数理解析研究所講究録
488巻 1983年 27-42

Anosov 葉層の C^*-環の K-理論

都立大 理　高井博司
(Hiroshi Takai)

§1、序

C^*-環の K-理論は，同型問題や指数定理と関連して，最近活発に研究されている分野であるが，その中で特に Connes [1] は次の注目すべき結果を出した： C^*-力学系 $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ について，Gを単連結な可解 Lie 群とすると，接合積 $\mathfrak{A} \times_\alpha G$ の K-理論 $K(\mathfrak{A} \times_\alpha G)$ と $\mathfrak{A}$ の K-理論 $K(\mathfrak{A})$ との間に

(I) $$K(\mathfrak{A} \times_\alpha G) \simeq K^{\dim G}(\mathfrak{A})$$

なる関係が成り立つ。更に(I) の系として，葉層 C^*-環 $C^*(M, \mathcal{F})$ についても，$\mathcal{F}$が単連結可解 Lie 群の自由作用による軌道を葉とする葉層ならば，

(II) $$K(C^*(M, \mathcal{F})) \simeq K^{\dim \mathcal{F}}(M)$$

が成り立つ。

一方 Kasparov [4] は独自に開発した KK-理論を用い

て，(I) を次の様に一般化した： C^*-力学系 $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ について，G を従順的連結 Lie 群であるとし，G_c はその極大コンパクト部分群とする。V を G/G_c 上の G_c での余接ベクトル空間とし，Ad_* を G_c の V 上への余随伴表現とする。そのとき V から生成される Clifford 環 C_V 上への Ad_* の自然な拡張を σ とすると，可分な C^*-環 $\mathcal{B}$ に対して，

(III) $$KK(\mathcal{B}, \mathfrak{A} \times_\alpha G) \simeq KK(\mathcal{B}, (\mathfrak{A} \otimes C_V) \times_{\alpha \otimes \sigma} G_c)$$

が成り立つ。更に Ad_* がスピノールならば，

(IV) $$KK(\mathcal{B}, \mathfrak{A} \times_\alpha G) \simeq KK^{\dim G/G_c}(\mathcal{B}, \mathfrak{A} \times_\alpha G_c)$$

が成り立つ。

これら (I)～(IV) の結果をふまえて，本報告においては次の結果を示すことにする： M を（階数 1 の）局所対称空間の単位球面バンドルとし，$\mathcal{F}$ を M の Anosov 葉層とすると，(II) が成り立つ。証明の本質的部分は (III) による。

§2. 準備

M を $(C^\infty$-) 多様体，θ を M 上の流れ（又は微分同相写像）とする。θ が Anosov であるとは，M の接バンドル $T(M)$ の部分バンドル E^s, E^u, E^c（又は E^s, E^u）が存在して次の条件を満たすときをいう：

(i) $T(M) = E^s \oplus E^u \oplus E^c$ （又は $T(M) = E^s \oplus E^u$）

(ii) $\| d\theta_t|_{E^s} \| \leq C_1 e^{-tC_2}$ $(t\geq 0)$ （又は $\| d\theta^n|_{E^s} \| \leq C_1 C_2^n$ $(n\geq 0)$ ）

(iii) $\| d\theta_t|_{E^u} \| \leq C_1 e^{-tC_2}$ $(t\geq 0)$ （又は $\| d\theta^{-n}|_{E^u} \| \leq C_1 C_2^n$ $(n\geq 0)$ ）

(iv) $E_x^i = \mathbb{R} \left.\frac{d\theta_t(x)}{dt}\right|_{t=0}$ （$x\in M$）

ただし (ii),(iii) において C_1, C_2 は正の定数（微分同相の場合は $0<C_2<1$ ）である。又 $d\theta_t$ は θ_t の微分を意味する。

そのとき M の葉層 $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ で $T\mathcal{F}^s = E^s$, $T\mathcal{F}^u = E^u$ を満たすものが存在する。ただし $T\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}$ の接平面場である。$\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ を M の Horocycle 葉層という。更に、

$$W_x^{ws} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \theta_t(W_x^s) \qquad (x\in M,\ W_x^s \in \mathcal{F}^s)$$

$$W_x^{wu} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \theta_t(W_x^u) \qquad (x\in M,\ W_x^u \in \mathcal{F}^u)$$

とおくと、W_x^{ws}, W_x^{wu} は M の部分多様体となり、$\mathcal{F}^{ws} = \{W_x^{ws}\}_{x\in M}$, $\mathcal{F}^{wu} = \{W_x^{wu}\}_{x\in M}$ も M の葉層となる。これらを M の Anosov 葉層という。M 上の流れ θ から導入される Anosov（又は Horocycle）葉層は、Tomter [7] により次の様なタイプに分けられる：

