数理解析研究所講究録
488巻 1983年 105-127

Invariant subspaces for shift operators and von Neumann algebras generated by them

山形大　理　河村新蔵　(Shinzô Kawamura)

序．この講演において，離散的時間変換に伴う作用に対する不変部分空間の構造について、今まで分っている結果と今後の展望について述べる。時間的変換といえば空間の中の流れと捉える事ができようが、その流れを一つの流れだけではなく，複数の流れがあった時、その全ての流れに対する不変部分空間はどのようになっているのであろうか。又、その不変部分空間の構造と、その流れの性質との間にはどのような関係があるのであろうか。数学として定式化されたこの問題を研究していく事がこの表題の研究目的である。

H を可分なヒルベルト空間とする。H_n を H の複製とし、$K=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus H_n$（$\mathbb{Z}$ は整数全体）とする。時間変化による作用として $UH_n = H_{n+1}$ $(n\in\mathbb{Z})$ なる *unitary* 作用素を考える。この様な作用素を推移作用素という。特に S によって $S(\xi_n)=(\xi_{n-1})$ なる推移作用素を表わす。任意の推移

作用素は $U=WS$ （W は $WH_n=H_n$ $(n\in\mathbb{Z})$ なる unitary 作用素）と分解される。W を U の対角成分という。ある推移作用素の集まりを $\mathcal{S}$ で表わす。$W(\mathcal{S})$ を $\mathcal{S}$ に属する作用素の対角成分の集まりとする。即ち $W(\mathcal{S})=\{W : U=WS, U\in\mathcal{S}\}$ である。$\mathcal{S}=\{S\}$ の場合には、$\mathcal{S}$ の不変部分空間の構造は $\dim H=1$ のとき Beurling [1]、任意の次元のときには Helson [4] 及び Halmos [3] によって既に研究されている。この場合いずれも不変部分空間 $\mathfrak{M}$ は典型的な不変部分空間 $H^2=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus H_n$ と H 上の部分等距離作用素を値にもつ単位円 $\mathbb{T}$ 上の有界可測関数 V によって記述される $(\mathfrak{M}=VH^2)$。$K=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus H_n\cong l^2(\mathbb{Z})\otimes H\cong L^2(\mathbb{T})\otimes H$ とみると、上の V は $\mathcal{S}$ の $L^2(\mathbb{T})\otimes H$ 上での commutant $M_{L^\infty(\mathbb{T})}\otimes B(H)$ の部分等距離作用素であることがわかる。$\mathcal{S}$ の不変部分空間 $\mathfrak{M}$ が H^2 と $\mathcal{S}$ の commutant (von Neumann環となる) で記述された場合 Beurling に因んで $\mathcal{S}$ は Beurling 型であると言おう。不変部分空間の問題を次の様な視点より考えてみよう。

(1) 不変部分空間の理論で重要な役割をする wandering space と $\mathcal{S}$ の性質との関係.

(2) 単純不変部分空間が、純単純不変部分空間と可約な部分空間に分解される為の $\mathcal{S}$ の条件は何か？

(3) $\mathcal{S}$ が Beurling 型になる為の必要十分条件は何か？

(4) $\mathcal{S}$ が Beurling 型ではない時に、不変部分空間の構造はどのようになっているのであろうか？

(5) $\mathcal{S}$ から生成される von Neumann 環はどのような von Neumann 環であろうか？

(6) 可約空間と単純不変部分空間の関係はどのようになっているか？

§1. 不変部分空間の分解

推移作用素族 $\mathcal{S}$ に対し、$\mathcal{S}$ の不変部分空間は可約な空間、すなわち $\mathcal{S}^*$－不変、と可約でない空間の二種類があり、$\mathcal{S}$ が唯一個の推移作用素から成る時には任意の不変部分空間は、この二種類の不変部分空間に分解される事が分っている。しかし $\mathcal{S}$ の個数が2以上になると必ずしもこの事は成り立たない。しかも成り立たないどころか奇妙な現象が興る。というのは、不変部分空間の構造を解析していく上で重要な部分空間 $\mathfrak{m} \ominus [\mathcal{S}\mathfrak{m}]$ の存在が必ずしも保障されないのである。ここに $[\mathcal{S}\mathfrak{m}]$ は集合 $\{U\xi\,;\,U \in \mathcal{S},\ \xi \in \mathfrak{m}\}$ によって生成される閉部分空間である。これらの事は以前に講究録[5]に記してあるので、その中の例を参照する。

(a) $[\mathcal{S}\mathfrak{m}] = \mathfrak{m}$ [5; 例 1.5]

(b) $\mathfrak{M}\ominus[\mathcal{S}\mathfrak{M}]\neq\{0\}$ であるが、$[\mathcal{S}\mathfrak{M}]=[\mathcal{S}^2\mathfrak{M}]$ である。
[5; 例.1.7]

