数理解析研究所講究録
487巻 1983年 84-111

Periodic maps on compact surfaces II

上智大理工　横山和夫（Kazuo Yokoyama）

<u>問題</u>　compact connected な２次元多様体 M 上の period n の periodic map を分類せよ！

この問題に完全な解決を与える．すなわち

(1) どういう条件のとき periodic map は存在するか？

(2)（同値なものを除いて）いくつあるか？

(3) 与えられた２つの M 上の periodic map が同値であるかどうかを判定する Algorithm を求める。

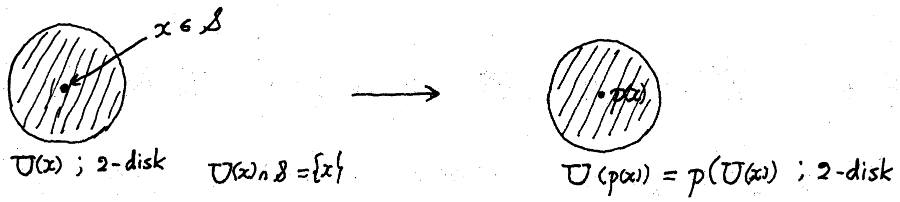
<u>定義１</u>　M, M' を２次元多様体　f を M 上の f' を M' 上の period n の periodic map とするとき，$fh = hf'$ をみたす同相写像 $h : M \longrightarrow M'$ が存在するとき f と f' は（あるいは (f, M) と (f', M') は）<u>同値である</u>といい，$f \sim f'$（$(f, M) \sim (f', M')$）と表わす。

以下２次元多様体といえばことわらない限り compact で connected であるとする。

今．f が M 上の period n の periodic map のとき，$S_k(f) = \{x \in M \,;\, f^k(x) = x$ かつ $f^i(x) \neq x\ (1 \le i < k)\}\ (1 \le k < n)$，$S(f) = \bigcup_{k=1}^{n-1} S_k(f)$ とおく。その時 Whyburn [7] により M の f による orbit space $X = M/f$ は２次元多様体で，canonical map $p : M \longrightarrow X$ は $p(S(f)) = S$ を branched set とする n-fold cyclic branched covering になっている．そこで $P_n(X, S) = \{ f : M \longrightarrow M$; period n の periodic map $\mid$ (1) $M/f \cong X$ (2) canonical projection $p : M \longrightarrow X$ が branched set S をもつ n-fold cyclic branched covering$\}$ とおき，$\mathcal{P}_n(X, S) = P_n(X, S)/\sim$ と表わす．

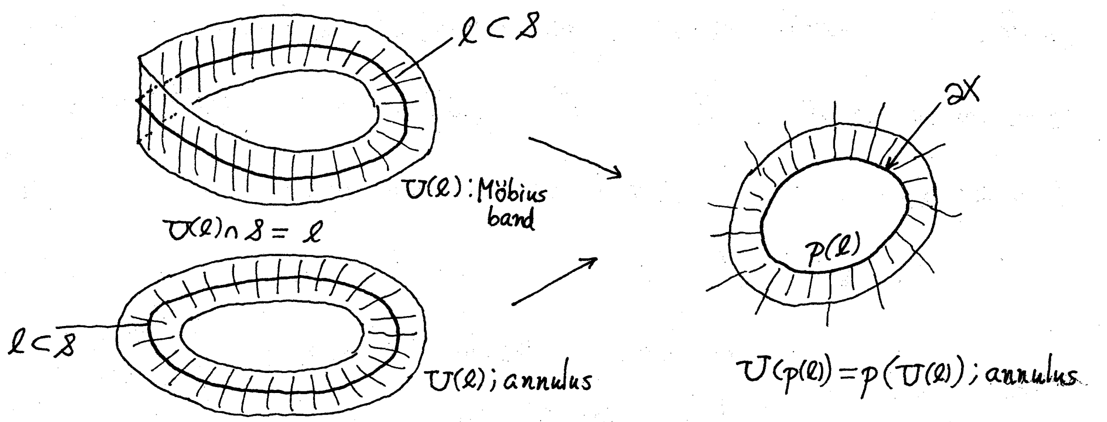
Prop.1 $S(f)$ はお互いに交わらない (i) $\mathring{M}$ の孤立点 (ii) $\mathring{M}$ の simple loop (iii) simple proper arc からなり，$p : M \longrightarrow X$ によっては近傍も含めて次のようになる．

(i)



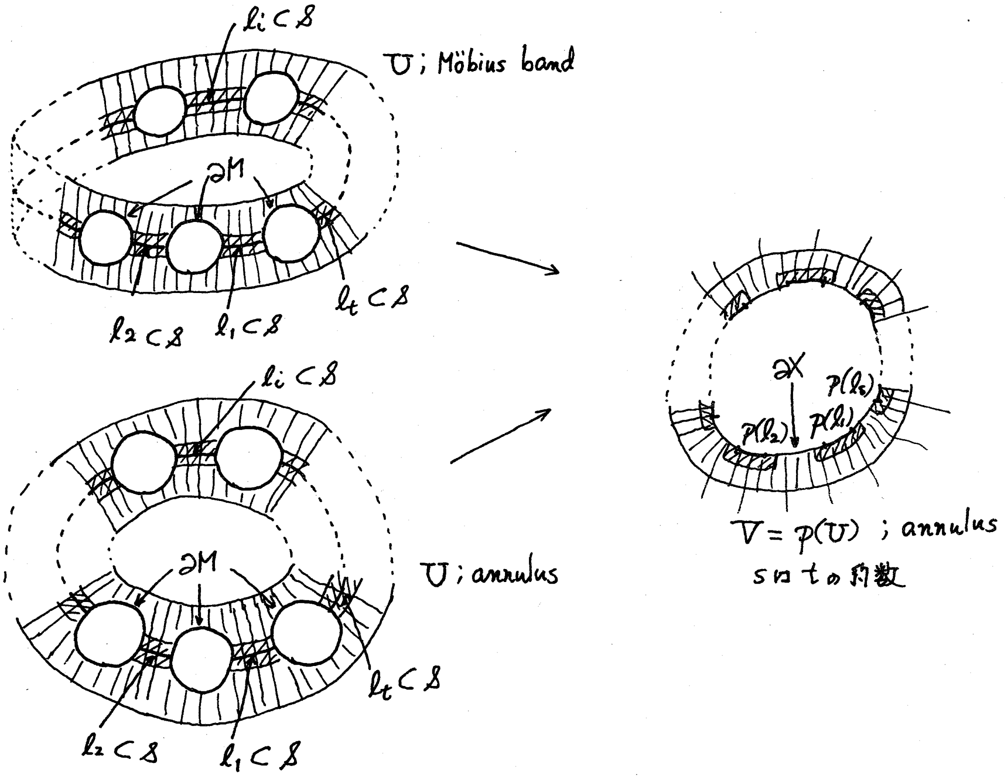
(ii)$_1$

(ii)$_2$



(iii)$_1$

(iii)$_2$

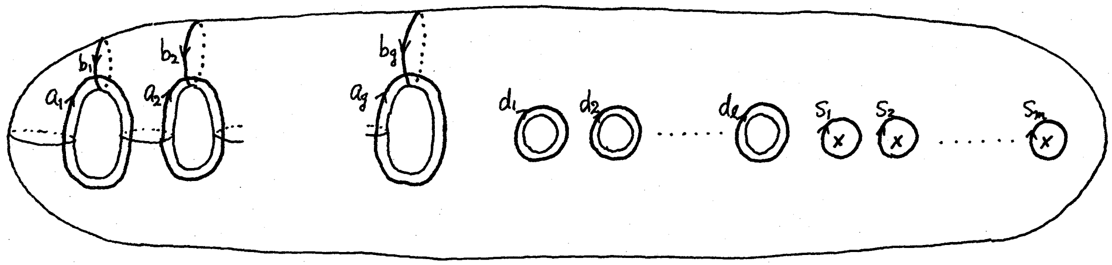


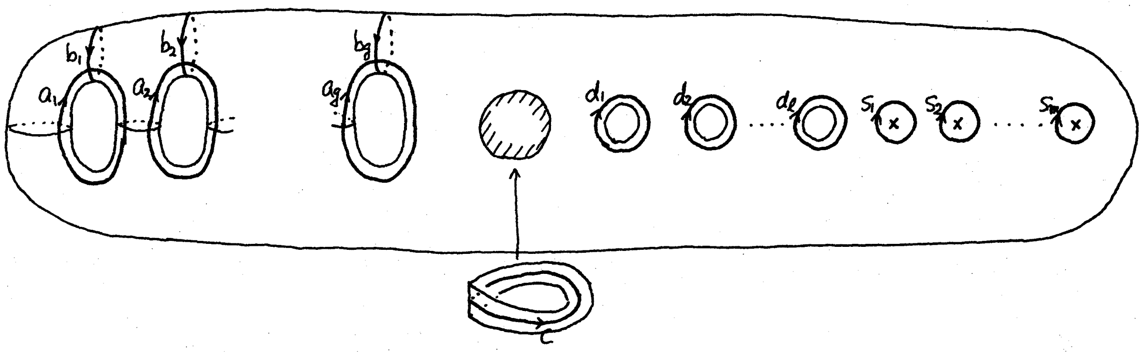
〈記号〉 $\mathcal{S}(f)$ のうち type (i) の点の集合を $\mathcal{S}^0(f)$, type (ii) (iii) の点の集合を $\mathcal{S}^1(f)$ と表わす.

