

Torus Fibration の指数定理

東大理 松本 幸夫 (Yukio Matsumoto)

我々は [2], [3] において, 特異ファイバーを許す Torus - Fibration (TF) を導入した. これは複素楕円曲面の C^∞ -類似であると同時に, 3次元の Seifert fiber 空間の4次元の類似をも意図したものである. この稿は, TF を持つ用いた4次元多様体の Signature (指数, 符号数) が, 特異ファイバーによって計算出来る事を示すのが目的である. いくつかの具体例につき計算し, 応用として, Good TF (cf [3]) の存在のための必要条件を与える. この稿の主な内容は [5] にある.

§1. 指数定理

以下, 全て, 多様体は Compact, oriented, smooth と仮定する. homological 交点形式 $H_2(M; \mathbb{Z}) \times H_2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ の符号数 (signature) を $\text{Sign}(M)$ と書く事にする.

$i=1, 2$ について, T.F. $f_i: M^4 \rightarrow B_i^2$ の中の特異ファイバーを F_i とする. $\{p_i\} = f_i(F_i)$ とする.

定義. F_1 と F_2 が topologically equivalent とは, $\text{Int}(B_1^2)$, $\text{Int}(B_2^2)$ における p_1, p_2 の近傍 U_1, U_2 と, 位相同形 $h: U_1 \rightarrow U_2$, $H: f_1^{-1}(U_1) \rightarrow f_2^{-1}(U_2)$ があって, (i) $h(p_1) = p_2$, (ii) $h \circ f_1 = f_2 \circ H$ が成立つ事である.

\mathcal{F} を特異ファイバーの全々の topological equivalence classes の作る集合とする. $\frac{1}{3}\mathbb{Z}$ で, 分母が 3 であるような有理数全体 (整数も含む) を表わす.

定理 1. (指数定理). 実際に計算可能な写像 $\sigma: \mathcal{F} \rightarrow \frac{1}{3}\mathbb{Z}$ があって, 次の性質を持つ: $f: M^4 \rightarrow B^2$ が T.F. で, M^4 は closed とする. その特異ファイバーの全体を F_1, \dots, F_r とすれば, $\text{Sign}(M) = \sum_{i=1}^r \sigma(F_i)$ が成立つ.

もし, 一本の特異ファイバー F_0 が, F_1', \dots, F_r' に (変形を通じて) 分裂すれば, $\sigma(F_0) = \sum_{i=1}^r \sigma(F_i')$ が成立つ. σ -数の保存則である. 定理 1 に見るように, 各々の特異ファイバーは, 分数値の signature を持って 11 するようにふるまう.

定理1の証明. 定理1は指数に関する Novikov の和公式と W.Meyer [4] の定理から従う. W.Meyerの定理を, Torus Bundle の場合に復習しよう. $\omega: E \rightarrow X$ を連結曲面上のトラス・バンドルとし, $\partial X = C_1 \cup \dots \cup C_r$ とする. C_i には X からの向きを入れしておく. 制限 $E|_{C_i}$ の monodromy 行列を $\alpha_i \in SL(2, \mathbb{Z})$ とすると, α_i の共役類は一意的に定まる. W.Meyer は次のような類関数 $\varphi: SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \frac{1}{3}\mathbb{Z}$ を導入した.

$$\varphi(\alpha) = -\frac{1}{3}\Psi(\alpha) + \tau(\alpha) \cdot \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(\text{Trace}(\alpha)))$$

ここに, $\Psi(\alpha)$ は Rademacher の関数で

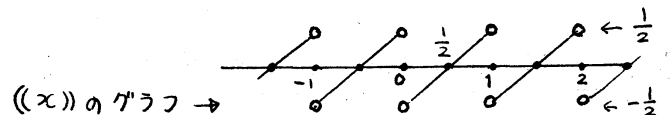
$$\Psi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{a+d}{c} - 12 \text{sign}(c) s(a, c) - 3 \text{sign}(c(a+d)) & (c \neq 0) \\ \frac{b}{d} & (c = 0) \end{cases}$$

で与えられる. Ψ の定義式の右辺の $s(a, c)$ は

$$s(a, c) = \sum_{k \bmod |c|} \left(\left(\frac{ak}{c} \right) \right) \left(\left(\frac{k}{c} \right) \right) \quad (\text{Dedekind sum})$$

$$\left(\left(x \right) \right) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

である.