(i) 局所対称空間の単位球面バンドル M の測地線流 θ により導入。

(ii) 可解多様体 M の極大ベキ零部分多様体の Anosov 微分同相写像の M への誘導流 θ により導入。

(iii) 簡約可能 Lie 群のベキ零 Lie 群上への作用による半直積 Lie 群の格子群による剰余多様体 M の自然な流れ θ に

より導入。

本稿では(1)の場合のみを考える。即ち，Gを実階数1の連結半単純Lie群（中心有限）とし，その岩沢分解$G=KAN$に対して Riemann 対称空間G/Kを考える。Gの一様格子群Γをとり，二重剰余空間$\Gamma\backslash G/K$を考えると，階数1の局所対称空間になる。Mを$\Gamma\backslash G/K$の単位球面バンドル$T_1(\Gamma\backslash G/K)$とし，$\Gamma\backslash G/K$の測地線$\Gamma gK \to \Gamma g(\exp tX)K$ $(g\in G,\ t\in \mathbb{R})$の定める$M$上の流れ$\theta$はAnosovになる。ただし，$A=\exp \mathbb{R}X$とする。$\theta$による$M$のHorocycle及びAnosov葉層をそれぞれ$\mathcal{F}_H$，$\mathcal{F}_A$と書くと次の命題が成り立つ：

<u>命題1.</u>　$(M,\mathcal{F}_H)$，$(M,\mathcal{F}_A)$は$\Gamma\backslash G/K$上の葉層化バンドルになり，ファイバーはそれぞれ$G/C_K(A)N$，G/Pである。ただし，$C_K(A)$はAのKにおける中心化群であり，Pは極小放物型部分群である。

G/Kは単連結であるから$\Gamma\backslash G/K$の基本群はΓに同型になる。よって夏目－高井［5］より次の命題が成り立つ：

<u>命題2.</u>　$C^*(M,\mathcal{F}_H)$，$C^*(M,\mathcal{F}_A)$はそれぞれ$(C_0(G/C_K(A)N)\times_\lambda \Gamma)_r$，$(C(G/P)\times_\lambda \Gamma)_r$に安定同型になる。ただし$(\cdot)_r$は縮約接合積を意味する。又$\lambda$は左移動作用を表わす。

更に$C_K(A)N$，Pは従順的であるので次の系を得る：

<u>系3.</u>　$C^*(M,\mathcal{F}_H)$，$C^*(M,\mathcal{F}_A)$はそれぞれ$C(\Gamma\backslash G)\times_\rho C_K(A)N$，

$C(\Gamma\backslash G)\times_\rho P$ に安定同型である。ただし，ρ は右移動作用を表わす。

§3. K-理論

先ず Kasparov の同変 KK-理論のなかで，この節に必要な所を簡単に述べることにする。

$(\mathcal{A},G,\alpha)$，$(\mathcal{B},G,\beta)$ を C^*-力学系とし，Hilbert $\mathcal{B}$-加群 $\mathcal{E}$ と，その上の有界 $\mathcal{B}$-作用素の全体 $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ 及びコンパクト $\mathcal{B}$-作用素全体 $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ を考える。今 $\mathcal{A}$ から $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ への準同型写像 φ と，（次数1の）G-連続作用素 $F\in\mathcal{L}(\mathcal{E})$ で次の条件を満たすものを考える：

(3.1) $\qquad [\varphi(a),F],\ (F-F^*)\varphi(a),\ (F^2-1)\varphi(a),\ (\tilde{\beta}_g(F)-F)\varphi(a)\ \in\ \mathcal{C}(\mathcal{E})$

$(g\in G,\ a\in\mathcal{A})$。ただし，$\tilde{\beta}$ は β の $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ への自然な持ち上げである。今 (3.1) を満たす $(\mathcal{E},\varphi,F)$ 全体を $\mathcal{E}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ で表わし，特に (3.1) が全て 0 作用素であるもの全体を $\mathcal{D}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ で表わす。そこで $\mathcal{E}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ の要素 $(\mathcal{E}_0,\varphi_0,F_0)$，$(\mathcal{E}_1,\varphi_1,F_1)$ に対して，関係 $(\mathcal{E}_0,\varphi_0,F_0)\sim(\mathcal{E}_1,\varphi_1,F_1)$ を次の様に導入する：

(i) $\mathcal{E}_0$ から $\mathcal{E}_1$ への G-同変等距離同型 u（次数0の）で

$$\varphi_1(a) = u\,\varphi_0(a)\,u^{-1} \qquad (a\in\mathcal{A})$$

を満たすものが存在する。（ユニタリー同値性）

(ii) $\mathcal{E}_G(\mathcal{A},\mathcal{B}\otimes C[0,1])$ の要素 $(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{\varphi},\tilde{F})$ で

$$\widetilde{\mathcal{E}}_t = \widetilde{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{B}\otimes C[0,1]} (\mathcal{B}\otimes C[t]),\quad \widetilde{\varphi}_t = \tau_t^* \circ \widetilde{\varphi},\quad \widetilde{F}_t = \tau_t^*(\widetilde{F})$$

$(0 \leq t \leq 1)$ なるものが存在して

$$(\widetilde{\mathcal{E}}_0, \widetilde{\varphi}_0, \widetilde{F}_0) = (\mathcal{E}_0, \varphi_0, F_0),\ (\widetilde{\mathcal{E}}_1, \widetilde{\varphi}_1, \widetilde{F}_1) = (\mathcal{E}_1, \varphi_1, F_1)$$