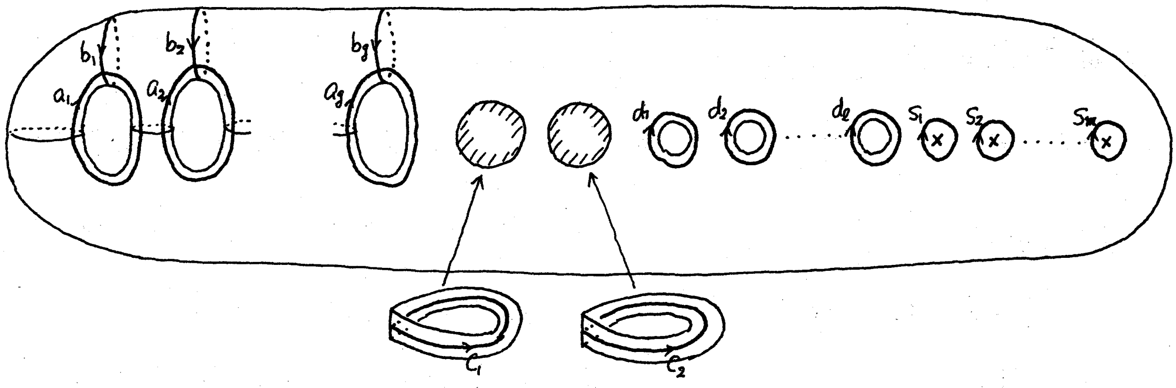
§1. $\mathcal{S}^1(f) = \phi$ の時, $P_n(X, S)$ の同値類の完全代表系の決定

X を genus g の orientable surface (genus $2g+1$ の non-orientable surface) < genus $2g+2$ の non-orientable surface > で boundary component の数を l , $S^0 = p(\mathcal{S}^0(f))$ の点の個数を m として, X 上に図のように closed curve $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_g, b_g$, $(c) < c_1, c_2 >$, $d_1, d_2, \cdots, d_l$, $s_1, s_2, \cdots, s_m$ をとるとき

$$H_1(X-S\,;\,\mathbb{Z}) = \left\langle \begin{matrix} a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_g, b_g, (c) < c_1, c_2 > \\ d_1, d_2, \cdots, d_l, s_1, s_2, \cdots, s_m \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} (2c+) < 2c_1 + 2c_2 + > \\ d_1 + d_2 + \cdots + d_l + s_1 \\ + s_2 + \cdots + s_m = 0 \end{matrix} \right\rangle$$







さて $[H_1(X-S);\mathbb{Z}_n]^*$ を $H_1(X-S)$ から $\mathbb{Z}_n$ の上への準同型写像 ω で $\omega(s_k)\neq 0$ をみたすものの集合とするとき，Smith [5] と branched covering の性質によって

<u>Prop. 2</u> $\mathcal{P}_n(X,S)$ と $[H_1(X-S);\mathbb{Z}_n]^*$ の $\mathcal{A}$-同値類は一対一の対応する。

<u>定義2</u> $\omega_1,\omega_2\in[H_1(X-S);\mathbb{Z}_n]^*$ に対して，同相写像 $h:(X,S)\longrightarrow(X,S)$ が存在して $h_*=(h|_{X-S})_*$ とおくとき，

$\omega_2 h_* = \omega_1$ をみたすとき ω_1 と ω_2 は $\underline{A}$-同値 という.

$\omega \in [H_1(X-S)\,;\,\mathbb{Z}_n]^*$ が与えられた時, $\omega(a_i)=\alpha_i$, $\omega(b_i)=\beta_i$ $(\omega(c)=\gamma)$ $<\omega(c_1)=\gamma_1,\ \omega(c_2)=\gamma_2>$, $\omega(d_j)=\delta_j$, $\omega(S_k)=\theta_k$ となる時, ω を $\mathbb{Z}_n$ の元の組（下の条件をみたす）

$(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_g,\beta_g,(\gamma)<\gamma_1,\gamma_2>,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_j,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$

で表わすことにする。（逆にこの $\mathbb{Z}_n$ の元の組が与えられれば ω は一意に決まる。）

☆ $(2\gamma+)<2\gamma_1+2\gamma_2+>\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m \equiv 0 \pmod n$

☆ $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_g,\beta_g,(\gamma)<\gamma_1,\gamma_2>,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ の最大公約数は mod n で 1 である。

その時 [2][3][6] によって ([8][9][11] 参照)

<u>Prop 3</u> X が orientable の時 (X,S) の Homeotopy group の generator は ρ, ρ_{12}, τ_1, μ_1, θ_{12}, η, ∂_j, σ_k, ∂_a, σ_a, である。

<u>Prop. 4</u> X が genus $2g+1$ の non-orientable surface の時 (X,S) の Homeotopy group の generator は ρ, ρ_{12}, τ_1, μ_1, θ_{12}, $\mathcal{Y}_1$, ∂_j, σ_k, ∂_a, σ_a, ∂_γ, σ_γ である。

<u>Prop. 5</u> X が genus $2g+2$ の non-orientable surface の時 (X,S) の Homeotopy group の generator は ρ, ρ_{12}, τ_1, μ_1, θ_{12}, $\mathcal{Y}_2$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, ∂_j, σ_k, ∂_a, σ_a, ∂_{γ_1}, ∂_{γ_2}, σ_{γ_1}, σ_{γ_2} である。

これらの結果を使うと $[H_1(X-S);\mathbb{Z}_n]^*$ の A-同値類の完全代表系は次のようになる。([8][9][11] 参照)

<u>定理 1</u>　X が compact orientable surface of genus g の時

(i)
$$\left\{\begin{array}{l} (1,0,0,0,\cdots,0,0,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ; \\ \qquad 0\le\delta_1\le\delta_2\le\cdots\le\delta_\ell<n\ ,\ \ 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m<n \ \text{——①} \\ \qquad \delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0 \pmod n \ \text{——②} \end{array}\right\}\Big/\underset{\eta}{\sim}$$

if $g\geqq 1$;

(ii)
$$\left\{\begin{array}{l} (\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ; \\ \qquad ①\qquad ② \\ g.c.d.\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m\}\equiv 1 \pmod n \end{array}\right\}\Big/\underset{\eta}{\sim}$$

if $g=0$.

<u>定義 3</u>　(i) $(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\underset{\eta}{\sim}(\delta_1',\delta_2',\cdots,\delta_\ell',\theta_1',\theta_2',\cdots,\theta_m')$

$\Longleftrightarrow$ ・ $\delta_j=\delta_j'$ かつ $\theta_k=\theta_k'$　$(1\le j\le\ell\ ,\ 1\le k\le m)$

or ・ $\left(\begin{array}{l}\delta_1=\delta_2=\cdots=\delta_{\ell_0}=0<\delta_{\ell_0+1}\le\delta_{\ell_0+2}\le\cdots\le\delta_\ell<n \\ \delta_1'=\delta_2'=\cdots=\delta_{\ell_0'}'=0<\delta_{\ell_0'+1}'\le\delta_{\ell_0'+2}'\le\cdots\le\delta_\ell'<n\end{array}\right.$

の時　$\ell_0=\ell_0'$ で　$n-\delta_j=\delta_{\ell-j+\ell_0+1}$　$(\ell_0+1\le j\le\ell)$

かつ ・ $n-\theta_k=\theta_{m-k+1}'$　$(1\le k\le m)$

(ii) $(1,0,0,0,\cdots,0,0,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\underset{\eta}{\sim}(1,0,0,0,\cdots,0,0,\delta_1',\delta_2',\cdots,\delta_\ell',\theta_1',\theta_2',\cdots,\theta_m')$

$\Longleftrightarrow$　$(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\underset{\eta}{\sim}(\delta_1',\delta_2',\cdots,\delta_\ell',\theta_1',\theta_2',\cdots,\theta_m')$

<u>定理 2</u>　X が compact non-orientable surface of genus $2g+1$ の時

(I) n : odd の時　$[H_1(X-S);\mathbb{Z}_n]^*$ の $\mathcal{A}$ − 同値類の完全代表系は

(i)
$$\left\{\begin{array}{l} (1,0,0,0,\cdots,0,0,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ; \\ \qquad 0\le\delta_1\le\delta_2\le\cdots\le\delta_\ell<\frac{n}{2}\ ,\ \ 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m<\frac{n}{2} \ \text{——①} \end{array}\right.$$

$$\left(2\gamma+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_l+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m \equiv 0 \pmod{n} \quad \text{——} ② \right)$$

if $g \geqq 1$;

(ii) $$\left\{ \begin{array}{l} (\gamma, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \ ; \\ \qquad ① \qquad ② \\ \text{g.c.d.}\{\gamma, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\} \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\}$$

if $g = 0$.

(Ⅱ) n : even の時 $[H_1(X-S)\,;\,\mathbb{Z}_n]^*$ の A－同値類の完全代表系は 次の集合の disjoint union

(i)

$$\mathbb{Z}_n(2g+1\,;\,l, m)^{\circ}_1 = \left\{ \begin{array}{l} (1,0,0,0,\cdots,0,0,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ; \\ \qquad ① \qquad ② \end{array} \right\}$$

$$\mathbb{Z}_n(2g+1\,;\,l, m)^{*}_1 = \left\{ \begin{array}{l} (1,0,0,0,\cdots,0,0,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ; \\ \delta_l = \frac{n}{2} \ \text{or} \ \theta_m = \frac{n}{2} \ , \ 0 \leq \gamma < \frac{n}{2} \quad \text{——} ③ \\ 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_l \leq \frac{n}{2} \ , \ 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_m \leq \frac{n}{2} \ \text{——} ①' \\ \qquad ② \end{array} \right\}$$

$$\mathbb{Z}_n(2g+1\,;\,l, m)^{\circ}_2 = \left\{ \begin{array}{l} (2,0,0,0,\cdots,0,0,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ; \\ \gamma\ ;\text{odd} \ , \ \delta_j\ ;\text{even} \ , \ \theta_k\ ;\text{even} \quad \text{——} ④ \\ \qquad ① \ , \ ② \end{array} \right\}$$

$$\mathbb{Z}_n(2g+1\,;\,l, m)^{*}_2 = \left\{ \begin{array}{l} (2,0,0,0,\cdots,0,0,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ; \\ \qquad ①' \quad ② \quad ③ \quad ④ \end{array} \right\}$$

if $g \geqq 1$;

(ii)

$$\mathbb{Z}_n(1\,;\ell,m)^{\circ}=\left\{\begin{array}{l}(\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ;\\ \qquad ①\quad ②\\ \text{g.c.d.}\{\gamma,\delta_1,\delta_2\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2\cdots,\theta_m\}\equiv 1 \pmod n\end{array}\right\}$$

$$\mathbb{Z}_n(1\,;\ell,m)^{*}=\left\{\begin{array}{l}(\gamma,\delta_1,\delta_2\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2\cdots,\theta_m)\ ;\\ \quad ③\quad ①'\quad ②\\ \text{g.c.d.}\{\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2\cdots,\theta_m\}\equiv 1 \pmod n\end{array}\right\}$$