我々の研究対象として推移作用素族 $\mathcal{S}$ を選ぶ時、どの様な $\mathcal{S}$ が整合性をもっているのであろうか。$\mathcal{S}$ の不変部分空間の構造を調べるという立場からすれば、全ての $\mathcal{S}$ についてその不変部分空間を解析しなければならないのであるが、数学の常套手段として不変部分空間の構造と $\mathcal{S}$ の性質との関係をまず調べる事から始める。従って $\mathcal{S}$ の性質を分類しながら、将来は全体の類のそれぞれの不変部分空間の構造を求めなければならないであろう。定理の前に一つの注意を与えておく。一つの推移作用素 U を与える事は H の複製 H_n に共通の座標を与える事になる。すなわち、H_n の元 ξ と H_{n+1} の元 η が H で考えれば同じベクトルになるという事は $U\xi=\eta$ であると言ってもいいのである。従って $\mathcal{S}$ の任意の元 U に対し $\;_n$ の座標を決めれば $\mathcal{S}$ は常に S を含んでいるとしても良いのである。実際、U と S の関係は次の様になっている。$U=WS$, $W=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus u_n$ に対し、

$$V=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus v_n \quad \begin{cases} v_n=u_n\cdots u_1 & n\geq 1 \\ v_0=1 & \\ v_n=u_{n+1}^*\cdots u_0^* & n\leqq -1 \end{cases}$$

とすれば $S=V^*UV$ となる。

定理 1.1. $\mathcal{S}$ は次の二つの条件をみたしているとする。

(1) $W(\mathcal{S})$ は K 上の unitary 作用素全体の中の部分群である。

(2) $S\,W(\mathcal{S})\,S^* = W(\mathcal{S})$

この時、$\mathcal{S}$ の不変部分空間 $\mathfrak{m}$ は次の様に分解される。

(a) $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{m}_r$,

$\mathfrak{m}_p$ は純単純不変部分空間であり、$\mathfrak{m}_r$ は可約な部分空間である。

(b) $\mathfrak{m}_p = (\mathfrak{m}_p)_0 \oplus (\mathfrak{m}_p)_1 \oplus (\mathfrak{m}_p)_2 \oplus \cdots$,

$(\mathfrak{m}_p)_0 = \mathfrak{m}_p \ominus [\mathcal{S}\mathfrak{m}_p]$ であり $(\mathfrak{m}_p)_n = [\mathcal{S}^{n-1}\mathfrak{m}_p] \ominus [\mathcal{S}^n \mathfrak{m}_p]$ $(n \geq 1)$ は $S^n[W(\mathcal{S})(\mathfrak{m}_p)_0]$ と一致する。 (cf [6 : Theorem 1.9, 1.10])

以下の章においては定理 1.1 の条件 (1), (2) を仮定する。この時、純単純不変部分空間 $\mathfrak{m}$ の分割

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \cdots$$

に対し、$\mathfrak{m}_n = S^n[W(\mathcal{S})\mathfrak{m}_0]$ となり $\mathfrak{m}$ が $W(\mathcal{S})$ に対して不変であるという条件を加えても不変部分空間の構造に本質的な変化を及ぼさないので、今後、不変部分空間という用語は $\mathcal{S}$ と $W(\mathcal{S})$ の双方に対し不変であるとする。

§2. Beurling 型の推移作用素族.

不変部分空間が分った、正しく把握できた、という事はどういう事を言うのであろうか。Beurling [1] の不変部分空間に関する結果を見てみよう。もっとも両側推移作用素についての命題は Helson [4], Halmos [3] によって与えられたのであるが。$\dim H = 1$, $\mathcal{S} = \{S\}$, $\mathfrak{M}$ を $\mathcal{S}$ の不変部分空間とする。このとき次の事が成り立つ。

(1) $\mathfrak{M}$ は可約な空間であるか、純単純不変部分空間のいずれかである。

(2) $\mathfrak{M}$ が純単純不変部分空間であれば

$$\mathfrak{M} = M_u H^2(\mathbb{T})$$

となる。M_u は $|u(z)| = 1$ $(z \in \mathbb{T})$ となる $\mathbb{T}$ 上の可測関数による乗法作用素であり、$H^2(\mathbb{T}) = \{ f \in L^2(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0,$ $n < 0 \}$ である。

ここで定義をはっきりさせておこう。不変部分空間 $\mathfrak{M}$ が単純であるとは $[\mathcal{S}\mathfrak{M}] \subsetneq \mathfrak{M}$ となることである。$\mathcal{S}$ は定理 1.1 の条件をみたしている、としているので $\mathfrak{M}$ が単純である事と $\mathfrak{M}$ が可約でないという事は同値である (cf [6 : Proposition 1.12])。単純不変部分空間 $\mathfrak{M}$ が純であるとは $\mathfrak{M}$ が可約な不変部分空間を含まないという事である。この事は