を満たす。（ホモトピー同値性）　ただし，τ_t^* は

$$\tau_t^*(\widetilde{F})(\xi \otimes b_t) = \widetilde{F}(\xi) \otimes b_t \quad \left(\xi \in \widetilde{\mathcal{E}},\ b_t \in \mathcal{B}\otimes C[t]\right)$$

なる $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{E}})$ から $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{E}}_t)$ への制限準同型である。

$\mathcal{E}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ の同値関係 $\sim$ による商空間を $\widetilde{\mathcal{E}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ と書き，$\mathcal{D}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ の $\widetilde{\mathcal{E}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ での像全体を $\widetilde{\mathcal{D}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ と書く。今 $[\mathcal{E}_1, \varphi_1, F_1], [\mathcal{E}_2, \varphi_2, F_2] \in \widetilde{\mathcal{E}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ に対して，

$$[\mathcal{E}_1, \varphi_1, F_1] + [\mathcal{E}_2, \varphi_2, F_2] = [\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2, \varphi_1 \oplus \varphi_2, F_1 \oplus F_2]$$

とおくと，$\widetilde{\mathcal{E}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ は可換半群になり，$\widetilde{\mathcal{D}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ による剰余半群 $\widetilde{\mathcal{E}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})/\widetilde{\mathcal{D}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ は可換群になる。これを <u>Kasparov の K-群</u>（又は <u>KK-群</u>）といい，$KK_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ と表わす。

注意 1.　$KK_G(\mathcal{A},\mathbb{C}) = Ext_G(\mathcal{A})$，$KK_G(\mathbb{C},\mathcal{B}) = K_G(\mathcal{B})$ である。

注意 2.　$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}$ は C^*-環であり，それぞれ（α, β, δ なる）G の作用があるとき，$KK_G(\mathcal{A},\mathcal{B})$ から $KK_G(\mathcal{A}\otimes\mathcal{D}, \mathcal{B}\otimes\mathcal{D})$ への準同型写像 $\sigma_{\mathcal{D}}$ で

(3.2)　$$\sigma_{\mathcal{D}}([\mathcal{E}, \varphi, F]) = [\mathcal{E}\otimes\mathcal{D}, \varphi\otimes id, F\otimes 1]$$

$\left([\mathcal{E}, \varphi, F] \in \widetilde{\mathcal{E}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B})\right)$ なるものが存在する。

注意 3.　$\mathcal{A}_2$ から $\mathcal{A}_1$ への準同型写像 π に対して，$KK_G(\mathcal{A}_1,\mathcal{B})$

から $KK_G(\mathcal{A}_2,\mathcal{B})$ への準同型写像 π^* で

$$\pi^*([\mathcal{E},\varphi,F]) = [\mathcal{E},\varphi\circ\pi,F] \qquad ([\mathcal{E},\varphi,F]\in\widetilde{\mathcal{E}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B}))$$

を満たすものが存在する。同様に $\mathcal{B}_1$ から $\mathcal{B}_2$ への準同型写像 η に対して，$KK_G(\mathcal{A},\mathcal{B}_1)$ から $KK_G(\mathcal{A},\mathcal{B}_2)$ への準同型写像 η_* で

$$\eta_*([\mathcal{E},\varphi,F]) = [\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{B}_1}\mathcal{B}_2,\ \eta'\circ\varphi,\ \eta'(F)]$$

$([\mathcal{E},\varphi,F]\in\widetilde{\mathcal{E}}_G(\mathcal{A},\mathcal{B}))$ を満たすものが存在する。ただし，η' は $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ から $\mathcal{L}(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{B}_1}\mathcal{B}_2)$ への G－準同型写像で

$$\eta'(T)(\xi\otimes b_2) = T(\xi)\otimes b_2 \qquad (T\in\mathcal{L}(\mathcal{E}),\ \xi\in\mathcal{E},\ b_2\in\mathcal{B}_2)$$

を満たす。

次に KK－理論で，基本的でかつ最も重要な性質に次にあげる結果がある：

<u>命題 4.</u>（積交叉性）　$(\mathcal{A}_i,G,\alpha_i),(\mathcal{B}_i,G,\beta_i)$ $(i=1,2)$ $(\mathcal{D},G,\delta)$ を C^*－力学系としたとき，$KK_G(\mathcal{A}_1,\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{D})\times KK_G(\mathcal{D}\otimes\mathcal{A}_2,\mathcal{B}_2)$ から $KK_G(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2,\ \mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2)$ への写像 $\otimes_{\mathcal{D}}$ で次の条件を満たすものが存在する：C^*－力学系 $(\mathcal{A}_j,G,\alpha_j),(\mathcal{B}_j,G,\beta_j)_{(j=1,2,3)},(\mathcal{D}_j,G,\delta_j)_{(j=1,2)}$ に対し，(i) $(x_1\otimes_{\mathcal{D}_1}x_2)\otimes_{\mathcal{D}_2}x_3 = x_1\otimes_{\mathcal{D}_1}(x_2\otimes_{\mathcal{D}_2}x_3)$

$\big(x_1\in KK_G(\mathcal{A}_1,\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{D}_1),\ x_2\in KK_G(\mathcal{D}_1\otimes\mathcal{A}_2,\mathcal{B}_2\otimes\mathcal{D}_2),\ x_3\in KK_G(\mathcal{D}_2\otimes\mathcal{A}_3,\mathcal{B}_3)\big)$