<u>定理3</u>　X が compact non-orientable surface of genus $2g+2$, $g\geq 1$

(I) n: odd の時　$[H_1(X-S)\,;\mathbb{Z}_n]^*$ の $\mathcal{A}$-同値類の完全代表系は

$$\left\{\begin{array}{l}(1,0,0,0,\cdots,0,0,\underline{0},\underline{\gamma},\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ;\\ \qquad\qquad ①\quad ②\end{array}\right\}$$

(II) n: even の時　$[H_1(X-S)\,;\mathbb{Z}_n]^*$ の $\mathcal{A}$-同値類の完全代表系は

次の集合の disjoint union

$$\mathbb{Z}_n(2g+2\,;\ell,m)_1^{\circ}=\left\{\begin{array}{l}(1,0,0,0,\cdots,0,0,\underline{0},\underline{1},\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ;\\ \qquad\qquad ①\quad ②\end{array}\right\}$$

$$\mathbb{Z}_n(2g+2\,;\ell,m)_1^{*}=\left\{\begin{array}{l}(1,0,0,0,\cdots,0,0,\underline{0},\underline{\gamma},\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ;\\ \qquad ①'\quad ②\quad ③\end{array}\right\}$$

$$\mathbb{Z}_n(2g+2\,;\ell,m)_2^{\circ}=\left\{\begin{array}{l}(2,0,0,0,\cdots,0,0,\underline{1},\underline{\gamma},\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ;\\ \qquad ①\quad ④\\ 2+2\gamma+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0 \pmod n\end{array}\right\}$$

$$\mathbb{Z}_n(2g+2\,;\ell,m)_2^{*}=\left\{\begin{array}{l}(2,0,0,0,\cdots,0,0,\underline{1},\underline{\gamma},\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ;\\ \qquad ①'\quad ③\quad ④\\ 2+2\gamma+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0 \pmod n\end{array}\right\}$$

<u>定理4</u>　X が compact non-orientable surface of genus 2 (Klein bottle)

(I) n : odd の時　$[H_1(X-S); \mathbb{Z}_n]^*$ の $\mathcal{A}$ − 同値類の完全代表系は

$$\left\{\begin{array}{l} (\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) ; \\ \quad ① \\ 0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 < n, \quad \gamma_1 + \gamma_2 \leq n, \quad 0 \leq \gamma_1 \leq \left[\frac{\alpha}{2}\right] \text{ — } ⑤ \\ 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_\ell + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n} \text{ — } ⑥ \\ g.c.d.\{\gamma_1, \gamma_2, \delta\} = 1 \text{ ———— } ⑦ \end{array}\right\}$$

(II) n : even の時　$[H_1(X-S); \mathbb{Z}_n]^*$ の $\mathcal{A}$ − 同値類の完全代表系は

次の集合の disjoint union

$$Z_n(2; \ell, m)^\circ = \left\{\begin{array}{l} (\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) ; \\ \quad ① \quad ⑤ \quad ⑥ \quad ⑦ \end{array}\right\}$$

$$Z_n(2; \ell, m)^* = \left\{\begin{array}{l} (\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) ; \\ \delta_\ell = \frac{n}{2} \text{ or } \theta_m = \frac{n}{2}, \quad 0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 < \frac{n}{2}, \quad \gamma_1 + \gamma_2 \leq \frac{n}{2}, \quad 0 \leq \gamma_1 \leq \left[\frac{\alpha}{2}\right] \\ \quad ①' \quad ⑥ \quad ⑦ \end{array}\right\}$$

但し　$\delta = g.c.d.\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m, n\}$

$\alpha = g.c.d.\{\delta, \gamma_1 + \gamma_2\}$

$[x]$ は Gauss 記号

《Notation》

$P_n = \{(f, M)$; M ; compact surface, f ; M 上の period n の periodic map, $S^1(f) = \phi\}$.

$P_n^+ = \{(f, M) \in P_n$; M ; orientable, f ; orientation preserving$\}$

$P_n^- = \{ (f, M) ;\ \ M ; \text{orientable} \quad f ; \text{orientation reversing} \}$

$P_n^0 = \{ (f, M) ;\ \ M ; \text{non-orientable} \}$

Prop. 6　各々に対応する $P_n(X,S)$ の元 (f,M) は右の集合に属する。

(定理1) に対応する $P_n(X,S)$ の元 (f,M) $\longrightarrow$ P_n^+

(定理2) (I) n ; odd $\longrightarrow$ P_n^0

(II) n ; even (i) $g \geqq 1$　$Z_n(2g+1; l, m)_1^0,\ Z_n(2g+1; l, m)_1^*$ $\longrightarrow$ P_n^0

$Z_n(2g+1; l, m)_2^0,\ Z_n(2g+1; l, m)_2^*$ $\longrightarrow$ P_n^-

(ii) $g = 0$　δ ; odd $\longrightarrow$ P_n^0

δ ; even $\longrightarrow$ P_n^-

(定理3) (I) n ; odd $\longrightarrow$ P_n^0

(II) n ; even　$Z_n(2g+2; l, m)_1^0,\ Z_n(2g+2; l, m)_1^*$ $\longrightarrow$ P_n^0

$Z_n(\qquad)_2^0\quad Z_n(\qquad)_2^*$ $\longrightarrow$ P_n^-

(定理4) (I) n ; odd $\longrightarrow$ P_n^0

(II) n ; even　δ ; odd or δ ; even かつ $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$; odd $\longrightarrow$ P_n^0

δ ; even かつ γ ; even $\longrightarrow$ P_n^-

但し $\delta = g.c.d. \{ \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m, n \}$.　([9]参照)

§2　$g^1(f) = \phi$ の時の periodic map の分類

この節では§1の結果を使って P_n の分類を行なう。まず $P_n^\varepsilon(\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{\mathfrak{l}}, \tilde{\mathfrak{m}})$ を次の条件をみたす P_n^ε の元 (f, M) の集合とする。(但し $\varepsilon = +, -$ or 0 , $\tilde{\mathfrak{l}} = (\tilde{l}_a)_{a|n}$　$\tilde{\mathfrak{m}} = (\tilde{m}_a)_{\substack{a|n \\ a \neq n}}$: ベクトル)

(イ) M は genus $\tilde{g}$ で boundary components は $D_1, D_2, \dots, D_{\tilde{\ell}}$ からなる．

(ロ) $\mathcal{S}(f)$ は $\mathring{M}$ の $\tilde{m}$ 個の点 $S_1, S_2, \dots, S_{\tilde{m}}$ からなる．

(ハ) $\tilde{\ell}_a$ は $\{D_j \,;\, f^a(D_j)=D_j$ かつ $f^b(D_j)\neq D_j \ (1\le b<a)\}$ の元の個数

$\tilde{m}_a$ は $\mathcal{S}_a^\circ(f)$ に属する点の個数．

さて $(f,M)\in \mathcal{P}_n^\varepsilon(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{\mathfrak{t}},\tilde{\mathfrak{m}})$ をとるとき，明らかに

(1) $\tilde{\ell}=\sum_{a|n}\tilde{\ell}_a$, $\tilde{m}=\sum_{\substack{a|n\\ a\neq n}}\tilde{m}_a$

(2) $\tilde{\ell}_a, \tilde{m}_a$ は a の倍数 （そこで $\ell_a=\dfrac{\tilde{\ell}_a}{a}$, $m_a=\dfrac{\tilde{m}_a}{a}$ とおく）

$X=M/f$ とすれば genus は $\varepsilon=+$ のとき $g=\frac{1}{2n}\left\{2\tilde{g}-2+\sum_{a|n}\left(1-\frac{n}{a}\right)(\tilde{\ell}_a+\tilde{m}_a)\right\}+1$

$\varepsilon=-$ のとき $g=\frac{1}{n}\left\{2\tilde{g}-2+\sum_{a|n}\left(1-\frac{n}{a}\right)(\tilde{\ell}_a+\tilde{m}_a)\right\}+2$

$\varepsilon=0$ のとき $g=\frac{1}{n}\left\{\tilde{g}-2+\sum_{a|n}\left(1-\frac{n}{a}\right)(\tilde{\ell}_a+\tilde{m}_a)\right\}+2$

∂X の components の数は $\ell=\sum_{a|n}\ell_a$.

$p(\mathcal{S}(f))=S$ の点の数は $m=\sum_{\substack{a|n\\ a\neq n}}m_a$.

$\mathcal{P}^\varepsilon(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{\mathfrak{t}},\tilde{\mathfrak{m}})\neq\phi$ であるためには $(f,M)\in\mathcal{P}_n(X,S)$ $(\exists X, S)$ より

Prop. 7 $\mathcal{P}^\varepsilon(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{\mathfrak{t}},\tilde{\mathfrak{m}})\neq\phi$ ならば (1), (2) と

(3) g が負でない整数 $(\varepsilon=+)$, g が正の整数 $(\varepsilon=-$ or $0)$ が成立

先ず $\varepsilon=+$ の時を扱おう．この時定理1の完全代表系に条件⊗ $\ell_a=\{\delta_j \,;\, \text{g.c.d.}\{\delta_j, n\}=a\}$ の元の個数， $m_a=\{\theta_k \,;\, \text{g.c.d.}\{\theta_k, n\}=a\}$ の元の個数 をつけ加えたものの数を求めればよい．したがって （[8] 参照）

定理 5 Prop. 7 の条件のもと $\mathcal{P}_n^+(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{\mathfrak{t}},\tilde{\mathfrak{m}})$ の元の個数は

(i) $\frac{1}{2}C(n;\mathfrak{t},\mathfrak{m})+\frac{1}{2}Q(n;\mathfrak{t},\mathfrak{m})=C^*(n;\mathfrak{t},\mathfrak{m})$ if $g>0$

(ii) $\sum_{g|n}\mu(g)\, C^*\!\left(\frac{n}{g};\, \mathbb{l}^{(g)}, \mathbb{m}^{(g)}\right)$ if $g=0$. (但し $\mu(g)$ は Möbius 関数, $\mathbb{l}^{(g)}=(l_{a'}^{(g)})_{a'|n'}$, $\mathbb{m}^{(g)}=(m_{a'}^{(g)})_{\substack{a'|n'\\ a'\neq n'}}$; ベクトルで ($g\nmid a$ のとき $l_a=0$, $m_a=0$) $g|a$ のとき $l_{a'}^{(g)}=l_a$, $m_{a'}^{(g)}=m_a$ $a'=\frac{a}{g}$, $n'=\frac{n}{g}$ である.) ($C(n;\mathbb{l},\mathbb{m})$ $Q(n;\mathbb{l},\mathbb{m})$ は下記)

$$D(n:\mathbb{l},\mathbb{m})=\left\{\begin{array}{l}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_l,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\ ;\\ \text{定理1の①}\quad \text{②}\ ,\ \text{条件⊗}\end{array}\right\}$$