$$\bigcap_{n=0}^{\infty}[S^n \mathfrak{M}] = \{0\}$$

と同値である。

我々は Beurling の定理から二つの事を汲み取る事ができる。すなわち $H^2(\mathbb{T})$ は典型的な S の不変部分空間であり、M_u は S と可換な作用素であるという事。$M_{L^\infty(\mathbb{T})} = \{M_f ; f \in L^\infty(\mathbb{T})\}$ は S から生成された von Neumann 環であるが、$M_{L^\infty(\mathbb{T})}$ が $B(L^2(\mathbb{T}))$ ($= L^2(\mathbb{T})$ 上の有界線型作用素全体) の中で極大可換環という事情により $M_{L^\infty(\mathbb{T})}$ は S の commutant にもなっている。不変部分空間論の立場から言えば、M_u は $\{S\}$ の commutant の元としてとらえる方が自然であろう。この二つの事を考え、我々は一つの不変部分空間の構造と、$\mathcal{S}$ の性質との間における関係を次の定義によって与える。この為にいくつかの記号の説明を行なう。一般にヒルベルト空間上の有界線型作用素の族 $\mathcal{F}$ に対し $M(\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ から生成された von Neumann 環を意味する。又、$M(\mathcal{F})$ の commutant を $M(\mathcal{F})'$ で表わす。ヒルベルト空間の部分空間 $\mathfrak{M}$ に対し $R(\mathfrak{M})$ は $\mathfrak{M}$ から生成された可約空間を意味する。

定義2.1. $\mathcal{S}$ は Beurling 型である。

$$\Longleftrightarrow$$

任意の純単純不変部分空間 $\mathfrak{M}$ は $H^2(\mathbb{T}) \otimes H$ と $M(\mathcal{S})'$ の部

分等距離作用素 V によって

$$\mathfrak{M} = V(H^2(\mathbb{T}) \otimes H)$$

と記述される。 V の initial space は $L^2(\mathbb{T}) \otimes eH$ ($e \in M(W(\mathcal{S})_0)'$) であり final space は $R(\mathfrak{M})$ である。(注. $W(\mathcal{S})_0$ は $W(\mathcal{S})$ の H_0 への制限である。) [6: Theorem 2.12]

$\mathcal{S}$ が Beurling 型である時、純単純不変部分空間 $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{M} = V(H^2(\mathbb{T}) \otimes H)$ となるわけであるが、 V の性質より、より精密に記述でき

$$\mathfrak{M} = V(H^2(\mathbb{T}) \otimes eH)$$

となる。すなわち、 $\mathfrak{M}$ は典型的な不変部分空間 $H^2(\mathbb{T}) \otimes eH$ の V による像となっている。

一般に $\mathcal{S}$ は Beurling型とはならないが、この事を次の例によって示そう。 $\dim H = 1$ ($K = L^2(\mathbb{T})$) で $\mathcal{S} = \mathfrak{S}$ (= 推移作用素全体) とする。このとき $D(\mathcal{S}) = M(W(\mathcal{S})) = M_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$ ($f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ に対し $M_f(e_n) = f(n)e_n$ ($e_n(z) = z^n$) である) となり $M(\mathcal{S}) = B(L^2(\mathbb{T}))$ である。従って $M(\mathcal{S})' = \mathbb{C}(L^2(\mathbb{T})) = \{M_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ (= スカラーによる乗法作用素全体) となり、$M(\mathcal{S})'$ の部分等距離作用素は I (= identity) のみであり、定義の e に相当する射影子は H 上の identity 1 のみである。 $\mathfrak{S}$ の不変部分空間を考えると、 $S^n H^2(\mathbb{T})$ ($n \in \mathbb{Z}$) があ

り、この空間は $H^2(\mathbb{T})$ と $M(\mathcal{S})'$ の部分等距離作用素で記述する事はできない。我々が第一に求めるべき事は $\mathcal{S}$ が Beurling型になる為の必要十分条件を与える事である。(下の定理における接合積の理論については Strătilă [12; §22] を又一般的な von Neumann 環の理論については Takesaki [13] の本を参照する)

定理 2.2. $\mathcal{S}$ は Beurling型である。

$$\Longleftrightarrow$$

(1) $M(\mathcal{S}) = M \times_\alpha \mathbb{Z}$ (H 上の von Neumann 環 M の $\mathbb{Z}$ の M 上の自己同型表現 α^n による接合積)

(2) $\alpha = Ad\, u$ (u は H 上の unitary 作用素)

(3) α は M' の中心有限射影子を fix する。

定理 2.2 の状況を次の頁に図示する。我々の目的は、与えられた $\mathcal{S}$ の不変部分空間の構造を研究する事であるので、必然的に (A), (B), (C) の場合について、どのようになっているか調べなければならない。その前に $M(\mathcal{S})$ の代数的構造について一つの注意をしておこう。

[注] 次頁の表でも分るように、$M(\mathcal{S})$ の性質として、それが接合積になるか否かを議論しているわけであるが、これは

$M(\delta)$ の類別

<table>
<tr><td rowspan="4">$M(\delta)$</td><td rowspan="3">${}^{\exists}M \subset B(H)$
$M(\delta) = M \times_\alpha \mathbb{Z}$</td><td rowspan="2">${}^{\exists}u \in U(H)$
$\alpha = \mathrm{Ad}\, u$</td><td>${}^{\forall}e$ (M'の f.c.p)
$\alpha(e) = e$</td><td>${}^{\exists}u \in M_{(u)}$
$\alpha = \mathrm{Ad}\, u$</td></tr>
<tr><td>(C) ${}^{\exists}e$ (M'の f.c.p)
$\alpha(e) \neq e$</td><td>${}^{\forall}u \in M_{(u)}$
$\alpha \neq \mathrm{Ad}\, u$</td></tr>
<tr><td colspan="3">(B) ${}^{\forall}u \in U(H)$
$\alpha \neq \mathrm{Ad}\, u$</td></tr>
<tr><td colspan="4">(A) ${}^{\forall}M \subset B(H)$
$M(\delta) \neq M \times_\alpha \mathbb{Z}$</td></tr>
</table>