が成り立つ。注意 2 の $\sigma_{\mathcal{D}}$ について

(ii) $\sigma_{\mathcal{D}_2}(x_1)\otimes_{\mathcal{D}_1\otimes\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}_2}\sigma_{\mathcal{D}_1}(x_2) = x_1\otimes_{\mathcal{D}}x_2$

$\big(x_1\in KK_G(\mathcal{A}_1,\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{D}_1\otimes\mathcal{D}),\ x_2\in KK_G(\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}_2\otimes\mathcal{A}_2,\mathcal{B}_2)\big)$

及び

$$\text{(iii)} \quad \sigma_{\mathcal{D}_1}(x_1 \otimes_{\mathcal{D}} x_2) = \sigma_{\mathcal{D}_1}(x_1) \otimes_{\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}_1} \sigma_{\mathcal{D}_1}(x_2)$$

$(x_1 \in KK_G(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{D}),\ x_2 \in KK_G(\mathcal{D} \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2))$

が成り立つ。ただし，$\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{D}_j, \mathcal{D}$ $(i=1,2,3,\ j=1,2)$ は可分な C^*-環とする。

実際，$x_1 = [\mathcal{E}_1, \varphi_1, F_1] \in KK_G(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{D})$，$x_2 = [\mathcal{E}_2, \varphi_2, F_2] \in KK_G(\mathcal{D} \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2)$ に対して，次の様に $x_1 \otimes_{\mathcal{D}} x_2$ を定義する：

(a) $\quad \mathcal{E}_{12} = (\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes_{\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{D} \otimes \mathcal{A}_2} (\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$

(b) $\quad \varphi_1 \otimes_{\mathcal{D}} \varphi_2$ は $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ から $\mathcal{L}(\mathcal{E}_{12})$ への準同型写像であり，$\varphi_1 \otimes_{\mathcal{D}} \varphi_2 = \Phi_2 \circ (\varphi_1 \otimes id)$ となる $\mathcal{L}(\mathcal{E}_1) \otimes \mathcal{A}_2$ から $\mathcal{L}(\mathcal{E}_{12})$ への自然な準同型写像 Φ_2 がとれる。

(c) $\quad \mathcal{L}(\mathcal{E}_{12})$ の元 M_j $(j=1,2)$ で，$M_j \geq 0$ $M_1 + M_2 = 1$，かつ

$[M_j, \Phi_2(F_1 \otimes 1)], [M_j, 1 \otimes F_2], [M_j, \varphi_1 \otimes_{\mathcal{D}} \varphi_2(a_1 \otimes a_2)], \gamma_g(M_j) - M_j, M_j a_j \in \mathcal{C}(\mathcal{E}_{12})$

$(a_j \in \mathcal{A}_j\ (j=1,2),\ g \in G)$ を満たすものに対して，

$$F_1 \#_{\mathcal{D}} F_2 = M_1^{1/2} \Phi_2(F_1 \otimes 1) + M_2^{1/2}(1 \otimes F_2) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_{12})$$

とおくと，$x_1 \otimes_{\mathcal{D}} x_2 = [\mathcal{E}_{12}, \varphi_1 \otimes_{\mathcal{D}} \varphi_2, F_1 \#_{\mathcal{D}} F_2] \in KK_G(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ は M_j の取り方に依らない。この写像 $\otimes_{\mathcal{D}}$ について (i)～(iii) が成り立つ。ただし，γ_g は $g \in G$ の $\mathcal{E}_{12}$ 上への作用の $\mathcal{L}(\mathcal{E}_{12})$ への持ち上げを意味する。

この積に関して，次の重要な結果がある。

<u>命題 5.</u> $\mathcal{A}, \mathcal{D}_j$ $(j=1,2)$ を可分な C^*-代数，$\mathcal{B}$ を C^*-代数とする。

もし $\alpha\otimes_{\mathcal{D}_2}\beta = 1_{\mathcal{D}_1}$ を満たす $\alpha\in KK_G(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$, $\beta\in KK_G(\mathcal{D}_2,\mathcal{D}_1)$ が存在すれば, $\gamma=\beta\otimes_{\mathcal{D}_1}\alpha$ は環 $KK_G(\mathcal{D}_2,\mathcal{D}_2)$ のベキ等元になり, $KK_G(\mathcal{A},\mathcal{B}\otimes\mathcal{D}_1)$ から $KK_G(\mathcal{A},\mathcal{B}\otimes\mathcal{D}_2)$ への準同型写像 $\otimes_{\mathcal{D}_1}\alpha$ は1対1写像である。更に $\otimes_{\mathcal{D}_1}\alpha$ の像 $Im(\otimes_{\mathcal{D}_1}\alpha)$ は

$$Im\,\gamma = \{\, x\in KK_G(\mathcal{A},\mathcal{B}\otimes\mathcal{D}_2) \mid x\otimes_{\mathcal{D}_2}\gamma = x \,\}$$