また、 $\varphi(\alpha)$ の定義式の右辺の $\tau(\alpha)$ は (Meyerの論文では $\sigma(\alpha)$ と書かれていたが、この稿では $\sigma(F_i)$ とまぎれるのを恐れ、 $\tau(\alpha)$ と書いた)次で与えられる。

$$\tau \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{Sign} \begin{pmatrix} -c, & \frac{1}{2}(a-d) \\ \frac{1}{2}(a-d), & b \end{pmatrix} \quad (\text{行列の符号数})$$

さて、Meyerの定理によれば、トーラスバンドル $E \rightarrow X$ の全空間 E の $\text{Sign}(E)$ は、

$$\text{Sign}(E) = \sum_{i=1}^r \varphi(\alpha_i)$$

である。(Meyerの論文[4]の Satz 5 と符号が反対のように見えるが、彼の論文の $\tau(E, \partial E)$ なる量は、実は $-\text{Sign}(E)$ であるらしい。[4]の式(4)を参照。実際に計算してみると上の式で良いことがわかる。)

さて我々のT.F.(トーラス・ファイブレーション)の場合にとり、 $f: M^4 \rightarrow B^2$ を定理1の通りとする。 $p_i = f(F_i)$ を中心とする B^2 中の小開円板 D_i をとり、 $N_i = f^{-1}(D_i)$ とする。 $E = M - \bigcup_{i=1}^r N_i$ とおけば、 E は、 $X = B^2 - \bigcup_{i=1}^r D_i$ 上のトーラス・バンドルである。ここで次の“暗黙の誦解”を確認しておく。つまり、‘特異ファイバーの monodromy’ と言っ

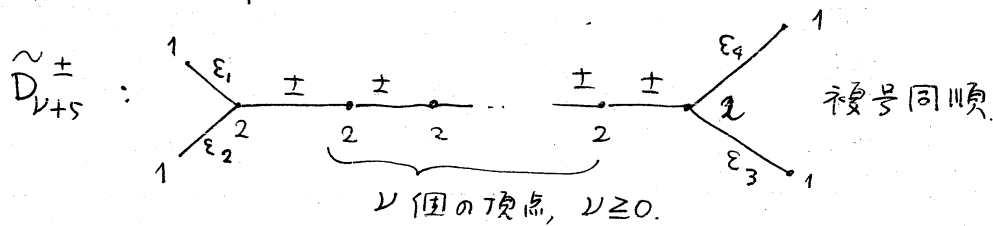
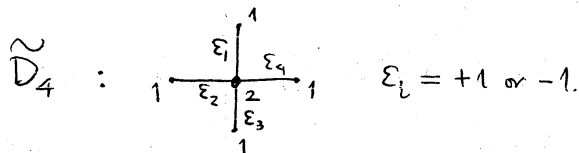
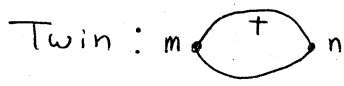
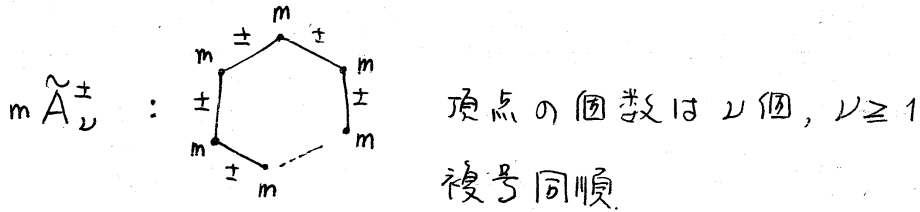
た時には, S^1 上の torus bundle $\partial\bar{N}_i \rightarrow \partial\bar{D}_i$ の monodromy の事を指すが, その場合の $\partial\bar{D}_i$ の向きは, \bar{D}_i からの向きが入ったものと考えるのである. これは, 前々頁に述べた Meyer の定理の中の monodromy α_i の向きとは反対である. 従って, 所謂, F_i の monodromy matrix を β_i とすれば, $\beta_i = \alpha_i^{-1}$ である. よって $\text{Sign}(E) = \sum_{i=1}^r \varphi(\alpha_i) = -\sum_{i=1}^r \varphi(\beta_i)$ となる. (一般に $\varphi(\alpha^{-1}) = -\varphi(\alpha)$ が知られている. ... Meyer の論文 [4] の公式 (42).)

Novikov の和公式から, $\text{Sign}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^r \text{Sign}(N_i) \right\} + \text{Sign}(E)$
 $= \sum_{i=1}^r \{ \text{Sign}(N_i) - \varphi(\beta_i) \}$ であり, $\sigma(F_i) = \text{Sign}(N_i) - \varphi(\beta_i)$
 とおけば, 求める式 $\text{Sign}(M) = \sum_{i=1}^r \sigma(F_i)$ を得る. σ -数の中には, 指数の部分 $\text{Sign}(N_i)$ と, monodromy の部分 $-\varphi(\beta_i)$ が混在しているわけである.

§2. 計算例.