$U(H)$ = H 上の unitary 作用素全体

$M_{(u)}$ = M の中の unitary 作用素全体

f. C. P. = finite central projection

α の条件をみても分るように、ヒルベルト空間 H と K に付随した条件である。一般に von Neumann 環は代数的にも定義される。それは W^*-環と呼ばれているが、実は抽象 W^*-環としての $M(\delta)$ は常に接合積と同型なのである。これは長田〔2 : Theorem 4〕の定理より導かれる。我々の $M(\delta)$ の状況を考えてみよう。$M(\delta)$ は $D(\delta)$ と $\{S^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ によって生成されており、$\Phi : T \longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_n T P_n$ (P_n は K から H_n への射影子) は $M(\delta)$ より $D(\delta)$ への faithful normal expectation

で $\Phi(S^*)=0$ である。これは正に長田の Theorem 4 の仮定そのものであり、よって $M(\mathcal{S})$ は $D(\mathcal{S})$ と $D(\mathcal{S})$ の自己同型写像 $\gamma: D \longrightarrow SDS^*$ による接合積 $D(\mathcal{S})\underset{\gamma}{\times}\mathbb{Z}$ と同型となる。この同型はあくまで抽象的な W^*-環として同型であり、上の定理 2.2 で議論されているように unitary 同値の事については何も言っていない。

§3. 重複度 1 の推移作用素族

Beurling 型でない推移作用素族はどんな形をしているのであろうか。言葉を代えて言えば von Neumann 環 $M'(\mathcal{S})$ はどのような構造をしているのであろうか。又その不変部分空間の構造はどのようになっているのであろうか。現在の段階において Beurling 型でない族の全てを眺める事はできない。我々は一つの経過として推移作用素の重複度によって $M(\mathcal{S})$ あるいは不変部分空間の構造がどのように異なるか調べようと思う。H の次元によってどのような影響があるのであろうか。我々は特に $\dim H<\infty$ の場合について、この章と次章に於て考察する。この章においては $\dim H=1$ としよう。

H の次元が 1 であるという事は、H 上の von Neumann 環は唯一つ $B(H)=\mathbb{C}(H)=\{\lambda 1:\lambda\in\mathbb{C}\}$ が存在するのみであり、$B(H)$ 上の自己同型写像は自明となってしまう。従って

$M(\mathcal{S})$ が接合積である時、$M(\mathcal{S}) = B(H) \times_{\alpha} \mathbb{Z} = M_{L^{\infty}(\mathbb{T})}$ とならなければならず、これは $\mathcal{S} = \{S\}$ の時に限る。さて Beurling 型でない時はどのようになっているのであろうか。

$\dim H = 1$ であるから $K = L^2(\mathbb{T})$ と考えられ、$U(\in \mathcal{S})$ に対し $Ue_n = z_n e_n$ $(|z_n| = 1)$ となる数列 $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が対応する。S に対応する数列は $\{z_n = 1\}_{n \in \mathbb{Z}}$ である。我々は $\mathcal{S}$ に対応するこの数列の族の性質、とりわけ周期性に着目した。自然数 k に対し、

$\mathcal{S}_k = \{U ; U$ に対応する数列 $\{z_n\}$ は周期 k の周期数列である$\}$

$\mathcal{S}_{\infty} = L^2(\mathbb{T})$ 上の（基底 $\{e_n\}$ に関する）推移作用素全体

これらの可算個の族 $\{\mathcal{S}_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\mathcal{S}_{\infty}\}$ は定理1.1 の条件をみたす。重複度が 1 であるこの章の仮定の下で、推移作用素族は本質的にはこれらの族しかないという事がわかる。すなわち、与えられた $\mathcal{S}$ に対しある k が存在して $D(\mathcal{S}) = D(\mathcal{S}_k)$ となるのである。この事が成り立てば $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}_k$ の不変部分空間の構造は同じだという事になってしまうので、$\mathcal{S}$ の代りに $\mathcal{S}_k$ のそれを調べれば良いという事になる。$\mathcal{S}$ に対し、自然数の集合 $\mathbb{N}_p$ を次の様に定義する。

$\mathbb{N}_p = \{p \in \mathbb{N} ; U \in \mathcal{S}$ に対応する $\{z_n\}$ は全て $z_{n+p} = z_n$ となる$\}$

定理3.1 $\mathbb{N}_p \neq \phi$ のとき $k = \min \mathbb{N}_p$ に対し、$D(\mathcal{S}) =$

$D(\mathcal{S}_k)$ である。$N_p=\phi$ のとき $D(\mathcal{S})=D(\mathcal{S}_\infty)$ である。
[7; Theorem 1.2]

