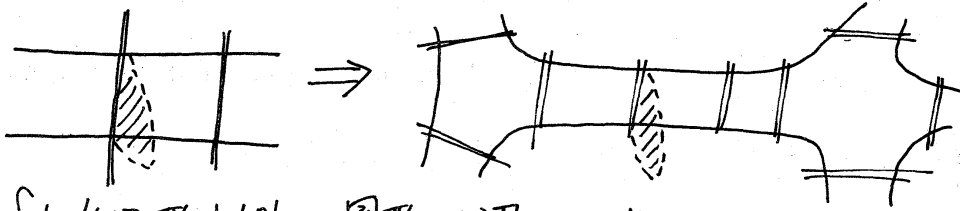


Def. type (a), (b), (c) の disc が存在したとき, $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots$ の分解のされ方を次で定める。

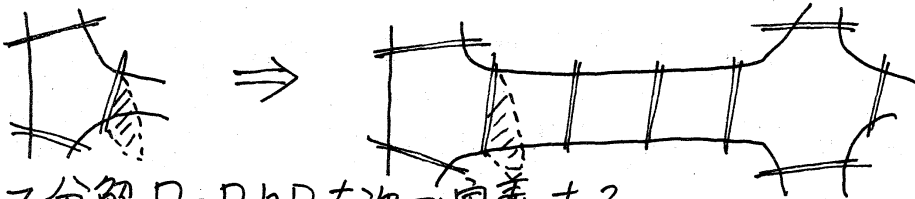
◦ type (a) の disc δ による分解

$\partial V \cap \delta$ が 4 辺形の辺のとき, 4 辺形以外の図形はつながらずま

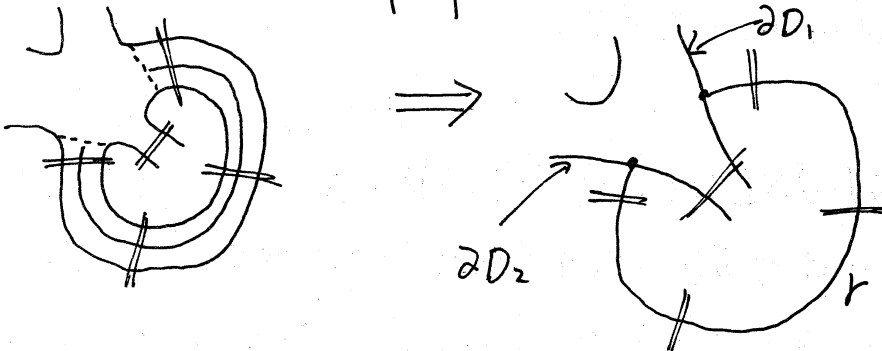
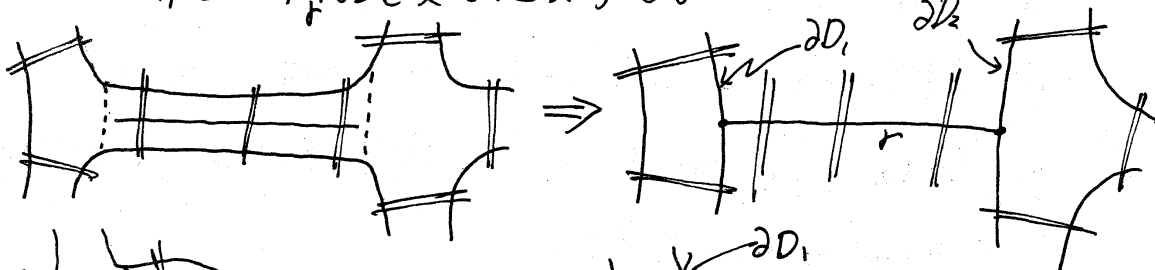
でつなげる。