Normal Crossingのみを singularity とする特異ファイバーについて計算してみよう. これは $I_0, \hat{A}, \hat{D}, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ の 6類に分類されるが, 更に各 class を細分して, 次のような記号で表わす. (\hat{A}, \hat{D} , etc. の分類については [2], [3] 参照)

(次頁の図を参照のこと). 次頁の $m\hat{A}_2^{\pm}$, Twin は \hat{A} の特殊型であり, これで \hat{A} 全部を尽くすという意味ではな

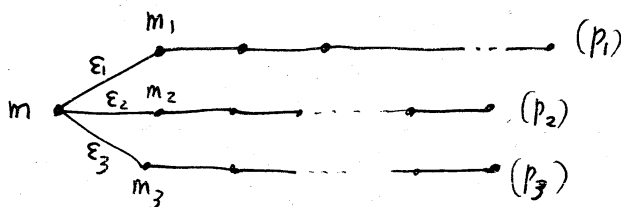


\tilde{E}_6^\pm : \tilde{E}_6 であって $\epsilon_3 m_3 \equiv \mp 1 \pmod{3}$ のもの.

\tilde{E}_7^\pm : \tilde{E}_7 であって $\epsilon_3 m_3 \equiv \mp 1 \pmod{4}$,

\tilde{E}_8^\pm : \tilde{E}_8 であって $\epsilon_3 m_3 \equiv \mp 1 \pmod{6}$. } 複号同順.

最後の3類にあたりては、 ϵ_3, m_3 は下図にあける符号、重複度 (multiplicity) を表わす。



ただし、 $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ に従って、それぞれ、 $p_3 = 3,$

$p_3 = 4, p_3 = 6$. である。(p_i の意味について) は [2] 参照)

定理2. 次の表を得る.

F の class		$\sigma(F)$	euler 数 $\chi(F)$
	mI_0	0	0
\tilde{A}	$m\tilde{A}_\nu^\pm$	$\mp \frac{2}{3}\nu$	ν
	Twin	0	2
\tilde{D}	\tilde{D}_4	$-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$	6
	$\tilde{D}_{\nu+5}^\pm$	$\mp \frac{2}{3}(\nu+1) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$	$\nu + 7$
	\tilde{E}_6^\pm	$\pm \frac{2}{3} - \sum \varepsilon$	(頂点の回数) + 1
	\tilde{E}_7^\pm	$\pm 1 - \sum \varepsilon$	"
	\tilde{E}_8^\pm	$\pm \frac{4}{3} - \sum \varepsilon$	"

(表中で, $\sum \varepsilon$ とあるのは全ての edge にわたる符号の和)

この表を使うか, あるいは Kodaira の表 ([1] の 604 頁) を使うと, 複素楕円曲面の特異ファイバーの σ 数が次のように計算できる. (下の系における記号 mI_b, mI_b^*, II, etc については [1] 参照.)

系 2.1. 次の表を得る.

F	mI_0	mI_b	mI_b^*	II	II*	III	III*	IV	IV*
$\sigma(F)$	0	$-(\frac{2}{3})b$	$-\frac{2}{3}(b+6)$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{20}{3}$	-2	-6	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{16}{3}$

系2.1の表と、 mI_0, mI_1, \dots の euler 数の値 (Kodairaの論文 III にその表がある) を比較すると、複素楯円曲面の特異ファイバー F (但し例外曲線は含まないもの) については常に $\sigma(F) = -\frac{2}{3} \chi(F)$ が成り立つことがわかる。これは楯円曲面 M については知られた公式 $\text{Sign}(M) = -\frac{2}{3} \chi(M)$ の局所形と考えられる。

このような事実は、Torus Fibration には、そのままで拡張できないが、normal crossing 型の singular fiber については、次が言える。

定理3 $F = \sum m_i \Theta_i$ を normal 型の特異ファイバーとする。もし self-intersection number $\Theta_i \cdot \Theta_i$ が各々の Θ_i については偶数ならば、 $|\sigma(F)| \leq \frac{2}{3} \chi(F)$ が成立つ。

定理3は、定理2の各 fiber につき検討することによりわかる。系として次を得る (GTF の定義については [3] 参照)

系3.1 $f: M \rightarrow B$ が GTF であり、 M が closed とする。もし $w_2(M) = 0$ ならば、 $|\text{Sign}(M)| \leq \frac{2}{3} \chi(M)$ が成立つ。

これは GTF (good torus fibration) が存在するための

ひとつの必要条件になっている。たとえば、K3 曲面 M には GTF があるが、 χ の連結和 $M' = M \# M$ には、($\text{Sign}(M') = -32$, $\chi(M') = 46$ であるから) GTF が存在しない事がわかる。

文 献

- [1] K. Kodaira : On compact analytic surfaces; II. Ann. of Math., 77, 563-625 (1963).
- [2] Y. Matsumoto : On 4-manifolds fibered by tori, Proc. Japan Acad. 58, 298-301 (1982)
- [3] ————— : Good torus fibrations, preprint, Univ. of Tokyo. Oct. (1982).
- [4] W. Meyer : Die Signature von Flächenbündeln, Math. Ann., 201, 239-264 (1973).
- [5] Y. Matsumoto : On 4-manifolds fibered by tori; II, (to appear).

< 1983 Jan. 27 記 >