の元の個数が $C(n:\mathbb{l},\mathbb{m})$ であるが, これは n の素因数分解を $n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_s^{e_s}$, n の約数 a を $a=p_1^{f_1}p_2^{f_2}\cdots p_s^{f_s}$ ($0\le f_1<e_1$, $0\le f_2<e_2,\cdots,0\le f_v<e_v$, $f_{v+1}=e_{v+1},\cdots,f_s=e_s$) とするとき,

$$g_a(x,y_a,z_a)=g_a(x,y,z)=\prod_{j=1}^{\frac{n}{a}-1}(1+yx^{ja}+y^2x^{2ja}+\cdots)(1+zx^{ja}+z^2x^{2ja}+\cdots)$$

$$f_a(x,y_a,z_a)=f_a(x,y,z)=g_a(x,y,z)\prod_{i=1}^{v}g_{p_ia}^{-1}(x,y,z)\prod_{1\le i<j\le v}g_{p_ip_ja}(x,y,z)$$
$$\cdots\prod_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_t\le v}g_{p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_t}a}^{(-1)^t}(x,y,z)\cdots\cdots g_{p_1p_2\cdots p_va}^{(-1)^v}(x,y,z)$$

とおき $\mathbb{Y}=(y_a)_{\substack{a|n\\ a\neq n}}$ $\mathbb{Z}=(z_a)_{\substack{a|n\\ a\neq n}}$ なるベクトルに対して $F(x,\mathbb{Y},\mathbb{Z})=\prod_{\substack{a|n\\ a\neq n}}f_a(x,y_a,z_a)$ とおけば, これが母関数である. すなわちこの関数の $x^{in}\cdot\prod_{\substack{a|n\\ a\neq n}}y_a^{l_a}z_a^{m_a}$ の係数 $K(i)$ の和が $C(n;\mathbb{l},\mathbb{m})$ だから $\zeta_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, $\zeta_i=\zeta_1^i$ として $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F(\zeta_i,\mathbb{Y},\mathbb{Z})$ の $\prod_{\substack{a|n\\ a\neq n}}y_a^{l_a}z_a^{m_a}$ の係数が $C(n;\mathbb{l},\mathbb{m})$ である. また

$$Q(n;\mathbb{l},\mathbb{m})=\begin{cases}\displaystyle\prod_{\substack{a|n\\ 0<a<\frac{n}{2}}}\binom{\frac{\varphi(\frac{n}{a})}{2}+\frac{l_a}{2}-1}{\frac{l_a}{2}}\binom{\frac{\varphi(\frac{n}{a})}{2}+\frac{m_a}{2}-1}{\frac{m_a}{2}} & \text{if } l_a, m_a:\text{even}\ (0<{}^\forall a<\frac{n}{2})\\[2ex] 0 & \text{その他}\end{cases}$$

である.

この定理によって $\mathcal{P}_n^+(\tilde{g},\tilde{l},\tilde{m},\tilde{\mathfrak{l}},\tilde{\mathfrak{m}})$ の個数が 0 の時 $=\phi$ 正の時 $\neq\phi$ である．簡単な時,例えば n が素数のときに述べておくと．

<u>系1</u>　n : odd prime の時 $P_n^+(\tilde{g},\tilde{l},\tilde{m},\tilde{\mathfrak{l}},\tilde{\mathfrak{m}})\neq\phi$ である必要十分条件は ・$\tilde{l}-\tilde{l}_1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n)$　・$\tilde{l}_1+\tilde{m}\neq 1$

・$\tilde{g}+n\times\min\{\tilde{l}_1+\tilde{m},1\}+\frac{1-n}{2}(\tilde{l}_1+\tilde{m})-1$ が $\geqq 0$ かつ $\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n)$

であって，その時 $\mathcal{P}_n^+(\tilde{g},\tilde{l},\tilde{m},\tilde{\mathfrak{l}},\tilde{\mathfrak{m}})$ の(元の)個数は

$$\frac{1}{2}C(n\,;l_1\ m)+\frac{1}{2}Q(n\,;l_1,m)$$

である。但し

$$C(n;l_1,m)=\begin{cases}\frac{1}{n}\left\{\binom{l_1+n-2}{n-2}\binom{m+n-2}{n-2}+n-1\right\} & l_1\equiv 0,\ m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n)\ \text{or}\ l_1\equiv 1,\ m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ n)\\ \frac{1}{n}\left\{\binom{l_1+n-2}{n-2}\binom{m+n-2}{n-2}-n+1\right\} & l_1\equiv 0,\ m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ n)\ \text{or}\ l_1\equiv 1,\ m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n)\\ \frac{1}{n}\binom{l_1+n-2}{n-2}\binom{m+n-2}{n-2} & \text{その他}\end{cases}$$

$$Q(n;l_1,m)=\begin{cases}\binom{\left[\frac{n-1}{2}\right]+\frac{l_1}{2}-1}{\frac{l_1}{2}}\binom{\left[\frac{n-1}{2}\right]+\frac{m}{2}-1}{\frac{m}{2}} & l_1,m:\text{even}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

<u>系2</u>　$n=2$ の時 $P_2^+(\tilde{g},\tilde{l},\tilde{m},\tilde{\mathfrak{l}},\tilde{\mathfrak{m}})\neq\phi$ である必要十分条件は ・$\tilde{l}-\tilde{l}_1$; even　・$\tilde{l}_1+\tilde{m}$; even　・$\tilde{g}+2\times\min\{\tilde{l}_1+\tilde{m},1\}-\frac{\tilde{l}_1+\tilde{m}}{2}\geqq 1$ で odd　であって，その時 $\mathcal{P}_2^+(\tilde{g},\tilde{l},\tilde{m},\tilde{\mathfrak{l}},\tilde{\mathfrak{m}})$ の(元の)個数は 1 つである．

次に $\varepsilon=-$ の時であるが，このときは（[9]参照）

<u>定理6</u>　Prop. 7 の条件のもと $P_n^-(\tilde{g},\tilde{l},\tilde{m},\tilde{\mathfrak{l}},\tilde{\mathfrak{m}})\neq\phi$ である必要十分条件は　n : even であってかつ

(A) $\mathfrak{g}$; odd $\geqq 3$ のとき

(4) (i) $\frac{n}{2}$; odd のとき $\forall a | n$ (a ; odd) に対して $\mathfrak{l}_a = 0$ かつ $\mathfrak{m}_a = 0$.

(ii) $\frac{n}{2}$; even のとき $\forall a | n$ (a ; odd) に対して $\mathfrak{l}_a = 0$ かつ $\mathfrak{m}_a = 0$.

かつ $\sum_{\substack{a|n \\ a:\text{even} \\ a/2;\text{odd}}} (\mathfrak{l}_a + \mathfrak{m}_a)$ が odd.

(B) $\mathfrak{g} = 1$ のとき (4)

かつ (6)$'$ $\frac{1}{2} \times$ g.c.d.$\{ a \ ; \ \mathfrak{l}_a \neq 0$ または $\mathfrak{m}_a \neq 0 \} = 1$

(C) $\mathfrak{g}$; even のとき (i) $\frac{n}{2}$; odd のとき $\forall a | n$ (a ; odd) に対して $\mathfrak{l}_a = 0$ かつ $\mathfrak{m}_a = 0$.

(ii) $\frac{n}{2}$; even のとき $\forall a | n$ (a ; odd) に対して $\mathfrak{l}_a = 0$ かつ $\mathfrak{m}_a = 0$.

かつ $\sum_{\substack{a|n \\ a:\text{even} \\ a/2;\text{odd}}} (\mathfrak{l}_a + \mathfrak{m}_a)$ が even

そしてこの時 $\mathcal{O}_n^-(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{l}}, \widetilde{\mathfrak{m}}, \widetilde{\mathfrak{t}}, \widetilde{\mathfrak{m}})$ の個数は

☆ $\mathfrak{g} \neq 2$ の時

$$\begin{cases} C^-(n; \mathfrak{t}, \mathfrak{m}) & \text{if (i) } \frac{n}{2}\text{ ; odd または (ii) } \frac{n}{2}\text{ ; even かつ } \mathfrak{l}_{n/2} + \mathfrak{m}_{n/2} \neq 0 \\ 2 \times C^-(n; \mathfrak{t}, \mathfrak{m}) & \text{if (ii) } \frac{n}{2}\text{ ; even かつ } \mathfrak{l}_{n/2} = \mathfrak{m}_{n/2} = 0 \end{cases}$$

☆ $\mathfrak{g} = 2$ の時

$\left\{\frac{\varphi(d)}{2}\right\} \times C^-(n; \mathfrak{t}, \mathfrak{m})$ if (i) $\frac{n}{2}$; odd または (ii) $\frac{n}{2}$; even かつ $d \not\equiv 0 \pmod 4$ かつ $\mathfrak{l}_{n/2} + \mathfrak{m}_{n/2} \neq 0$

または (iii) $\frac{n}{2}$; even かつ $d \equiv 0 \pmod 4$ かつ $\frac{n}{d}$; even かつ $\sum_{\substack{a|n \\ a/d;\text{odd}}} (\mathfrak{l}_a + \mathfrak{m}_a)$; even

かつ $\mathfrak{l}_{n/2} + \mathfrak{m}_{n/2} \neq 0$

$2 \times \left\{\frac{\varphi(d)}{2}\right\} \times C^-(n; \mathfrak{t}, \mathfrak{m})$ if (ii) $\frac{n}{2}$; even かつ $d \not\equiv 0 \pmod 4$ かつ $\mathfrak{l}_{n/2} = \mathfrak{m}_{n/2} = 0$

または (iii) $\frac{n}{2}$; even かつ $d \equiv 0 \pmod 4$ かつ $\frac{n}{d}$; even かつ $\sum_{\substack{a|n \\ a/d:\text{odd}}} (\mathfrak{l}_a + \mathfrak{m}_a)$; even

かつ $\mathfrak{l}_{n/2} = \mathfrak{m}_{n/2} = 0$

$\left\{\frac{\varphi(d) + \varphi(\frac{d}{2})}{2}\right\} \times C^-(n; \mathfrak{t}, \mathfrak{m})$ if $\frac{n}{2}$; even かつ $\frac{n}{d}$; odd

$\left\{\frac{\varphi(\frac{d}{2})}{2}\right\} \times C^-(n; \mathfrak{t}, \mathfrak{m})$ if $\frac{n}{2}$; even かつ $d \equiv 0 \pmod 4$ かつ $\frac{n}{d}$; even かつ $\sum_{\substack{a|n \\ a/d;\text{odd}}} (\mathfrak{l}_a + \mathfrak{m}_a)$: odd で

$\mathfrak{l}_{n/2} + \mathfrak{m}_{n/2} \neq$

$2 \times \left\{\frac{\varphi(\frac{d}{2})}{2}\right\} \times C^-(n; \mathfrak{t}, \mathfrak{m})$ if 〃 で $\mathfrak{l}_{n/2} = \mathfrak{m}_{n/2} =$

但し $d = g.c.d.\{a\,;\ l_a \neq 0 \text{ or } m_a \neq 0\}$ 、$\{x\}$ は x 以上の整数の最小数、 $C^-(n\,;\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}) = \prod_{\substack{a|n\\ a\neq n\\ a\neq n/2}} \binom{\frac{\varphi(\frac{n}{a})}{2}+l_a-1}{l_a}\binom{\frac{\varphi(\frac{n}{a})}{2}+m_a-1}{m_a}$.