$1\leqq k<\infty$ のとき、$M(\mathcal{S}_k)$ は $D(\mathcal{S}_k)$ と $\{S^n\}$ から生成され、$L^2(\mathbb{T},2\pi/k)\otimes H_k$ 上の von Neumann 環とみて $M_{L^\infty(\mathbb{T},2\pi/k)}\otimes B(H_k)$ となる。尚 $L^2(\mathbb{T},2\pi/k)$, $L^\infty(\mathbb{T},2\pi/k)$ はそれぞれ $L^2(\mathbb{T})$, $L^\infty(\mathbb{T})$ の周期 $2\pi/k$ である関数全体を表わし、H_k は k 次元ユークリッド空間である。従って $M(\mathcal{S}_k)'=M_{L^\infty(\mathbb{T},2\pi/k)}\otimes\mathbb{C}(H_k)$ となる。又 $k=\infty$ のとき $M(\mathcal{S}_\infty)=B(L^2(\mathbb{T}))$ であり $M(\mathcal{S}_\infty)'=\mathbb{C}(L^2(\mathbb{T}))$ である。$\mathcal{S}_k$ $(1\leqq k\leqq\infty)$ の不変部分空間の構造は次の様になる。

定理 3.2. $(1\leqq k<\infty)$ $\mathfrak{M}$ を $\mathcal{S}_k$ の不変部分空間とする。このとき次の事が成り立つ。

(1) $\mathfrak{M}$ は $\mathcal{S}_k$ の可約部分空間か純単純不変部分空間のいずれかである。

(2) $\mathfrak{M}$ が可約部分空間であれば、$\mathfrak{M}=M_{\chi_E}L^2(\mathbb{T})$ と表わされる。尚 χ_E は $\chi_E(z)=\chi_E(ze^{2\pi i/k})$ (a. e. $z\in\mathbb{T}$) となる $\mathbb{T}$ の可測集合 E の特性関数である。

(3) $\mathfrak{M}$ が純単純不変部分空間であれば

$$\mathfrak{M}=M_u S^m H^2(\mathbb{T})$$

と表わされる。$u(z)=u(ze^{2\pi i/k})$ で $|u(z)|=1$ である。又 $0\leqq m\leqq k-1$ である。[7 : Theorem 2.2 (1)].

定理 3.3. ($k=\infty$) $\mathfrak{M}$ を $\mathcal{S}_\infty$ の不変部分空間とする。この時、$\mathfrak{M}$ が $L^2(\mathbb{T})$ の真部分空間であれば、$\mathfrak{M}$ は純単純不変部分空間で $\mathfrak{M}=S^m H^2(\mathbb{T})$ ($m\in\mathbb{Z}$) である。[7 : Theorem 2.2 (2)].

§4. Beurling 型でない幾つかの族について … $\dim H\geqq 2$

前章において Beurling 型でない $\mathcal{S}$ ($\dim H=1$) の不変部分空間の構造を見、§2 において Beurling 型になる為の必要十分条件を求めたわけであるが、我々はこの章で、上記二つの定理を不変部分空間の構造定理として統一的に扱える事を示そう。

M を H 上の von Neumann 環、α を M 上の自己同型写像で定理 2.2 の (2), (3) の条件をみたしているとする。すなわち、H 上の unitary 作用素 u が存在して $\alpha=\mathrm{Ad}\,u$ ($\alpha(x)=uxu^*$ ($x\in M$)) となり、更に α は M' の中心有限射影子に対し不変である ($\alpha(e)=e$)。自然数 k に対し、k 個の M の直積 $M^k=\{(x_i)_{i=0}^{k-1} : x_i\in M\}$ を考えよう。$x=(x_i)\in M^k$ に対し、$L^2(\mathbb{T})\otimes H$ 上の作用素 $\tau(x)$ を

次の様に定義しよう。

$$\eta(t)(e_{nk+i}\otimes\xi) = e_{nk+i}\otimes\alpha^n(t_i)\xi \qquad (\xi\in K).$$

$\mathcal{S} = \{\eta(t)S\ ;\ t=(t_i)\in M^k,\ t_i$ は M の *unitary* 作用素$\}$ とすれば、$M(\mathcal{S})$ は $\{\eta(t) : t\in M^k\}$ と $\{S^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ から生成された von Neumann 環となり $k=1$ のとき接合積となり、定理 2.2 の条件をみたす。この時 $\mathcal{S}$ の不変部分空間の構造は次の様になる。まず一般の不変部分空間 $\mathfrak{m}$ は可約な部分空間 $\mathfrak{m}_r$ と純単純な部分空間 $\mathfrak{m}_p$ に分れる。これは $W(\mathcal{S})$ が定理 1.1 の条件をみたしている事から分る. 従って定理として純単純不変部分空間についてのみ述べる。

定理 4.1. $\mathfrak{m}$ を $\mathcal{S}$ の純単純不変部分空間とする。このとき

$$\mathfrak{m} = V\sum_{i=0}^{k-1} S^i(H^2(\mathbb{T})\otimes f_i H)$$

となる。V は $M(\mathcal{S})'$ の部分等距離作用素で *initial space* は $L^2(T)\otimes fH$ $(f=\sum_{i=0}^{k-1} f_i)$, *final space* は $R(\mathfrak{m})$ である. $\{f_i\}$ は互いに直交する $M(W(\mathcal{S}))'$ の射影子である。[9]

