

C*環と K 理論

横浜市大 中神 祥臣 (Yoshiomi Nakagami)

1. まえがき 環または C*環のカテゴリーから可換群のカテゴリーへの K フ ン ク タ ー を定義して, 環または C*環のもつ特徴を K 群の性質を用いて調べるのが K 理論の目的である. とくに対象が環, C*環または可換 C*環のどれであるかにより, それぞれ代数的 K 理論, C*環の K 理論または位相的 K 理論という. これらの間には

$$\begin{array}{ccccc} \text{代数的 K 理論} & \supset & \text{C*環の K 理論} & \supset & \text{位相的 K 理論} \\ \text{(代数幾何)} & & \text{(作用素環)} & & \text{(代数的位相幾何)} \\ \text{Grothendieck} & & ? & & \text{Atiyah-Hirzebruch} \end{array}$$

の関係があるが, C*環の K 理論は広い意味での位相的 K 理論と解釈するのが自然である (バナッハ環の K 理論もある).

代数的 K 理論や位相的 K 理論は Riemann-Roch 型の定理を定式化する中で生み出され, 既に二十数年の歴史をもつ. C*環の K 理論に関しては, 古くは Atiyah, Breuer, Coburn, Douglas, Singer 等の仕事や, 漸く後の Kasparov による K ホモロジーの定義 (1973), BDF 理論 (1973~7), Elliott の次元

群の定義(1976)などあり、だが、本格的に始まったのは Connes [4], Cuntz [5], Kasparov [6], Pimsner-Voiculescu [7] 等の仕事が出始めた頃からであり、ここ2, 3年の活況が自覚される。ここでは便宜上、これまで得られた成果を三つに大別してみる。

1.1 まず、 K 群を C^* 環の代数的不変量として求めたものの代表例を表にする。

C^* 環	K^0 群	K^1 群	K_0 ホモロジー	K_1 ホモロジー
AF環	次元群	0		
Cuntz環 O_n ($n \geq 2$)	$\mathbb{Z}/(n-1)$	0	$\mathbb{Z}/(n-1)$	0
O_∞	\mathbb{Z}	0	0	\mathbb{Z}
Cuntz-Krieger環 O_A	$\mathbb{Z}^n/(1-A)\mathbb{Z}^n$	$\text{Ker}(1-A)$	$\mathbb{Z}^n/(1-A)\mathbb{Z}^n$	$\text{Ker}(1-A)$
無理数回転環 A_θ	\mathbb{Z}^2	\mathbb{Z}^2		
被約群 C^* 環, $G = F_n$ ($n \geq 2$)	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}^n	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}^n
$G = \mathbb{Z}/m * \mathbb{Z}/m$	\mathbb{Z}^{n+m-1}	0	\mathbb{Z}^{n+m-1}	0
葉層 C^* 環, $(V, F) = (\mathbb{T}^2, \text{Fol I})$ ^{注1}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}		
$(V, F) = (\mathbb{T}^2, \text{Fol II})$ ^{注1}	\mathbb{Z}^2	\mathbb{Z}		
群 C^* 環, G : 単連結, 可解 n -群	$\begin{cases} \mathbb{Z} & (\dim G = \text{偶}) \\ 0 & (= \text{奇}) \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & (\dim G = \text{偶}) \\ \mathbb{Z} & (= \text{奇}) \end{cases}$		
G : Heisenberg群 ($\dim G = \text{奇}$)	0	0		\mathbb{Z}^2
G : 運動群	自由可換群	0		
$G = \text{SL}(2, \mathbb{C})$	0	無限階自由群		

1.2 つぎに, 各種の未解決な問題を K 群を用いて解決した例をあげる.

1.2.1 (Kaplansky の問題) 単純 C^* 環で自明でない射影元をもたないものがあるか? Blackadar は K 理論と無関係に単位的 C^* 環の例を作り肯定的に解決. その後 K 理論を用いて Connes, Cuntz, Pimsner-Voiculescu 等が各種の例を作った. 葉原 C^* 環の場合には, この問題と葉原多様体の等価性に関する横断的閉部分多様体の存在問題がほぼ同内容になる. 注2

1.2.2 (Kadison の予想) 単純 C^* 環 $C_{red}^*(F_n)$ は自明でない射影元をもたない. Cuntz, Pimsner-Voiculescu が K 理論を用いて肯定的に解決.