に一致する。同様に, $\otimes_{\mathcal{D}_2}\beta$ は $KK_G(\mathcal{A},\mathcal{B}\otimes\mathcal{D}_2)$ から $KK_G(\mathcal{A},\mathcal{B}\otimes\mathcal{D}_1)$ への上への準同型写像であり, その核 $Ker(\otimes_{\mathcal{D}_2}\beta)$ は

$$Ker\,\gamma = \{\, x\in KK_G(\mathcal{A},\mathcal{B}\otimes\mathcal{D}_2) \mid x\otimes_{\mathcal{D}_2}\gamma = 0 \,\}$$

に一致する。そして

$$KK_G(\mathcal{A},\mathcal{B}\otimes\mathcal{D}_2) = Im\,\gamma \oplus Ker\,\gamma$$

が成り立つ。もし $\gamma = 1_{\mathcal{D}_2}$ ならば, $\otimes_{\mathcal{D}_1}\alpha$, $\otimes_{\mathcal{D}_2}\beta$ は同型写像になる。

上記命題5の仮定を満たす $(\mathcal{D}_j, G, \delta_j)_{(j=1,2)}$ 及び α,β は次の様にして作られる： 今 G を従順的連結 Lie 群, G_c をその極大コンパクト部分群とする。 $\xi = T^*(G/G_c)$ を G/G_c 上の余接バンドルとし, $C_\xi(G/G_c)$ を ξ に随伴して決まる Clifford バンドルの断面で, 無限遠点で0になるもの全体の成す C^*環とする。即ち, V を G/G_c 上の G_c での余接ベクトル空間とし, C_V を V から生成される Clifford 環とすると, $C_\xi(G/G_c)$ は G から C_V への連続関数 f で次の条件を満たすもの全体である：

(1) $\quad f(gh) = \sigma_h^{-1} f(g) \qquad (g\in G,\ h\in G_c)$

$$\text{(III)} \qquad \| f(g) \| \to 0 \quad (gG_c \to \infty) ,$$

ただし σは G_c の Vへの余随伴表現 Ad_* の C_V 上への自然な拡張である。今 G/G_c 上の L^2- 調和形式全体 $L^2(\Lambda^*(G/G_c))$ の成す Hilbert 空間を考える。(以下 $\mathcal{H}$と書く) $C_\xi(G/G_c)$ から $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ への準同型写像 φを $\varphi(\omega) = d_\omega + d^*_{\omega^*}$ $(\omega \in \Omega^1(G/G_c))$ を満たすように定義する。ただし, d_ω は ωによる外積作用素を表わし, $d^*_{\omega^*}$ は ωの共役 1−形式 ω^* の外積作用素 d_{ω^*} の共役作用素を意味する。 δを G/G_c 上の滑らかな,台がコンパクトである形式上の外微分とし, $\Delta = \delta\delta^* + \delta^*\delta$ をラプラシアンとする。そのとき $\frac{\delta+\delta^*}{(1+\Delta)^{1/2}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が成り立ち Gの$\mathcal{H}$ 上への作用による $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上への自然な持ち上げに関して G−連続となる。

$$\alpha = \left[\mathcal{H}, \varphi, \frac{\delta+\delta^*}{(1+\Delta)^{1/2}} \right]$$

とおくと, $\alpha \in KK_G(C_\xi(G/G_c), \mathbb{C})$ となる。また $\rho(x)$ を G_c から $x \in G/G_c$ への測地距離とし, $\theta = \frac{\rho\delta\rho}{(1+\rho^2)^{1/2}} \in \Omega^1(G/G_c)$ とおき, $\mathcal{E} = C_\xi(G/G_c)$, $L_\theta f = \theta f$ $(f \in \mathcal{E})$ とすると,

$$\beta = [\ \mathcal{E}, id, L_\theta\ ]$$

は $KK_G(\mathbb{C}, C_\xi(G/G_c))$ となり, $\alpha \otimes_C \beta = 1_{C_\xi(G/G_c)}$ が成り立つ。更に, Gが従順的より, $\gamma = \beta \otimes_{C_\xi(G/G_c)} \alpha = 1_{\mathbb{C}}$ となる。実際,もし $\dim G = 1$ ならば, $G = \mathbb{R}$ 又は T^1 。 γ は $\mathbb{Z}$ 又は $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ のベキ等元より, $\gamma = 1$ 。 $\dim G \leq n$ について $\gamma = 1$ が成り立つと仮定する。もし $\dim G = n+1$ ならば, Gは従順的より,