$M(\mathcal{S})'$ についてしばらく考察してみよう。$M(\mathcal{S})$ は S を含むから、$M(\mathcal{S})'\subset\{M_F : F\in L^\infty(\mathbb{T}, B(H))\}$ となる。$L^\infty(\mathbb{T}, B(H))$ は $\mathbb{T}$ 上の $B(H)$-値可測で本質的有界関数全体を表わす。$G\in L^2(\mathbb{T}, H)\cong L^2(\mathbb{T})\otimes H$ に対し $(M_F G)(z) =$

$F(z)G(z)$ である。 $k=1$ の場合、$M_F \in \mathcal{M}(\delta)'$ と $\hat{F}(n) \in \mathcal{U}''M$ は同値である。一般に $k \neq 1$ の場合も含めて、

$$M_F \in \mathcal{M}(\delta)' \iff \hat{F}(nk+i) \in \mathcal{U}''M \quad (0 \leq i \leq k-1)$$

となる。従って定理4.1で求めた V は $V = M_F$ となり、$F(z)$ は部分等距離作用素で $\hat{F}(nk+i) \in \mathcal{U}''M$ である。

さてここで、この定理の応用をあげておこう。$H = \sum_{i=0}^{k-1} \oplus H_i$ $\dim H_i = \alpha_i$ としよう。$\alpha = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i$ とする。k 個の $\mathbb{C}$ に対して直積 $\mathbb{C}^k$ を考え、$a = (a_i)_{i=0}^{k-1} \in \mathbb{C}^k$ に対し、H 上の作用素 M_a を次の様に定義する。

$$M_a\left(\sum_{i=0}^{k-1} \oplus \xi_i\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \oplus a_i \xi_i \quad (\xi_i \in K,\ 0 \leq i \leq k-1)$$

$M_{\mathbb{C}^k} = \{M_a : a \in \mathbb{C}^k\}$ とし、$M_{\mathbb{C}^k}$ 上の自己同型写像 β を次の様に定義する

$$\beta(M_a)\left(\sum_{i=0}^{k-1} \oplus \xi_i\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \oplus a_{i-1} \xi_i \quad (a_{-1} = a_{k-1})$$

もしも $\alpha_i = \alpha_0$ $(1 \leq i \leq k-1)$ であれば、β は次に定義する H 上の unitary 作用素 u によって $\beta = \mathrm{Ad}\, u$ となる。

$$u\left(\sum_{i=0}^{k-1} \oplus \xi_i\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \oplus \xi_{i-1} \quad (\xi_{-1} = \xi_{k-1}).$$

M_a に対し $L^2(\mathbb{T}) \otimes H$ 上の作用素 $\pi_\beta(M_a)$ を次の様に定義する。

$$\pi_\beta(M_a)(e_n \otimes \xi) = e_n \otimes \beta^{-n}(M_a) \quad (n \in \mathbb{Z})。$$

M_β として $\{\pi_\beta(M_a) : a \in \mathbb{C}^k\}$ と $\{S^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ から生成された von Neumann 環とする。すなわち $M_\beta = M_{\mathbb{C}^k} \underset{\beta}{\times} \mathbb{Z}$ である。

又、 $$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta(M_a)S : a=(a_i)\in\mathbb{C}^k \quad |a_i|=1\}$$
とすれば、$M(\mathcal{S}) = M_\beta$ である。

さて $\mathcal{S}_\beta$ は $k=1$ と $\alpha_i = \infty\ (0 \le i \le k-1)$ の場合を除いて定理 2.2 の条件をみたしていないから Beurling 型ではない。それでは不変部分空間の構造はどのような形をしているのであろうか。実は、この $\mathcal{S}$ は上で議論した M と α と k によって定まる族と unitary 同値になっている事が分る。ここで K_i への射影子を q_i とする。
$$V_0 = \sum_{i=0}^{k-1} S^i(1\otimes q_i)$$
とすれば
$$V_0\mathcal{S}_\beta V_0^* = \mathcal{S}_k$$
となる。この場合 $\mathcal{S}_k$ は $M=\mathbb{C}(H)$, α = identity に付随して決まる推移作用素族である。$\mathcal{S}_\beta$ の不変部分空間 $\mathfrak{m}$ に対し、$V_0\mathfrak{m}$ が $\mathcal{S}_k$ の不変部分空間になることから、次の定理を得る。

定理 4.2　$\mathfrak{m}$ を $\mathcal{S}_\beta$ の純単純不変部分空間とする。このとき
$$\mathfrak{m} = UV_0^*\left(\sum_{i=0}^{k-1} S^i(H^2(T)\otimes f_iH)\right)$$
となる。$\{f_i\}_{i=0}^{k-1}$ は互いに直交する H 上の射影子。U は $M(\mathcal{S}_\beta)'$ の部分等距離作用素，UV_0 は initial space として $L^2(\mathbb{T})\otimes fH$ $(f=\sum_{i=0}^{k-1} f_i)$, final space として $R(\mathfrak{m})$ をもつ部分

等距離作用素である。

この定理の f_i は $(V_0\mathfrak{M})_{0,i} = P_{k,i}(V_0\mathfrak{M})_0$ （$P_{k,i}$ は K から $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus e_{nk+i}$ への射影子）の次元によって決まるが、$\alpha_i = \infty$ のときは $f_i \leqq g_i$ となるようにとれ，このとき

$$V_0\left(\sum_{i=0}^{k-1} S^i\left(H^2(\mathbb{T})\otimes f_i K\right)\right) = H^2(\mathbb{T})\otimes f H$$