次に $\varepsilon = 0$ のときは　（[9] 参照）

<u>定理 7</u>　Prop. 7 の条件のもと $\mathcal{P}_n^{\circ}(g,\hat{l},\hat{m},\hat{\boldsymbol{l}},\hat{\boldsymbol{m}}) \neq \phi$ である必要十分条件は.

(A)　$g \geqq 3$ のとき (5) (i) n : odd であるか.

(ii) n : even のとき $\sum_{\substack{a|n\\ a;\text{odd}}}(l_a+m_a)$ が even

(B)　$g = 1$ のとき (5)

かつ (6) $g.c.d.\{a\,;\ l_a \neq 0$ または $m_a \neq 0\} = 1$

(C)　$g = 2$ のとき (i) n : odd である

または (ii) n : even かつ d ; odd のとき $\sum_{\substack{a|n\\ a;\text{odd}}}(l_a+m_a)$ が even

または (iii) n ; even かつ d ; even のとき $\frac{n}{2}$; odd

または (iv) n ; even かつ d ; even かつ $\frac{n}{2}$; even のとき $\frac{d}{2}$; odd かつ $\sum_{\substack{a|n\\ a:\text{even}\\ a/2;\text{odd}}}(l_a+m_a)$ が odd

そしてこの時 $\mathcal{P}_n^{\circ}(g,\hat{l},\hat{m},\hat{\boldsymbol{l}},\hat{\boldsymbol{m}})$ の個数は

☆　$g \neq 2$ の時

$$\begin{cases} C^-(n\,;\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}) & \text{if (i) } n : \text{odd または (ii) } n : \text{even かつ } l_{n/2}+m_{n/2} \neq 0 \\ 2 \times C^-(n\,;\boldsymbol{l},\boldsymbol{m}) & \text{if (ii) } n : \text{even かつ } l_{n/2} = m_{n/2} = 0. \end{cases}$$

☆　$g = 2$ の時

$\left\{\frac{\varphi(d)}{2}\right\} \times C^-(n\,;\boldsymbol{l},\boldsymbol{m})$　if (i) n ; odd または (ii) n : even かつ d ; odd かつ $l_{n/2}+m_{n/2} \neq 0$

$$
\begin{cases}
2 \times \left\{\dfrac{\varphi(d)}{2}\right\} \times C^{-}(n;\mathfrak{l},\mathfrak{m}) & \text{if } n:\text{even かつ } d;\text{odd かつ } l_{n/2}=m_{n/2}=0 \\
\left\{\dfrac{\varphi(\frac{d}{2})}{2}\right\} \times C^{-}(n;\mathfrak{l},\mathfrak{m}) & \text{if (i) } n;\text{even かつ } d;\text{even かつ } \frac{n}{2};\text{odd} \\
 & \quad\text{(ii) } n;\text{even かつ } d;\text{even かつ } \frac{n}{2};\text{even かつ } l_{n/2}+m_{n/2}\neq 0. \\
2 \times \left\{\dfrac{\varphi(\frac{d}{2})}{2}\right\} \times C^{-}(n;\mathfrak{l},\mathfrak{m}) & \text{if } n:\text{even かつ } d:\text{even かつ } \frac{n}{2};\text{even かつ } l_{n/2}=m_{n/2}=0.
\end{cases}
$$

【 $(f,M) \sim (f',M')$ の判定】 $(f,M),(f',M') \in \mathbb{P}_n^{\varepsilon}$ のとき同値かどうかを判定するには，まず同じ $\mathbb{P}_n^{\varepsilon}(\tilde{g},\tilde{\mathfrak{l}},\tilde{\mathfrak{m}},\tilde{\mathfrak{L}},\tilde{\mathfrak{M}})$ に属することで，その時は同じ $\mathbb{P}_n(X,S)$ に属するので，それぞれに対して定理１～４の完全代表系の元として等しいかどうかをみればよい。（［８］［９］参照）

§3. $\mathcal{S}^1(f) \neq \phi$ の時

さて $\mathcal{S}^1(f) \neq \phi$ のときは Prop. 1 を使うと

<u>Prop. 8</u> f を compact surface M 上の period n の periodic map で $\mathcal{S}^1(f) \neq \phi$ ならば

(1) n は even

(2) $x \in \mathcal{S}^1(f) \longrightarrow x \in \mathcal{S}_{n/2}(f)$

(3) 特に M が orientable のとき f は orientation reversing であって，$\frac{n}{2}$ は odd である.

≪Notation≫

$\mathbb{P}_n = \{ (f,M)$; M ; compact surface , f ; M 上の period n の periodic map, $\mathcal{S}^1(f) \neq \phi \}$

$\mathbb{P}_n^2 = \{ (f, M) \in \mathbb{P}_n \ ; \ M - S^1(f)$ は不連結 $\}$

$\hat{\mathbb{P}}_n = \{ (f, M) \in \mathbb{P}_n \ ; \ M - S^1(f)$ は連結 $\}$

$P_n^2 = \{ (g, M_0, S_*) \ ; \ (g, M_0) \in P_{n/2} \ , \ S_* ;$ ∂M_0 上の simple loop と simple arc からなる set
$g(S_*) = S_* \}$

$\hat{P}_n = \{ (\hat{f}, \hat{M}, S_*) \ ; \ (\hat{f}, \hat{M}) \in P_n \ , \ S_* ; \partial \hat{M}$ 上の simple loop と simple arc からなる set , $\hat{f}(S_*) = S_* \}$

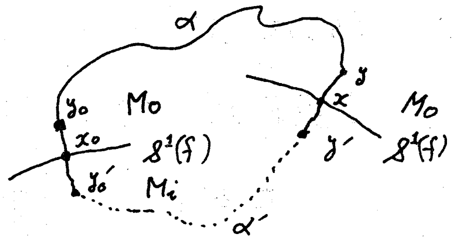
定義4 (1) $\hat{P}_n$ の2つの元 $(\hat{f}, \hat{M}, S_*)$, $(\hat{f}', \hat{M}', S_*')$ に対して $\hat{f} h = h \hat{f}'$ をみたす同相写像 $h : (\hat{M}, S_*) \longrightarrow (\hat{M}', S_*')$ が存在するとき $(\hat{f}, \hat{M}, S_*) \underset{*}{\sim} (\hat{f}', \hat{M}', S_*')$ とする.

(2) P_n^2 の2つの元 (g, M_0, S_*), (g', M_0', S_*') に対して $g h = h g'$ をみたす同相写像 $h : (M_0, S_*) \longrightarrow (M_0', S_*')$ が存在するとき $(g, M_0, S_*) \underset{*}{\sim} (g', M_0', S_*')$ とする.

$M - S^1(f)$ が連結でない $(\mathbb{P}_n^2)$ のとき

Lemma. 1 $(f, M) \in \mathbb{P}_n^2$ のとき, $M - S^1(f)$ の連結成分は2つで, それらの閉包を M_0, M_1 とすると $f(M_0) = M_1$ で $g = f^2|_{M_0}$ とおけば g は M_0 上の period $\frac{n}{2}$ の periodic map で $S^1(g) = \phi$ かつ $S_k^0(g) = S_{2k}^0(f) \cap \mathring{M}_0$ をみたす. そしてこの時 $\frac{n}{2}$ は odd である.

(略証) M_0 を $M - S^1(f)$ の1つの連結成分の閉包とする. $M - S^1(f)$ が連結でないので $\exists M_i$; $M - S^1(f)$ の M_0 と異なる連結成分の閉包で $\phi \neq M_0 \cap M_i \subset S^1(f)$ とする. そこで $x_0 \in M_0 \cap M_i$ をとり y_0 を x_0 の十分近くの M_0 の点とする. このとき $M_0 \cap S^1(f) = M_i \cap S^1(f)$ である. なぜ



ならば $\forall x \in M_0 \cap S^1(f)$，$y$ を x の十分近くの M_0 の点とすれば，M_0 は連結より y と y_0 を結ぶ $\mathring{M}_0$ の arc α が存在する．$\alpha' = f^{\frac{n}{2}}(\alpha)$ とすれば α' は $f^{\frac{n}{2}}(y_0) = y_0'$ と $f^{\frac{n}{2}}(y) = y'$ を結ぶ arc で $\alpha' \cap S^1(f) = \phi$，ところが $y_0' \in M_i$ だから $y' \in M_i$．故に $x \in M_0 \cap M_i$．したがって $x \in M_i \cap S^1(f)$．逆も同様に示されるので $M_0 \cap S^1(f) = M_i \cap S^1(f)$．このことより $M - S^1(f)$ の連結成分は M_0 と M_i の2つしかない．あとは実際に試してみれば分かる．($M_i = M_1$ とおく)．