1.2.3 AF 環の AF 環による拡大は AF 環か? Brown は K ホモロジーを用いて肯定的に解決.

1.2.4 Weighted shift の分類に成功.

以上は C^* 環固有の問題であったが, 他分野とも関連したものととしては

1.2.5 (Kirillov, Fell 等の問題) 3次元 Heisenberg 群 G に対し, 完全系列 $0 \rightarrow C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \otimes K \rightarrow C^*(G) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow 0$ は分裂するか? Kasparov により肯定的に解決.

1.2.6 (Novikov の予想) C^∞ 多様体 X の higher signature はホモトピー不変である. Mishchenko と Kasparov はこれを証明した.

に, 分類空間 BG の K フังก์ターを用いて, 予想が肯定的である多様体の例を作っている. Kasparov は $\pi_1(X)$ が連結一群の離散部分群に含まれていれば肯定的なことを示した.

1.3 最後に, Atiyah-Singer 型の定理に使われている例をあげる. 指数定理には各種のものがあるが, 一般に指数は整数値とは限らず, 適当な C^* 環の K 群に値をとることが多い.

1.3.1 (Connes) 葉層多様体 (V, F) の葉の空間 V/F を調べるために普通は, 横断測度をを用いて指数定理を定式化するが, 横断測度が存在しないときや, 存在しても指数が零に成ってしまう場合には, K 群を用いた定式化が考えられる. 例として C^∞ 多様体に単連結可解群が自由に作用しているときなどはうまく行き, 一般の葉層構造に対しても成立が予想されている. これにより 1.2.1 を解決.

1.3.2 (Connes-Moscovici) 等質空間 G/H 上の G 不変微分作用素 P により与えられる方程式 $Pu=0$ の L^2 解は既約離散系列の有限和であることを示している.

1.3.3 (Baum-Douglas) K ホモロジーを用いて各種指数定理の統一化の試み.

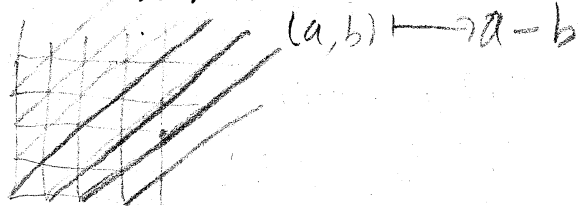
1.3.4 (Mischenko-Fomenko) ある多様体に対する Novikov の予想の解決. 1.2.6 参照.

1.3.5 (Connes) 非可換微分幾何への応用. これを用いて

例 - Chern 類の値の整数値であること や, 微分差分方程式の自明でない解を持つことなどが議論できる.

以上でわかるように C^* 環の K 理論を研究する動機にはいろいろの事があるが, 今後, C^* 環の位相的性質の研究, 各種指数定理を用いた研究, 表現論への応用, 非可換微分幾何や微分差分方程式の研究などが期待される. なお, 非可換微分幾何の重要性は境界によりとも提唱されている. (コンパクト)多様体 V の接ベクトル場 $X \in TV$ は可換 C^* 環 $C(V)$ 上の非有界微分子である. A_θ 上の微分子の形をきめた高井氏の仕事が Connes の例と一致していることは興味深い.

(a, b)



2. K群の定義

2.1 可換半群 H から可換群 G を $(H \times H)/D$ ($D = \{(h, h) : h \in H\}$) により作る. $j(h) = \{(h+h', h) : h' \in H\}$ とすれば, j は H から G への準同型写像である. H から可換群への準同型写像のうちで, こゝで作った (G, j) は普遍性を満たすので, G を H の Grothendieck 群 と言う. 定義より直ちに

$$j(h) = j(h') \iff \exists h_2 \in H : h + h_2 = h' + h_2$$

可換半群 H_1, H_2 の Grothendieck 群をそれぞれ G_1, G_2 とする: $H_i \xrightarrow{j_i} G_i$ ($i=1, 2$). 準同型写像 $\varphi: H_1 \rightarrow H_2$ があるとすれば, (G_1, j_1) の普遍性を用いて G_1 から G_2 への準同型写像 $\hat{\varphi}$ が導かれる: $\hat{\varphi} \circ j_1 = j_2 \circ \varphi$. このとき φ が全射ならば, $\hat{\varphi}$ も全

射である。たとえば, $H = \mathbb{N}^n$ ならば, $G = \mathbb{Z}^n$ である。

2.2 単位的 C^* 環 A と無限次元可分ヒルベルト空間上のコンパクト作用素の全体 K とのテンソル積 $A \otimes K$ の射影元全体 $\text{Proj}(A \otimes K)$ を Murray-von Neumann の同値関係で割, $T = \text{Proj}(A \otimes K) / \sim$ (つまり, $\text{Proj}(A \otimes K)$ の連結成分の全体) は加法

$$[e_1] + [e_2] = [e_1' + e_2'] \quad \text{if } e_1 \sim e_1', e_2 \sim e_2', e_1' e_2' = 0$$