半単純ならばコンパクトであるから，$\gamma = \beta \otimes_{C_\xi(M)} \alpha = 1$ となるように選べる。半単純でないならば，T^p 又は $\mathbb{R}^q$ に同型である G の正規部分群 N が存在する。$N = T^p$ ならば，$N \subset G_c$ より，$\dim G/N \leq n$ に対して帰納法より $\alpha_{G/N} \in KK_{G/N}(C_\xi(G/G_c), \mathbb{C})$ と $\beta_{G/N} \in KK_{G/N}(\mathbb{C}, C_\xi(G/G_c))$ で $\alpha_{G/N} \otimes_{\mathbb{C}} \beta_{G/N} = 1_{C_\xi(G/G_c)}$，$\gamma_{G/N} = 1_{\mathbb{C}}$ となるものが存在する。$KK_{G/N}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ から $KK_G(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ への自然な準同型写像により結論が成り立つ。$N = \mathbb{R}^q$ ならば，$\alpha_{G_cN} \in KK_{G_cN}(C_\xi(G_cN/G_c), \mathbb{C})$，$\beta_{G_cN} \in KK_{G_cN}(\mathbb{C}, C_\xi(G_cN/G_c))$ で $\gamma_{G_cN} = 1$ なるものをとり，$\alpha'_{G_cN} = i_{G_cN,G} \circ \sigma_{C_W}(\alpha_{G_cN}) \in KK_G(C_\xi(G/G_c), C_\xi(G/G_cN))$，$\beta'_{G_cN} = i_{G_cN,G} \circ \sigma_{C_W}(\beta_{G_cN}) \in KK_G(C_\xi(G/G_cN), C_\xi(G/G_c))$ を考える。ただし，$W = T^*_{G_cN}(G/G_cN)$ であり，$i_{G_cN,G}$ は $KK_{G_cN}(C_\xi(G_cN/G_c) \otimes C_W, C_W)$ [又は $KK_{G_cN}(C_W, C_W \otimes C_\xi(G_cN/G_c))$] から $KK_G(C_\xi(G/G_c), C_\xi(G/G_cN))$ [又は $KK_G(C_\xi(G/G_cN), C_\xi(G/G_c))$] への自然な準同型写像である。これらから，$\alpha = \alpha'_{G_cN} \otimes_{C_\xi(G/G_cN)} \tau_{G/N,G}(\alpha_{G/N})$，$\beta = \tau_{G/N,G}(\beta_{G/N}) \otimes_{C_\xi(G/G_cN)} \beta'_{G_cN}$ とおくと，$\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \beta = 1_{C_\xi(G/G_c)}$，$\gamma = \beta \otimes_{C_\xi(G/G_c)} \alpha = 1_{\mathbb{C}}$ が成り立つ。ただし，$\tau_{G/N,G}$ は $KK_{G/N}(C_\xi(G/G_cN), \mathbb{C})$ [又は $KK_{G/N}(\mathbb{C}, C_\xi(G/G_cN))$] から $KK_G(C_\xi(G/G_cN), \mathbb{C})$ [又は $KK_G(\mathbb{C}, C_\xi(G/G_cN))$] への自然な準同型写像である。

<u>命題 6.</u>　G を従順的連結 Lie 群とし，G_c をその極大コンパクト部分群とする。ξ を G/G_c 上の余接バンドルとすると，$\alpha \in KK_G(C_\xi(G/G_c), \mathbb{C})$，$\beta \in KK_G(\mathbb{C}, C_\xi(G/G_c))$ で，$\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \beta = 1_{C_\xi(G/G_c)}$，

$\beta \otimes_{C_\xi(\mathcal{G}/\mathcal{G}_c)} \alpha = 1_{\mathbb{C}}$ を満たすものが存在する。

注意4. 一般に，従順的連結局所コンパクト群についても命題は成り立つ。

上記命題6により，本節の主結果である次の命題を示すことが出来る：

命題7. $(\mathfrak{A}, \mathcal{G}, \alpha)$ を C^*-力学系とし，$\mathfrak{A}$ を可分な C^*-環，$\mathcal{G}$ を従順的連結 Lie 群とすると，$\tilde{\alpha} \in KK((\mathfrak{A} \otimes C_V) \times_{\alpha \otimes \sigma} \mathcal{G}_c, \mathfrak{A} \times_\alpha \mathcal{G})$，$\tilde{\beta} \in KK(\mathfrak{A} \times_\alpha \mathcal{G}, (\mathfrak{A} \otimes C_V) \times_{\alpha \otimes \sigma} \mathcal{G}_c)$ で，$\tilde{\alpha} \otimes_{\mathfrak{A} \times_\alpha \mathcal{G}} \tilde{\beta} = 1_{(\mathfrak{A} \otimes C_V) \times_{\alpha \otimes \sigma} \mathcal{G}}$，$\tilde{\beta} \otimes_{\mathfrak{A} \otimes C_V \times \mathcal{G}_c} \tilde{\alpha} = 1_{\mathfrak{A} \times_\alpha \mathcal{G}}$ を満たすものが存在する．ただし，$V = T^*_{\mathcal{G}_c}(\mathcal{G}/\mathcal{G}_c)$．

実際，$KK_{\mathcal{G}}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ から $KK(\mathfrak{A} \times_\alpha \mathcal{G}, \mathcal{B} \times_\beta \mathcal{G})$ への自然な準同型写像を考えて，$\mathfrak{A}, \mathcal{B}$ を $C_\xi(\mathcal{G}/\mathcal{G}_c)$，$\mathbb{C}$ に対して適用すると，命題6より結論を得る．

系8. 可分な C^*-環 $\mathcal{B}$ に対して，$KK(\mathcal{B}, \mathfrak{A} \times_\alpha \mathcal{G})$ は $KK(\mathcal{B}, (\mathfrak{A} \otimes C_V) \times_{\alpha \otimes \sigma} \mathcal{G}_c)$ に同型である．