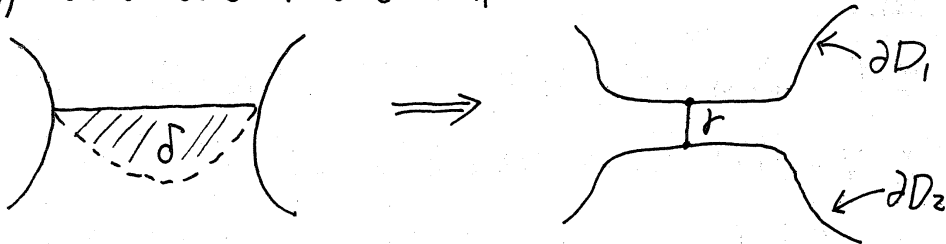
$\partial V \cap \delta$ が多辺形以外の図形の辺のとき



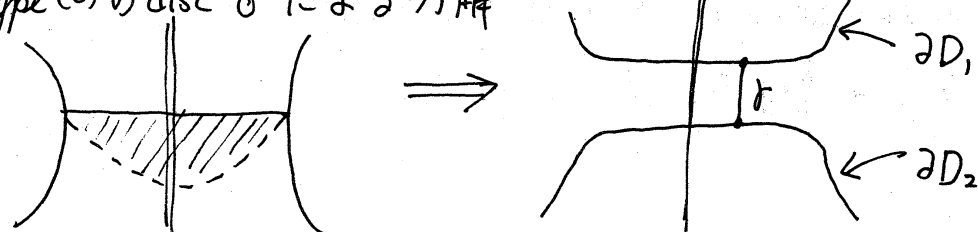
さて分解 $D = D_1 \cup D_2$ を次で定義する。



◦ type (b) の disc δ による分解



◦ type (c) の disc δ による分解



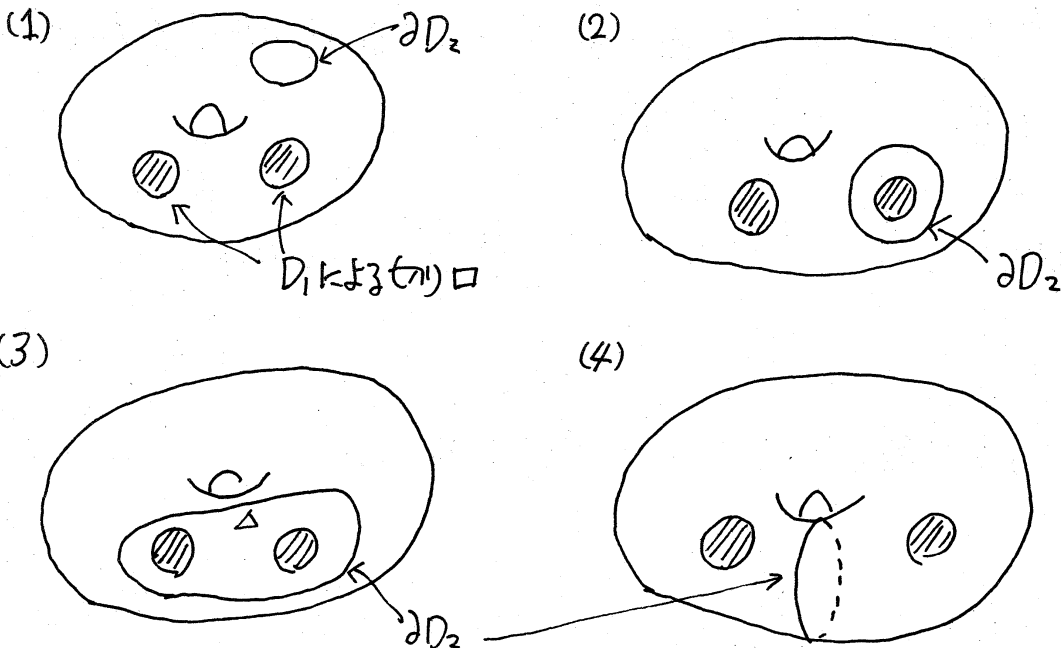
- ◎ type (a), (b), (c) の disc が存在するとき 分解の優先順位を (a) > (b) > (c) とする。つまり type (a) の disc があれば必ず (a) で分解することとし、(b), (c) ではしない……。