<u>Lemma. 2</u>　また逆に2次元多様体 M_0 と ∂M_0 上の simple loop と simple arc からなる集合 S_* が与えられ，g を period $\frac{n}{2}(\text{odd}) = m$ の M_0 上の periodic map で $S^1(g) = \phi$ かつ $g(S_*) = S_*$ なるものとするとき，M_0 の copy M_1 をとり $i : M_0 \longrightarrow M_1$ を位相同型写像，$j = i|_{S_*}$ とし $M = M_0 \underset{j}{\cup} M_1$ とおく．そして $f : M \longrightarrow M$ を $x \in M_0$ のとき $f(x) = i g^{\frac{m+1}{2}}(x)$，$x \in M_1$ のとき $f(x) = g^{\frac{m+1}{2}} i^{-1}(x)$ とすれば f は M 上の period n の periodic map になり，$S^1(f) = S_*$，$M - S^1(f)$ は不連結をみたす。そこで Lemma 1 により M_0'，$g_0' : M_0' \longrightarrow M_0'$ を作れば $(g_0', M_0') = (g_0, M_0)$ となる．

すなわち　$\boxed{\mathbb{P}_n^2} \ni (f, M) \underset{1対1の対応}{\longleftrightarrow} (g, M_0, S_*) \in \boxed{\mathbb{P}_n^2}$

また同値関係については．

<u>Lemma 3</u>　$(f,M),(f',M')\in\mathbb{P}_n^2$ に対して $(g,M_0,\mathcal{S}_*)$, $(g',M_0',\mathcal{S}_*')\in\mathcal{P}_n^2$ を作れば $(f,M)\sim(f',M')$ である必要十分条件は $(g,M_0,\mathcal{S}_*)\underset{*}{\sim}(g',M_0',\mathcal{S}_*')$ である。

したがって $\boxed{\mathbb{P}_n^2/\sim}\xleftrightarrow[\text{1対1の対応}]{}\boxed{\mathcal{P}_n^2/\underset{*}{\sim}}$

そして $p: M\longrightarrow M/f=X$ は $p(\mathcal{S}(f))=S$ を branched set とする n-fold cyclic branched covering（但し covering $p|_{M-\mathcal{S}(f)}: M-\mathcal{S}(f)\longrightarrow X-S$ において $M-\mathcal{S}(f)$ は連結でない），$p_0: M_0\longrightarrow M_0/g=X$ は $p_0(\mathcal{S}(g))=S^0$ を branched set とする $\frac{n}{2}$-fold cyclic branched covering になっている．そこで2次元多様体 X と ∂X 上の simple loop と simple arc からなる集合 S^1 と $\mathring{X}$ 内の孤立点の集合 S^0 をとり $S=S^1\cup S^0$ とおき $\mathcal{P}_n^2(X,S)=\{(g,M_0,\mathcal{S}_*)\in\mathcal{P}_n^2 ;\ M_0/g=X,\ p_0: M_0\longrightarrow X$ が $\frac{n}{2}$-fold cyclic branched covering with branched set $p(\mathcal{S}(g))=S^0$, $p_0(\mathcal{S}_*)=S^1\}$ とおき $\mathcal{O}_n^2(X,S)=\mathcal{P}_n^2(X,S)/\underset{*}{\sim}$ として §1 と同様にして $[H_1(X-S^0);\mathbb{Z}_{n/2}]^*$ の A-同値類を求めればよい．(但し ∂X の component を $d_j\cap S^1=\phi$ なるもの，$d_u^0\subset S^1$ のもの，$d_w^{(v)}\cap S^1$ が v 本の arc からなるもの，と分けておかねばならない）すると定理1〜4 の(I)（$n\longrightarrow\frac{n}{2}$ で）$\frac{n}{2}$: odd と同様な定理がえられる。すなわち $\omega\in[H_1(X-S^0);\mathbb{Z}_{n/2}]^*$ が与えられた時 $\omega(a_i)=\alpha_i$, $\omega(b_i)=\beta_i$ $(\omega(c)=\gamma)$ $\langle\omega(c_1)=\gamma_1,\ \omega(c_2)=\gamma_2\rangle$

$\omega(d_j)=\delta_j$ ， $\omega(d_u^0)=\eta_u$ ， $\omega(d_w^{(v)})=\lambda_w^{(v)}$ ， $\omega(S_k)=\theta_k$ と

なる時 ω を $\mathbb{Z}_{n/2}$ の元の組 $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_g,\beta_g,(\gamma),\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle,$ $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_g,\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots$ $\cdots\ \lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ で表わすとき，定理1～4の（I）の形に $[H_1(X-S^0);\mathbb{Z}_{n/2}]^*$ の $\mathcal{A}$－同値類の完全代表系は与えられる。すなわち $\mathbb{P}_n^2$ の同値類の完全代表系が求められる。

$\mathbb{P}_n^2$ の分類をするには，まず

$\mathbb{P}_n^{2+}=\{(f,M)\in\mathbb{P}_n^2\ ;\ M\text{; orientable}\ \ (f\text{; orientation reversing})\}$

$P_n^{2+}=\{(g,M_0,\mathcal{S}_*)\in P_n^2\ ;\ M_0\text{; orientable}\ \ (g\text{; orientation preserving})\}$

$\mathbb{P}_n^{2\,0}=\{(f,M)\in\mathbb{P}_n^2\ ;\ M\text{; non-orientable}\}$

$P_n^{2\,0}=\{(g,M_0,\mathcal{S}_*)\in P_n^2\ ;\ M_0\text{; non-orientable}\}$

として $\underline{\mathbb{P}_n^{2\varepsilon}(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{r},\tilde{m},\tilde{q},\tilde{t}\ ;\ \tilde{\boldsymbol{\ell}}\ \tilde{\boldsymbol{m}}\ \tilde{\boldsymbol{q}}\ \tilde{\boldsymbol{t}})}$ を次の条件をみたす $\mathbb{P}_n^{2\varepsilon}$ の元 (f,M) の集合とする．（但し $\varepsilon=+$ or 0 ， $\boldsymbol{\ell}=(\tilde{\ell}_a)_{a|n}$， $\boldsymbol{m}=(\tilde{m}_a)_{\substack{a|n\\ a\neq n}}$ $\boldsymbol{q}=(\tilde{q}_a)_{a|n}$, $\boldsymbol{t}=(\tilde{t}_{a(v)})_{\substack{a|n\\ v\in N}}$ はベクトル）.

（イ） M は genus $\tilde{g}$ で，$D_1,D_2,\cdots,D_{\tilde{\ell}}$ を $D_j\cap\mathcal{S}^1(f)=\phi$ なる M の boundary component ， $\tilde{r}$ を $D_j^*\cap\mathcal{S}^1(f)\neq\phi$ なる M の boundary component の数.

（ロ） $\mathcal{S}^0(f)$ は $\mathring{M}$ の $\tilde{m}$ 個の点 $S_1,S_2,\cdots,S_{\tilde{m}}$ からなる.

（ハ） $\mathcal{S}^1(f)$ の loop の数 $\tilde{q}$ ，（arc の数は $\tilde{r}$），type (iii) の集合 Φ_w の数 $\tilde{t}$.（$D_1^0,D_2^0,\cdots,D_{\tilde{q}}^0$ を $\mathcal{S}^1(f)$ の loop とおく）

(ニ) $\hat{\ell}_a$ は $\{D_j\ ;\ f^a(D_j)=D_j$ かつ $f^b(D_j)\neq D_j\ (1\leq {}^\forall b<a)\}$ の元の個数

$\hat{m}_a$ は $\mathcal{S}^0_a(f)$ に属する点の個数

$\hat{g}_a$ は $\{D^0_u\ ;\ f^a(D^0_u)=D^0_u$ かつ $f^b(D^0_u)\neq D^0_u\ (1\leq {}^\forall b<a)\}$ の元の個数

$\hat{t}_a(v)$ は $\{\Phi_w\ ;\ f^a(\Phi_w)=\Phi_w$ かつ $f^b(\Phi_w)\neq\Phi_w\ (1\leq {}^\forall b<a)$ かつ

Φ_w に属する arc の数 $\frac{n}{2a}v\}$ の元の個数

そして $\mathbb{P}^{2\varepsilon}_n(\hat{g},\hat{\ell},\hat{m},\hat{g},\hat{t}\ ;\ \hat{\mathfrak{l}},\hat{\mathfrak{m}},\hat{\mathfrak{g}},\hat{\mathfrak{t}})$ に対応させて，さらに §2 と同様にして $\ell_a, m_a, g_a, t_a(v)$ を求めて $X=M/f=M_0/g$，$p(\mathcal{S}^1(f))=S^1$，$p(\mathcal{S}^0(f))=S^0$，$S=S^1\cup S^0$ とおいて，X の genus g，∂X のうち $d_j\cap S^1=\phi$ なるものの数 ℓ，$d^0_u\subset S^1$ なるものの数 g，$d^{(v)}_w\cap S^1$ が v 本の arc からなるものの数 $t(v)$，S^0 の点の数 m として $[H_1(X-S^0)\ ;\ \mathbb{Z}_{n/2}]^*$ の $\mathcal{A}$-同値類の完全代表系に §2 の条件⊗と同様な条件をつけたものを求めれば §2 の定理5，7 と同様な定理がえられる。（詳細は省略）

	M	M_0	X	
$\mathbb{P}^{2+}_n$	orientable	orientable	orientable	n;even $\frac{n}{2}$;odd
$\mathbb{P}^{2\,0}_n$	non-orientable	non-orientable	non-orientable	n:even $\frac{n}{2}$;odd

$M-\mathcal{S}^1(f)$ が連結 $(\hat{\mathbb{P}}_n)$ のとき

Prop. 9　$(f,M)\in\hat{\mathbb{P}}_n$，$M$ が orientable のとき $X=M/f$ は non-orientable である．（$\frac{n}{2}$ は odd）

<u>Lemma 4</u>　$(f, M) \in \hat{\mathbb{P}}_n$ のとき $\hat{M}$ を $M - S^1(f)$（連結）の natural compactification (completion) とし，$S_* = \hat{M} - (M - S^1(f))$（すなわち $S^1(f)$ の $\hat{M}$ における 2 つの copy）とおく．$\hat{f} : \hat{M} \longrightarrow \hat{M}$ を $x \in \hat{M} - S_*$ のとき $\hat{f}(x) = f(x)$，$x \in S_*$ のとき $\lim x_i = x$ なる $\hat{M} - S_*$ の点列 $\{x_i\}$ をとり $\hat{f}(x) = \lim f(x_i)$ とすれば（$\{x_i\}$ のとり方によらない．）$\hat{f}$ は $\hat{M}$ 上の period n の periodic map となり，$S^1(\hat{f}) = \phi$ かつ $S_k^0(\hat{f}) = S_k^0(f)$ をみたす。