となる事が分り、$\mathcal{S}_\beta$ は Beurling 型である事がこのことからもよく分る。最後に McAsey によって研究されている不変部分空間の構造定理との関連について述べておこう。彼は non-self-adjoint crossed product として次の様な推移作用素族の不変部分空間の構造を研究([10], [11])している。$\alpha_i = \alpha_0 = 1$ $(1\leqq i\leqq k-1)$ の条件の下で $\beta = \mathrm{Ad}\,u$, $u\in U(H)$ となるが、この u により

$$\mathcal{T}_\beta = \{(1\otimes M_a u)S \;;\; a\in\mathbb{C}^n\}$$

とする。この $\mathcal{T}_\beta$ は

$$W_0(e_n\otimes\xi) = e_n\otimes u^n\xi \quad (n\in\mathbb{Z},\ \xi\in K)$$

で定義される $L^2(\mathbb{T})\otimes K$ 上の unitary 作用素 W_0 によって $\mathcal{S}_k$ の場合に帰着される。すなわち $W_0\mathcal{S}_\beta W_0^* = \mathcal{T}_\beta$ となり

$$V_0 W_0^*\mathcal{T}_\beta(V_0W_0^*)^* = \mathcal{S}_k$$

となる。従って $\mathcal{T}_\beta$ の不変部分空間 $\mathfrak{M}$ に対し $V_0W_0^*\mathfrak{M}$ は $\mathcal{S}_k$ の不変部分空間である。この事より次の定理を得る。

定理4.3. $\mathfrak{M}$ を T_β の純単純不変部分空間とする。この時、

$$\mathfrak{M} = U \cdot W_0 \cdot V_0^* \left(\sum_{i=0}^{k-1} S^i (H^2(\mathbb{T}) \otimes f_i H) \right)$$

である。$\{f_i\}$ は互いに直交する H 上の射影子。U は $M(T_\beta)'$ の部分等距離作用素で $UW_0V_0^*$ は initial space として $L^2(\mathbb{T}) \otimes fH$ $(f = \sum_{i=0}^{k-1} f_i)$, final space として $R(\mathfrak{M})$ を持つ部分等距離作用素である。

純単純不変部分空間 $\mathfrak{M}$ は

$$\sum_{i=0}^{k-1} S^i (H^2(\mathbb{T}) \otimes f_i H)$$

の $UW_0V_0^*$ による像である。従ってこの空間は不変部分空間の自然な model であると言えよう。canonical model という言葉は、McAsey によって使われ、彼は T_β の不変部分空間の構造を両側不変部分空間の族 $\{\ell^2(B)\}$ と T_β の commutant の部分等距離作用素で表わし、$\{\ell^2(B)\}$ を一つの canonical models と呼んだ。その場合、不変部分空間 $\mathfrak{M}$ より $\ell^2(B)$ を見つけるのであるが [11: Theorem 3.4]、我々の場合も $\mathfrak{M}$ より $\sum_{i=0}^{k-1} S^i (H^2(\mathbb{T}) \otimes f_i H)$ を見つける。その場合、我々の方法はより簡単に f_i を見つけることができるように思われる。

§5. 可約部分空間の分解

$L^2(\mathbb{T})$ の S-不変な部分空間 $\mathfrak{m}$ を思い出してみよう。$\mathfrak{m}$ は可約であるか否かであるが、可約な時には $\mathfrak{m} = M_{\chi_E} L^2(\mathbb{T})$、可約でない時には $\mathfrak{m} = M_u H^2(\mathbb{T})$ となり、可約な $\mathfrak{m}$ は $E = \mathbb{T}$ でない限り unitary 関数を含まない。従って、この時 $\mathfrak{m}$ は単純不変部分空間を含まない。$\mathcal{R}$ を可約部分空間とする。このとき

$\mathcal{R} \subsetneqq L^2(\mathbb{T}) \iff \mathcal{R}$ は単純不変部分空間を含まない。

この様な状態は一般の $\mathcal{S}$ についてどのようになっているのであろうか。これは $\mathcal{S}$ の不変部分空間の構造が分っていない限り、可約部分空間と単純不変部分空間の関係を論ずる事はできないので、この章では $\mathcal{S}$ は Beurling 型で特に、$M(\mathcal{S}) = M \underset{\alpha}{\times} \mathbb{Z}$ で M は factor であるとする。可約な空間 $\mathcal{R}$ は $M(\mathcal{S})'$ の射影子 P と

$$\mathcal{R} = P\,(L^2(\mathbb{T}) \otimes H)$$

という関係において一対一に関係しており、又 $S \in M(\mathcal{S})$ より $P = M_F$ $(F \in L^\infty(\mathbb{T}, B(H)))$ となっている。一方、純単純不変部分空間 $\mathfrak{m}$ は

$$\mathfrak{m} = V\,(H^2(T) \otimes f H)$$

という形で、$M(\mathcal{S})'$ の部分等距離作用素 V と $M(W(\mathcal{S})_0)' = D(\mathcal{S})_0'$ の射影子 f の組が対応している。又 V の initial projection は $1 \otimes f$, final projection は $P_{R(m)}$ である。