Lemma pair $(V; D)$ に対して $\text{Set}\{aV-l_1 \cup l_2 \cup aD\}$ に 2 辺形がなければ、上の分解 (a) > (b) > (c) により $D = D_1 \cup D_2$ になったとき

- (i) $\text{Set}\{aV-l_1 \cup l_2 \cup aD_i\}$ $i=1, 2$ にも 2 辺形がない。
- (ii) D_2 (or D_1) は solid torus $V - \mathring{N}(D_1; S^3)$ (or $V - \mathring{N}(D_2; S^3)$) の meridian disc である。

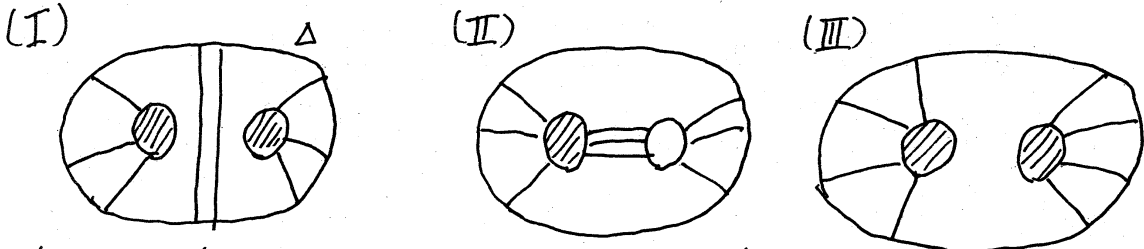
証明の方針

- (i) $\text{Set}\{aV-l_1 \cup l_2 \cup aD_1 \cup aD_2\}$ に 2 辺形のないことを示せば良いが、それは arc Γ の近傍に 2 辺形がないことを示せば十分である。これを type (a), (b), (c) のそれぞれについて調べる。
- (ii) まず、 D_1 or D_2 のいずれかは V を separate しない。従って $V - \mathring{N}(D_1; S^3)$ を solid torus とする。このとき D_2 はその solid torus に proper に embedding されているが、その embedding のされ方は次の 4 通り。そこで (1) ~ (3) をとると矛盾を示す。

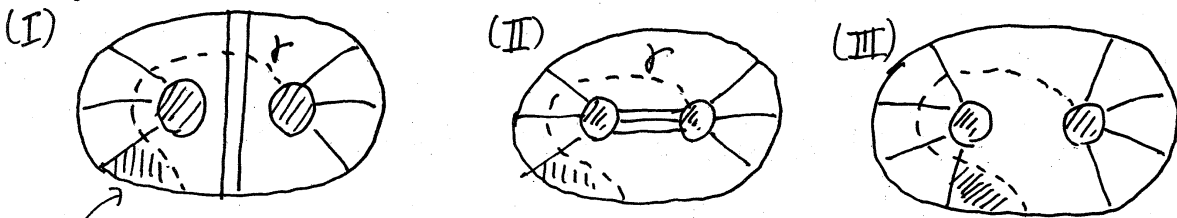


(3)が起るないことの概略

∂D_2 は \mathbb{R}^3 上の disc Δ を張るのでそれを取り出す。 Δ 上には h_1, h_2 による curve が走っているが、 h_1 により走り方の type は次の 3通りである。