§4. Thom 同型

本節では §2 で扱った葉層 C^*-環の K-理論を §3，系8 を用いて取扱うことにする。

M を局所対称空間の単位球面バンドルとすると，連結半単純 Lie 群 $\mathcal{G}$ の岩沢分解 $\mathcal{G} = KAN$ と，$\mathcal{G}$ の一様格子部分群 Γ について，$M = T_1(\Gamma \backslash \mathcal{G}/K)$ と書ける．M の Horocycle 及び Anosov 葉層

を $\mathcal{F}_H$, $\mathcal{F}_A$ とする。ただし，これらは $\dim A = 1$ の仮定のもとで作られる。系3より，$C^*(M, \mathcal{F}_H)$，$C^*(M, \mathcal{F}_A)$ はそれぞれ $C(\Gamma\backslash G) \times_\rho C_K(A)N$，$C(\Gamma\backslash G) \times_\rho P$ に安定同型である。よって，K-理論 $K(C^*(M, \mathcal{F}_H))$, $K(C^*(M, \mathcal{F}_A))$ は K-理論 $K(C(\Gamma\backslash G) \times_\rho C_K(A)N)$, $K(C(\Gamma\backslash G) \times_\rho P)$ にそれぞれ同型である。

G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ に同型でなければ $C_K(A)$ は K の連結閉部分群になる。そのとき，$C_K(A)N$, P は従順的連結 Lie 群になる。これらの極大コンパクト部分群は $C_K(A)$ であるから，系8より $K(C(\Gamma\backslash G) \times_\rho C_K(A)N)$，$K(C(\Gamma\backslash G) \times_\rho P)$ は $K((C(\Gamma\backslash G) \otimes_{\mathbb{R}} C_V) \times_{\rho\otimes\sigma} C_K(A))$，$V = \mathfrak{n}^*_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{R}} + \mathfrak{n}^*_{\mathbb{R}}$ にそれぞれ同型である。ただし，$\mathfrak{n}^*_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{R}}$ は N, A の Lie 環 $\mathfrak{n}, \mathfrak{a}$ の実双対空間を意味する。もし $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$ ならば，C_V は単純になり $M_{2^n}(\mathbb{R})$ に同型である。$C(\Gamma\backslash G) \cong C(\Gamma\backslash G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$，$M_{2^n}(\mathbb{C}) \simeq M_{2^n}(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ より $C(\Gamma\backslash G) \otimes_{\mathbb{R}} M_{2^n}(\mathbb{R}) \simeq C(\Gamma\backslash G) \otimes_{\mathbb{R}} M_{2^n}(\mathbb{C})$ となる。よって，その双対空間 $(C(\Gamma\backslash G) \otimes_{\mathbb{R}} M_{2^n}(\mathbb{R}))^\wedge$ は $\Gamma\backslash G$ に同一視出来る。今 $\rho\otimes\sigma$ の $\Gamma\backslash G$ への作用 $\hat{\rho}$ を考えると，$\Gamma \cap C_K(A) = \{e\}$ より，自由作用になる。よって $\hat{\rho}$ の $\xi \in \Gamma\backslash G$ での安定群 $C_K(A)_\xi$ は自明になる。$C_K(A)$ はコンパクトであるから，$\rho\otimes\sigma$ は(Fell の意味で)滑らかであるので，竹崎 [6] により $(C(\Gamma\backslash G) \otimes_{\mathbb{R}} M_{2^n}(\mathbb{R})) \times_{\rho\otimes\sigma} C_K(A)$ の双対空間は $\left(\bigcup_{\xi \in \Gamma\backslash G} (C_K(A)_\xi, \omega_\xi)^\wedge\right) / C_K(A)$ に同一視出来る。ただし，$(C_K(A)_\xi, \omega_\xi)^\wedge$ は $C_K(A)_\xi$ の既約な ω_ξ-射影表現の同値類

の全体である。$C_K(A)_\xi = \{e\}$ $(\xi \in \Gamma\backslash G)$ より，$(C(\Gamma\backslash G)\otimes_{\mathbb{R}} M_{2^n}(\mathbb{R}))\times_{\rho\otimes\sigma}$ $C_K(A)$ の双対空間は $\Gamma\backslash G/C_K(A)$ に同一視出来る。