$M(\mathfrak{S})'$ の元は M_F の形になっているから V, $1\otimes f$, $P_{R(m)}$ も全て乗法作用素で，各 $z\in\mathrm{II}$ に対し

$$V^*(z)V(z)=f, \qquad V(z)V(z)^*=P_{R(m)}(z)$$

となっている。もしある意味で次元に相当する射影子上の関数 D があれば

$$D(f)=D(V^*(z)V(z))=D(V(z)V(z)^*)=D(P_{R(m)}(z))$$

となり，各 $z\in\mathrm{II}$ における $P_{R(m)}(z)$ の次元は常に $D(f)$ となるであろう。もし可約空間 R が準純不変部分空間 m を含めば $m=m_p\oplus m_r$ に対し，$R\supset m_p$ であるから $P_R\geqq P_{R(m_p)}$ 従って

$$P_R(z)\geqq P_{R(m_p)}(z) \quad (a.e.\ z\in\mathrm{II})$$

となるであろう。このことは $P_R(z)$ の次元が常に $P_{R(m_p)}(z)$ の次元より大きいという事になる。すなわちある意味での $\mathrm{ess.inf}\{D(P_R(z));\ z\in\mathrm{II}\}=\alpha>0$ という事になるう。M が semi-finite であれば M' もそうであるので D として普通の trace，M が III型であれば D として 0 と 1 のみをとる関数（$D(f)=1$ if $f\neq 0$ $D(f)=0$ if $f=0$）を基本にして求める次元関数を作っていく。この考え方を基本にして我々は可約空間が次の二種類の空間に分解されることが証明される。

定義 5.1、(1) 可約部分空間 $\mathcal{R}$ が fat であるとはある純単純不変部分空間 $\mathfrak{m}$ が存在して $\mathcal{R}=\mathcal{R}(\mathfrak{m})$ となる事である。

(2) 可約空間 $\mathcal{R}$ が thin であるとは $\mathcal{R}$ が純単純不変部分空間を含まない事である。

M の commutant N と自己同型写像 $\mathrm{Ad}\,u$ について

$$I(\mathrm{Ad}\,u, N)=\{n\in\mathbb{Z}\,;\ \mathrm{Ad}\,u^n \text{ は } N \text{ で inner}\}$$

(注： N が I 型の時は $I(\mathrm{Ad}\,u, N)=\mathbb{Z}$ である) とする。

$M(\mathcal{S})=M\underset{\alpha}{\times}\mathbb{Z}$ ($M'=N$) なる $\mathcal{S}$ について次の結果を得る。

定理 5.2、 $\mathcal{R}$ を $\mathcal{S}$ の可約部分空間とする。

(1) N : semi-finite $I(\mathrm{Ad}\,u, N)\neq\{0\}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{R}=\mathcal{R}_f\oplus\mathcal{R}_t$ ($\mathcal{R}_f$ は fat, $\mathcal{R}_t$ は thin である)。

(2) N : II_1 又は II_∞ 型, $I(\mathrm{Ad}\,u, N)=\{0\}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{R}=\mathcal{R}_f=\mathcal{R}(\mathfrak{m})$ ($\mathfrak{m}$ は純単純不変部分空間)。

(3) N : III 型, $I(\mathrm{Ad}\,u, N)\neq\{0\}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{R}=\mathcal{R}_f$ 又は $\mathcal{R}=\mathcal{R}_t$ [8 ; §2]。

References

[1] A. Beurling, On two problems concerning linear translations in Hilbert space, Acta Math. 81(1949), 239-255.

[2] M. Choda, Normal expectations and crossed products of von Neumann algebras, Proc. Japan Academy 50(1974), 738-742.

[3] P.R. Halmos, Shift on Hilbert spaces, J. reine angew. Math. 208(1961), 102-112.

[4] H. Helson, Lectures on invariant subspaces, Academic Press, London-New York, 1964.

[5] 河村新蔵, Invariant subspaces of shift operators of arbitrary multiplicity, 数解研・講究録 398, 98-110.

[6] S. Kawamura, Invariant subspaces of shift operators of arbitrary multiplicity, J. Math. Soc. Japan 34(1982), 339-354.

[7] S. Kawamura, Invariant subspaces for shift operators of multiplicity one, Tôhoku Math. J. 34(1982), 15-21.

[8] S. Kawamura, A decomposition of reducing subspace for shift operators, to appear in Tôhoku Math. J. 35(1983).

[9] S. Kawamura and N. Tomimori, Some families of shift operators and invariant subspaces, in preparation.

[10] M. McAsey, Invariant subspaces of non-self-adjoint crossed product, Pacific J. Math. 96(1981), 457-473.

[11] M. McAsey, Canonical models for invariant subspaces, Pacific J. Math. 91(1980), 377-395.

[12] S. Strătilă, Modular theory in operator algebras, Abacus Press, Tunbridge, England, 1981.

[13] M. Takesaki, Theory of operator algebras I, Springer-Verlag Berlin-Heiderberg-New York, 1979.