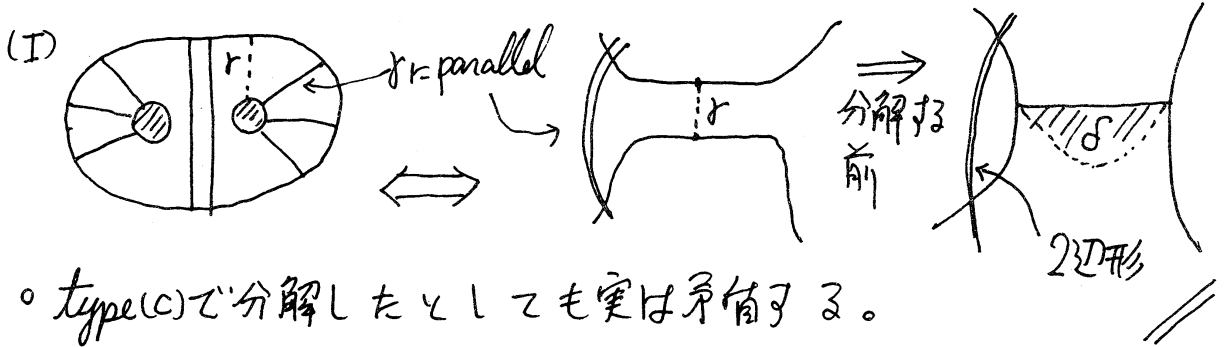
• type (a) の disc で分解したとすると矛盾



斜線部分に Set $\{aV - h_1, h_2\}$ の 2辺形ができる。

• type (b) の disc で分解したとすると矛盾

r は l_1, l_2 にごくす 辺に parallel だが, それは $\text{Set}\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial D\}$ に 2 辺形がないことに反す。例えば



Def. tunnel number 1 (H-genus 2) knot K に対応する最短 disc

D_K とは $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$ (i) $K \cong \text{Core}(V - (D_K : S^3))$

(ii) $n(D_K) = n(K) = \#\{D_K \cap S\}$

(iii) $\text{Set}\{\partial V - l_1 \cup l_2 \cup \partial D_K\}$ に 2 辺形がない。

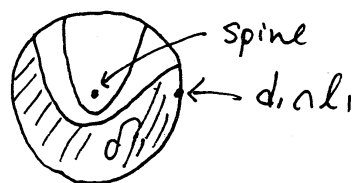
Lemma 3 K に対応する最短 disc D_K は type (a) の disc

のみで, すべてが standard meridian discs d_1, d_2, d_3 のどれかに parallel な discs の band sum まで分解される。

証明の方針

◦ pair $(V; D)$ に type (a), (b), (c) の disc が存在しなければ $D \cap (d_1 \cup d_3) \neq \emptyset$ としてよい。

(i) d_1 と D が V 上の ambient isotopy で消せない交差をしていれば disc d_1 上で $d_1 \cap D$ を観て, outer most な disc δ は (a), (b), (c) のいずれかの存在を示す。

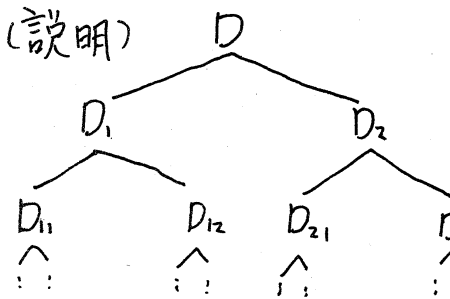


◦ $D \cap (d_1 \cup d_3) = \phi$ なる

い) D は d_1 と d_3 を band sum したものである。

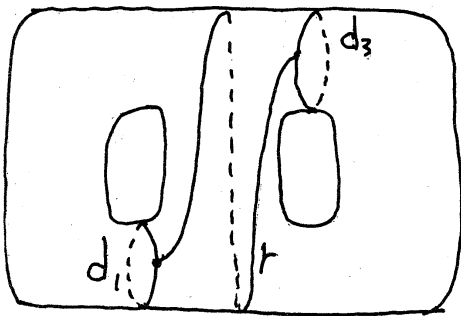
or (ii) D は d_1, d_2, d_3 のいずれかに parallel

◦ D を type (a), (b), (c) の disc で分解していき, $(a) > (b) > (c)$ 或る段階で type (a) の disc が存在しなくなれば以後その disc を分解した disc には type (a) の disc が存在しない。



D_2 に type (a) の disc が存在しなければ, type (b) or (c) で分解されてできた D_{21}, D_{22} にも type (a) の disc が存在しない。