このことより $(C(\Gamma\backslash G)\otimes_{\mathbb{R}} M_{2^n}(\mathbb{R}))\times_{\rho\otimes\sigma} C_K(A)$ は $\Gamma\backslash G/C_K(A)$ 上の連続場の C^*-環 $CF(\Gamma\backslash G/C_K(A), \{\mathcal{C}(\mathcal{H}_\xi)\}_\xi)$ に同型である。特に $\mathcal{H}_\xi$ は $L^2(C_K(A))$ に同型にとれる。(実際，Green [3] の手法を使うと，$\mathcal{H}_\xi = L^2(\xi)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{2^n}$ $(\xi\in\Gamma\backslash G/C_K(A))$ と出来るが，$C_K(A)\approx\xi$ であり，$C_K(A)$ は連結コンパクト群であるから，$\dim\mathcal{H}_\xi = \aleph_0$ となる。) $\Gamma\backslash G$ は主 $C_K(A)$-バンドル ($\Gamma\backslash G/C_K(A)$ 上の) となるから，*Dixmier-Douady* [2] より $\xi\in\Gamma\backslash G/C_K(A)\longmapsto\mathcal{H}_\xi$ は自明な *Hilbert* 空間の連続場である。よって *Dixmier-Douady* [2] より，$CF(\Gamma\backslash G/C_K(A), \{\mathcal{C}(\mathcal{H}_\xi)\}_\xi)$ は $C(\Gamma\backslash G/C_K(A))\otimes\mathcal{C}(L^2(C_K(A))\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{2^n})$ に同型になる。だから $K(C^*(M,\mathcal{F}_H))$ (又は $K(C^*(M,\mathcal{F}_A))$) は，$V=\mathfrak{n}_{\mathbb{R}}^*$ (又は $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^*+\mathfrak{n}_{\mathbb{R}}^*$) が偶数次元の実ベクトル空間ならば，$K(\Gamma\backslash G/C_K(A))$ に同型である。即ち，$K(M)$ は $K(C^*(M,\mathcal{F}_H))$ (又は $K(C^*(M,\mathcal{F}_A))$) に同型である。$K(C^*(M,\mathcal{F}_A))$ は $K^{\dim A}(C^*(M,\mathcal{F}_H))$ に同型であるから，$\dim\mathcal{F}_A=\dim AN$, $\dim\mathcal{F}_H=\dim N$ を使うと，もし $C_K(A)$ が連結 ($G\not\simeq SL(2,\mathbb{R})$) ならば，$K(C^*(M,\mathcal{F}))$ は $K^{\dim\mathcal{F}}(M)$ ($\mathcal{F}=\mathcal{F}_H, \mathcal{F}_A$) に同型である。もし $G\simeq SL(2,\mathbb{R})$ ならば，$G=\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})/\Delta$ と書ける。ただし，$\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ は $SL(2,\mathbb{R})$ の普遍被覆群であり，Δ は G の基本群で $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ の中心の部分群であ

る。$G=KAN$ を G の岩沢分解とすると，$\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})=\widetilde{K}AN$ なる $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ の岩沢分解をとると，$K=\widetilde{K}/\Delta$ となる。$SL(2,\mathbb{R})=SO(2,\mathbb{R})\cdot\mathbb{R}\cdot\mathbb{R}$ という形より，$\widetilde{K}$ は $SO(2,\mathbb{R})$ の普遍被覆群となる。$SO(2,\mathbb{R})$ の基本群は $\mathbb{Z}$ であるから，$\Delta=\pi_1(G)=\pi_1(K)$ は $\mathbb{Z}$ の部分群になる。$C_{SO(2,\mathbb{R})}(\mathbb{R})=\mathbb{Z}_2$ となり $SL(2,\mathbb{R})$ の中心である。同様にして $C_K(A)$ は G の中心の部分群となる。よって $C(\Gamma\backslash G)\times_\rho P$，$C(\Gamma\backslash G)\times_\rho C_K(A)N$ は $(C(\Gamma\backslash G)\times_\rho C_K(A))\times_{\tilde{\rho}}AN$，$(C(\Gamma\backslash G)\times_\rho C_K(A))\times_{\tilde{\rho}}N$ にそれぞれ同型である。ただし，$\tilde{\rho}=\rho\otimes id$ である。Connes の Thom 同型定理 (I) より，$K(C^*(M,\mathcal{F}_H))$, $K(C^*(M,\mathcal{F}_A))$ はそれぞれ $K^{\dim N}(M)$, $K^{\dim AN}(M)$ に同型となる。よって次の結果を得る：

<u>定理 9.</u> $\mathcal{F}_H$, $\mathcal{F}_A$ を局所対称空間の単位球面バンドル M の Horocycle, Anosov 葉層とすると，

$$K(C^*(M,\mathcal{F}))\simeq K^{\dim\mathcal{F}}(M)\qquad(\mathcal{F}=\mathcal{F}_H,\mathcal{F}_A)$$

が成り立つ。

<u>注意 5.</u> $K(M)=K(T_1(\Gamma\backslash G/K))$ は Thom-Gysin 完全系列により計算される。

文献

[1] A. Connes, An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C^*-algebra by an action of $\mathbb{R}$, Advances.

Math., 39 (1981), 31—55.

[2] J. Dixmier — A. Douady, Champs continus d'espaces Hilbertiens et de C^*-algèbres, Bull. Soc. Math. France., 91 (1963), 227 - 284.

[3] P. Green, C^*-algebras of transformation groups with smooth orbit space, Pacific J. Math., 72 (1977), 71—97.

[4] G. G. Kasparov, K - theory, group C^*-algebras and higher signatures, Preprint (1981).

[5] T. Natsume — H. Takai, Connes algebras associated to foliated bundles, Preprint, Univ. Roma (1982).

[6] M. Takesaki, Covariant representations of C^*-algebras and their locally compact automorphism groups, Acta. Math., 119 (1967), 273—303.

[7] P. Tomter, On the classification of Anosov flows, Topology., 14 (1975), 179—189.