<u>Lemma 5</u>　逆に 2 次元多様体 $\hat{M}$ と $\partial\hat{M}$ 上の simple loop と simple arc からなる集合 S_* が与えられ，$\hat{f}$ を period n (even) の $\hat{M}$ 上の periodic map で $S^1(\hat{f}) = \phi$ かつ $\hat{f}(S_*) = S_*$ なるものとするとき，$M = \hat{M}/\sim$（ここに $\hat{x} \sim \hat{y} \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (i) $\hat{x}, \hat{y} \in S_*$ のとき $\hat{x} = \hat{y}$ または $\hat{y} = \hat{f}^{\frac{n}{2}}(\hat{x})$，(ii) その他の時は $\hat{x} = \hat{y}$）とし $g : \hat{M} \longrightarrow M$ を natural quotient map とする．このとき $f : M \longrightarrow M$ を $x \in M$ に対して $g(y) = x$ なる y をとり $f(x) = g\hat{f}(y)$ と定めると f は well-defined で M 上の period n の periodic map になり，$S^1(f) = g(S_*)$，$M - S^1(f)$ は連結をみたす．そこで Lemma 4 により $\hat{M}'$，$\hat{f}' : \hat{M}' \longrightarrow \hat{M}'$ を作れば $(\hat{f}, \hat{M}) = (\hat{f}', \hat{M}')$ となる．

すなわち　$\boxed{\hat{\mathbb{P}}_n} \ni (f, M) \underset{1対1の対応}{\longleftrightarrow} (\hat{f}, \hat{M}, S_*) \in \boxed{\hat{P}_n}$

また同値関係については

<u>Lemma 6</u> $(f, M), (f', M') \in \hat{\mathbb{P}}_n$ に対して $(\hat{f}, \hat{M}, \delta_*)$, $(\hat{f}', \hat{M}', \delta'_*) \in \hat{\mathrm{P}}_n$ を作れば $(f, M) \sim (f', M')$ である必要十分条件は $(\hat{f}, \hat{M}, \delta_*) \underset{*}{\sim} (\hat{f}', \hat{M}', \delta'_*)$ である.

したがって $\boxed{\hat{\mathbb{P}}_n/\sim} \xleftrightarrow[\text{1対1の対応}]{} \boxed{\hat{\mathrm{P}}_n/\underset{*}{\sim}}$

そして $p : M \longrightarrow M/f = X$ は $p(\delta(f)) = S$ を branched set とする n-fold cyclic branched covering, $\hat{p} : \hat{M} \longrightarrow \hat{M}/\hat{f} = X$ は $\hat{p}(\delta(\hat{f})) = S^0$ を branched set とする n-fold cyclic branched covering になっている. そこで2次元多様体 X と ∂X 上の simple loop と simple arc からなる集合 S^1 と $\mathring{X}$ 内の孤立点の集合 S^0 をとり $S = S^1 \cup S^0$ とおき,

$$\begin{tikzcd} \hat{M} \arrow[r, "\hat{p}"] \arrow[d, "\delta"] & X \\ M \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

$\hat{\mathrm{P}}_n(X, S) = \{(\hat{f}, \hat{M}, \delta_*) \in \hat{\mathrm{P}}_n \ ; \ \hat{M}/\hat{f} = X,\ \hat{p} : \hat{M} \longrightarrow X$ が n-fold cyclic branched covering with branched set $p(\delta(\hat{f})) = S^0$, $\hat{p}(\delta_*) = S^1\}$ とおき $\hat{\mathcal{P}}_n(X, S) = \hat{\mathrm{P}}_n(X, S)/\underset{*}{\sim}$ として §1と同様にして $[H_1(X - S^0) ; \mathbb{Z}_n]^*$ の $\mathcal{A}$-同値類を求めればよい.（不連結のときと同様に ∂X の component を $d_j \cap S^1 = \phi$ なるもの, $d_u \subset S^1$ のもの, $d_w^{(v)} \cap S^1$ が v 本の arc からなるものと分けておく.）すると定理1〜4の(II) n:even と同様な定理がえられる。すなわち $\omega \in$

$[H_1(X-S^0)\,;\,\mathbb{Z}_n]^*$ が与えられた時 $\omega(a_i)=\alpha_i$, $\omega(b_i)=\beta_i$, $(\omega(c)=\gamma)$ $\langle \omega(c_1)=\gamma_1,\ \omega(c_2)=\gamma_2 \rangle$, $\omega(d_j)=\delta_j$, $\omega(d_u^{\circ})=\eta_u$, $\omega(d_w^{(v)})=\lambda_w^{(v)}$, $\omega(s_k)=\theta_k$ となる時, ω を $\mathbb{Z}_n$ の元の組 $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\ldots,\alpha_g,\beta_g,\ (\gamma)\ \langle\gamma_1,\gamma_2\rangle,\ \delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_l,\ \eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_g,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\ldots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\ \lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\ldots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\ \ldots\ \lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\ldots,\lambda_{t(r)}^{(r)}\ \theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$ で表わすとき, 定理1〜4の(II)の形に $[H_1(X-S^0)\,;\,\mathbb{Z}_n]^*$ の A-同値類の完全代表系は与えられる. すなわち $\hat{\mathbb{P}}_n$ の同値類の完全代表系が求められる.

そして X から $\hat{M}$ を作り M を作ればよいが, それは次のようになる. ($\hat{\mathbb{P}}_n$, $\hat{P}_n$ において)

X ; orientable $\longrightarrow$ $\hat{M}$; orientable $\xrightarrow[\text{(Prop.9より)}]{}$ M ; non-orientable (i)

X ; non-orientable $\longrightarrow$ $\hat{M}$; orientable $\longrightarrow$ M ; orientable $(\frac{n}{2}$; odd) (ii)

X ; non-orientable $\longrightarrow$ $\hat{M}$; orientable $\longrightarrow$ M ; non-orientable $(\frac{n}{2}$; even) (iii)

X ; non-orientable $\longrightarrow$ $\hat{M}$; non-orientable $\longrightarrow$ M ; non-orientable (iv)

そこで $\hat{\mathbb{P}}_n$ の分類をするには, まず (n : even)

$\hat{\mathbb{P}}_n^{+-} = \{ (f,M) \in \hat{\mathbb{P}}_n\ ;\ $ (i) のとき $\}$

$\hat{\mathbb{P}}_n^{-+} = \{ (f,M) \in \hat{\mathbb{P}}_n\ ;\ $ (ii) のとき $\}$ $(\frac{n}{2}$: odd)

$\mathbb{P}_n^{--} = \{ (f,M) \in \hat{\mathbb{P}}_n\ ;\ $ (iii) のとき $\}$ $(\frac{n}{2}$: even)

$\mathbb{P}_n^{\circ\circ} = \{ (f,M) \in \hat{\mathbb{P}}_n\ ;\ $ (iv) のとき $\}$

$\hat{P}_n^{+-} = \{ (\hat{f},\hat{M},s_*) \in \hat{P}_n\ ;\ $ (i) のとき $\}$

$\hat{P}_n^{-+} = \{ (\hat{f},\hat{M},s_*) \in \hat{P}_n\ ;\ $ (ii) のとき $\}$ $(\frac{n}{2}$; odd)

$\hat{P}_n^{--} = \{ (\hat{f}, \hat{M}, S_*) \in \hat{P}_n$; (iii) のとき $\}$ ($\frac{n}{2}$: even)

$\hat{P}_n^{oo} = \{ (\hat{f}, \hat{M}, S_*) \in \hat{P}_n$; (iv) のとき $\}$

として $\hat{\mathbb{P}}_n^{\varepsilon\varepsilon'}(\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{r}, \tilde{m}, \tilde{g}^+, \tilde{g}^-, \tilde{t}^+, \tilde{t}^- ; \tilde{\boldsymbol{l}}, \tilde{\boldsymbol{m}}, \tilde{\boldsymbol{g}}^+, \tilde{\boldsymbol{g}}^-, \tilde{\boldsymbol{t}}^+, \tilde{\boldsymbol{t}}^-)$ を次の条件をみたす $\hat{\mathbb{P}}_n^{\varepsilon\varepsilon'}$ の元 (f, M) の集合とする. (但し $\varepsilon = +, -$ or 0, $\varepsilon' = +, -$ or 0, $\tilde{\boldsymbol{l}} = (\tilde{l}_a)_{a|n}$ $\tilde{\boldsymbol{m}} = (\tilde{m}_a)_{a|n, a\neq n}$, $\tilde{\boldsymbol{g}}^+ = (\tilde{g}_a^+)_{a|\frac{n}{2}}$ $\tilde{\boldsymbol{g}}^- = (\tilde{g}_a^-)_{a|\frac{n}{2}}$ $\tilde{\boldsymbol{t}}^+ = (\tilde{t}_a^+(v))_{a|\frac{n}{2}, v\in N}$ $\tilde{\boldsymbol{t}}^- = (\tilde{t}_a^-(v))_{a|\frac{n}{2}, v\in N}$ はベクトル, 但し $\hat{\mathbb{P}}_n^{-+}$ のとき $\tilde{g}^-$ $\tilde{\boldsymbol{g}}^-$ $\tilde{t}^-$ $\tilde{\boldsymbol{t}}^-$ はなし).

(イ) M は genus $\tilde{g}$ で $D_1, D_2, \cdots, D_{\tilde{l}}$ を $D_j \cap S^1(f) = \phi$ なる M の boundary component, $\tilde{r}$ を $D_j^* \cap S^1(f) \neq \phi$ なる M の boundary component の数.

(ロ) $S^0(f)$ は $\mathring{M}$ の $\tilde{m}$ 個の点からなる.

(ハ) $S^1(f)$ の loop のうち 2-sided なものを $D_1^{o+}, D_2^{o+}, \cdots, D_{\tilde{g}^+}^{o+}$, 1-sided なものを $D_1^{o-}, D_2^{o-}, \cdots, D_{\tilde{g}^-}^{o-}$ とし (arc の数は $\tilde{r}$), type $(iii)_2$ の集合 Φ_w^+ の数 $\tilde{t}^+$, type $(iii)_1$ の集合 Φ_w^- の数 $\tilde{t}^-$.