◦ D_k の分解の途中で type (a) の disc が存在せず, d_1, d_2, d_3 のいずれにも parallel でない disc \tilde{D} ができたとする。
 \tilde{D} を type (b), (c) の disc で $\tilde{D} = d_1 \cup d_3$ を得るまで分解する。
 \tilde{D} に type (a) の disc がなければ $\tilde{D} \cap (d_1 \cup d_2) = \phi$



◦ D_k は type (a), (b), (c) の disc で d_1 と d_3 に parallel な discs の band sum により分解されその枚数は $n(k)$ 枚である。

(i) type (a), (b), (c) の disc で分解して $D = D_1 \cup D_2$ になったとすると $\#(D \cap S) = \#(D_1 \cap S) + \#(D_2 \cap S)$ だから 枚数は $n(k) = \#(S \cap D)$ でおさえられる。

従って上の $\tilde{D} = d_1 \cup d_2 \cup d_3$ の arc γ に沿って V を handle sliding
 すると $n(K)$ より少ない枚数の分解を持つ disc D' が存在し
 て、 $K \cong \text{Core}(V - N^*(\partial: S^3))$ 。これは $n(K)$ の定義に反する。//

Lemma (i) $D = d_1 \cup d_2 \cup d_3$ (ii) $\gamma \cap (L \cup K) \neq \emptyset$
 (iii) Set of $(V - L \cup K) \cap D$ に 2 辺形がない
 $\Rightarrow \Gamma(D)$ は 8 型で (*) をみताす。

Remark $D = D_1 \cup D_2$, $\Gamma(D)$, $\Gamma(D_1)$: 8, 8-6, 6 型とする。

Lemma 2 の方法で $\Gamma(D_1)$ から $\Gamma(D)$ を構成するとき。

$\Gamma(D_1)$ の 4 辺形が \longrightarrow 4 辺形連

6 辺形が \longrightarrow 6 辺形 1 個と 4 辺形連

8 辺形が \longrightarrow 6 辺形 2 個と 4 辺形連 か
 8 辺形 1 個と 4 辺形連

6 辺形 2 個が \rightarrow 8 辺形 1 個と 4 辺形連 に分れる。

Def. 6 辺形の起源

2 個の 6 辺形が 1 個の 8 辺形ができたとき
 同じ起源を持つと云う。

Remark 6 辺形 2 個から 8 辺形ができるとき、その 2 個の
 6 辺形は同じ起源である。従って $\Gamma(D_1)$ が (*) をみたせば $\Gamma(D_1 \cup D_2)$
 も (*) をみたす。

Theorem の証明

K に対応する最短 disc D_K を type (a) の disc で分解する。

$$\text{i.e. } D_K = D_1 \cup D_2 \quad ; \quad r \cap (l_1 \cup l_2) \neq \emptyset$$

$\#(D_1 \cap (l_1 \cup l_2))$ と $\#(D_2 \cap (l_1 \cup l_2))$ の大きい方を更に type (a) の disc で分解する。

これを続けて $\tilde{D} = d_1 \cup d_2, r \cap (l_1 \cup l_2) \neq \emptyset$ まで分解すると $P(\tilde{D})$ は δ 型で(*)をみたす。

\tilde{D} まで分解したのと逆の順で D_K を再構成していくが、このとき、Lemma 2 の条件はすべてみたされ、また任意の段階での 6 辺形は 或る段階の δ 辺形から分れたものであるから、6 辺形の起源を考えることができ、上の Remark により、条件(*)も各段階に遺伝していく。

従って最終的に $P(D_K)$ は $\delta, \delta-6, 6$ 型で(*)をみたしている。//

[参考文献]

[H.O.T] Homma, Ochiai and Takahasi, "An algorithm for recognizing S^3 in 3-manifolds with Heegaard splitting of genus 2" Osaka J. of Math 17, (1980) 625-648

[Ochi] Ochiai Mitsuyuki "Dehn's surgery along 2-bridge knots II"

[Os] R.P. Osborne "Property P for a class of Knots"