(ニ) $\tilde{l}_a$ は $\{D_j ; f^a(D_j) = D_j, f^b(D_j) \neq D_j \ (1 \leq {}^\forall b < a)\}$ の元の個数

$\tilde{m}_a$ は $S_a^0(f)$ に属する点の個数

$\tilde{g}_a^+ = \{D_u^{o+} ; f^a(D_u^{o+}) = D_u^{o+}, f^b(D_u^{o+}) \neq D_u^{o+} \ (1 \leq {}^\forall b < a)\}$ の元の個数

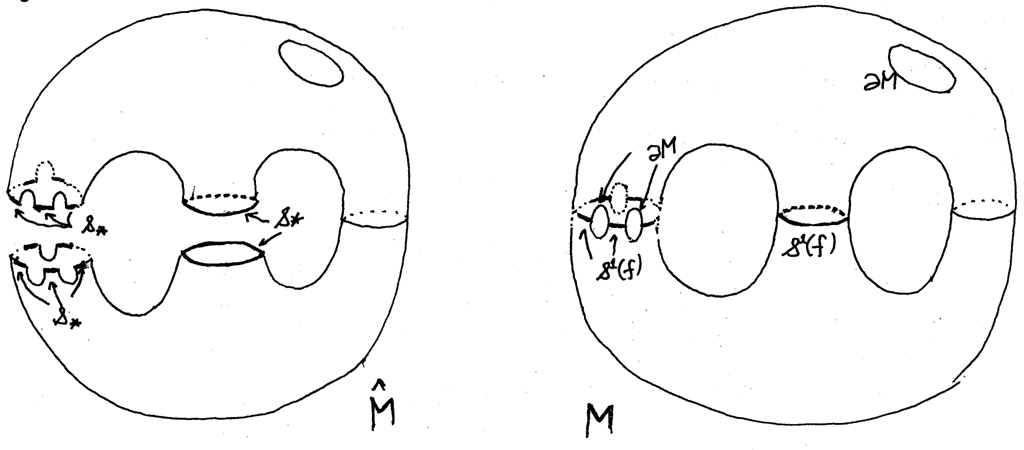
$\tilde{g}_a^- = \{D_u^{o-} ; f^a(D_u^{o-}) = D_u^{o-}, f^b(D_u^{o-}) \neq D_u^{o-} \ (1 \leq {}^\forall b < a)\}$ の元の個数

$\tilde{t}_a^+(v) = \{\Phi_w^+ ; f^a(\Phi_w^+) = \Phi_w^+, f^b(\Phi_w^+) \neq \Phi_w^+ \ (1 \leq {}^\forall b < a)$,

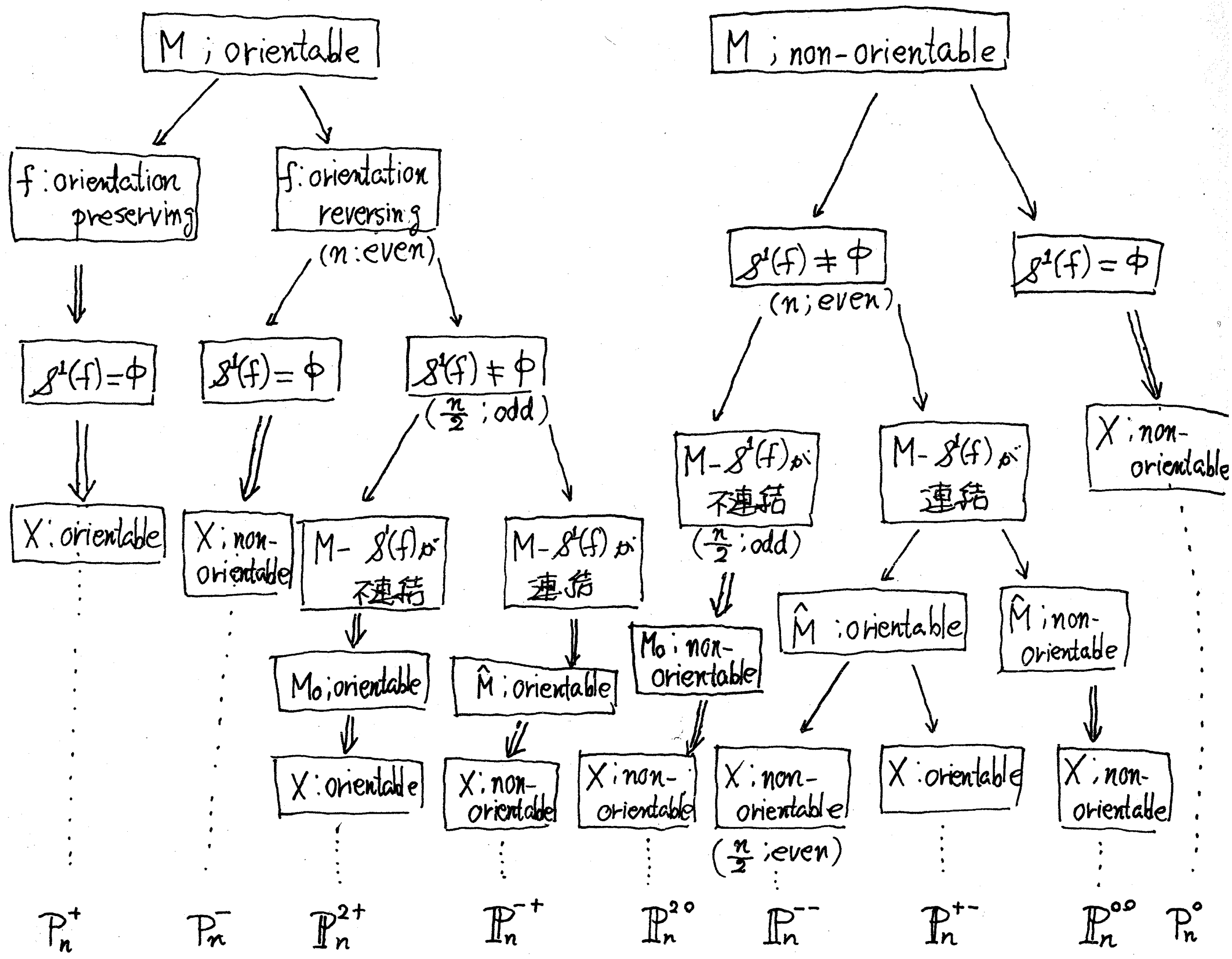
かつ Φ_w^+ に属する arc の数 $\frac{n}{2a}v\}$ の元の個数

$\tilde{t}_a^-(v) = \{\Phi_w^- ; f^a(\Phi_w^-) = \Phi_w^-, f^b(\Phi_w^-) \neq \Phi_w^- \ (1 \leq {}^\forall b < a)$,

かつ Ξ_w^- に属する arc の数 $\frac{n}{2a}v\}$ の元の個数
そして $P_n^{\varepsilon\varepsilon'}(\hat{g}, \hat{l}, \hat{m}, \hat{\gamma}, \hat{\gamma}^-, \hat{t}^+, \hat{t}^-; \hat{l}, \hat{m}, \hat{\gamma}^+, \hat{\gamma}^-, \hat{t}^+, \hat{t}^-)$ に対応させて，（このとき $\hat{\gamma}^+_{2a} = 2\cdot\tilde{\gamma}^+_a$，$\hat{\gamma}^-_a = \tilde{\gamma}^-_a$，$\hat{t}^+_{2a}(v) = 2\cdot\tilde{t}^+_a(v)$，$\hat{t}^-_a(v) = \tilde{t}^-_a(v)$ （但し $\hat{t}^-_a(v)$ の arc の数は $\frac{n}{a}v$ 本）となり），その次は§2と同様にして $l_a, m_a, \gamma^+_{2a}, \gamma^-_a, t^+_{2a}(v), t^-_a(v)$ を求めて（$\gamma^+_{2a}, t^+_{2a}(v)$ で $\neq 0$ なのは even で $2a \nmid \frac{n}{2}$，$\gamma^-_a, t^-_a(v)$ で $\neq 0$ なのは $a \mid \frac{n}{2}$）
$X = M/f = \hat{M}/\hat{f}$，$p(\delta^1(f)) = S^1$，$p(\delta^0(f)) = S^0$，$S = S^1 \cup S^0$ とおいて X の genus g，∂X のうち $d_j \cap S^1 = \phi$ なるものの数 l，$d_u^0 \subset S^1$ なるものの数 $\gamma\ (= \gamma^+ + \gamma^-)$，$d_w^{(v)} \cap S^1$ が v 本の arc からなるものの数 $t(v)\ (= t^+(v) + t^-(v))$，$S^0$ の点の数 m として $[H_1(X - S^0); \mathbb{Z}_n]^*$ の $\mathcal{A}$−同値類の完全代表系に§2の条件⊗と同様な条件をつけたものを求めれば§2の定理5.6.7と同様な定理がえられる。（詳細省略） 長くなってしまったので§3は定理が，また全てにわたって証明はつけられませんでした。



〈まとめ〉



参 考 文 献

[1] Tohl Asoh " Classification of free involutions on surfaces " Hiroshima Math.Jour., 6 (1976), 171-181.

[2] D.R.J. Chillingworth " A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface " Proc.Camb. Phil.Soc., 65 (1969), 409-430.

[3] W.R.B. Lickorish " Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds " Proc.Camb.Phil.Soc., 59(1963), 307-317.

[4] W.R.B. Lickorish " A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold " Proc.Camb.Phil.Soc., 60 (1964), 769-778. Corrigendum; 62 (1966), 679-681.

[5] P.A. Smith " Abelian actions on 2-manifolds " Michigan Math.Jour., 14(1967), 257-275.

[6] Shin'ichi Suzuki " On homeomorphisms of 3-dimensional handlebody " Can.Jour.Math., 29 (1977), 111-124.

[7] G.T. Whyburn " ANALYTIC TOPOLOGY " Amer.Math.Soc.Colloquium Publ., 28, Amer.Math.Soc., 1942.

[8] K. Yokoyama " A classification of periodic maps on compact surfaces " Tokyo Jour.Math., to appear.

[9] K. Yokoyama " A classification of periodic maps on compact surfaces II " to appear.

[10] K. Yokoyama " A complete classification of periodic maps on compact surfaces " preprint.

[11] K. Yokoyama " A classification of periodic maps on 2-manifolds " 京都大学数理解析研講究録 369「3次元多様体の構造と位置の問題」1979年11月 8 − 30