により可換半群になる。この半群の Grothendieck 群を A の K 群 または K^0 群 とし, $K(A)$ または $K^0(A)$ と書く。^{注3}

$$j([e_1]) = j([e_2]) \iff \exists [e] : [e_1 + e] = [e_2 + e]$$

二つの単位的 C^* 環 A, B の間の準同型写像 $\varphi: A \rightarrow B$ は自然に K 群の間の準同型写像 $\varphi_*: K(A) \rightarrow K(B)$ を導く。つまり, K は共変ファンクターである。

一般に, C^* 環 A に単位元 1 を加して得られる単位的 C^* 環を A^\sim とすれば, $0 \rightarrow A \rightarrow A^\sim \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} \rightarrow 0$ は C^* 環の完全系列で, φ は分裂している。したがって

$$K(A^\sim) = \text{Ker}(\varphi_*) \oplus K(\mathbb{C})$$

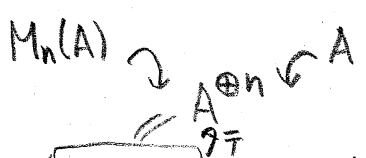
となる。ここで A の K 群 (または K^0 群) を改めて $\text{Ker} \varphi_*$ により定義する。

A が単位的であれば, 前のものと一致する。今後 $j([e]) \in [e]$ と記す。

例. $K(\mathbb{C}) = K(K) \cong \mathbb{Z}, \quad K(\mathcal{L}(H)) = 0$

2.2.1 $n \times n$ 行列全体 $M_n = M_n(\mathbb{C})$ の増加列の間に $x \in M_n \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}$ のような埋藏を考えると, $K = \varinjlim M_n$ である。単位的 C^* 環に対し次のような半群同型対応がある:

$$\text{Proj}(K \otimes A) / \sim \longleftrightarrow \varinjlim \text{Proj}(M_n \otimes A) / \sim \longleftrightarrow (\text{有限生成射影的 } A \text{ 加群全体}) / \cong$$



ここで、バナハ空間 $\underbrace{A \oplus \dots \oplus A}_n$ は $n \times n$ 行列 $M_n(A)$ が作用する自由 A 加群である。
 (したがって、 $M_n(A)$ の射影元 e に対し、射影的 A 加群 $e(A \oplus \dots \oplus A)$ が対応している。

2.2.2 X がコンパクトで、 $A = C(X)$ の場合には、位相的 K 理論の K 群 $K(X)$ と C^* 環の K 群 $K(C(X))$ は一致する。さらに、代数的 K 理論の K 群とも一致

$$(有限生成射影的 C(X) 加群全体) / \cong \leftrightarrow Vect(X) / \sim$$

$$\leftrightarrow X \text{ 上の連続ヒルベルト場 } \alpha \text{ の同値類の全体}$$

X が局所コンパクトなときは、 $C(X \text{ 以外}) \cong C_0(X) \sim$ であるから、 $K(X) = K(C_0(X))$ 。

2.3 $(A \sim \otimes K) \sim$ の U -タリ元全体 $U((A \sim \otimes K) \sim)$ は乗法群になる。これを、その単位元の連結成分 $U_0((A \sim \otimes K) \sim)$ で割って得られる群 (すなわち、 $U((A \sim \otimes K) \sim)$ の連結成分の全体) を A の K^1 群 とし、 $K^1(A)$ と表す。 A が単位的なときは $A \sim$ のかわりに A を用いて定義してもよい。一般には、 $K^1(A) = K^1(A \sim)$ 。注3

例 $K^1(\mathbb{C}) = K^1(K) = 0$, $K^1(\mathbb{Z}) = 0$ (Kuiper)

2.3.1 $n \times n$ U -タリ行列 $U(n)$ の列の中に $u \in U(n) \mapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in U(n+1)$ のような埋蔵を行えば、 $U(\text{代数的 } \varinjlim M_n) = \varinjlim U(n)$ となる。したがって、単位的 C^* 環 A に対しては、次の同型対応がある:

$$K^1(A) = U((A \otimes K) \sim) / U_0((A \otimes K) \sim) \leftrightarrow \varinjlim U(n, A) / U_0(n, A) \leftrightarrow \varinjlim GL(n, A) / GL_0(n, A)$$

$$\leftrightarrow \varinjlim \pi_0(GL(n, A))$$

例 $K^1(C(X)) = H^1(X, \mathbb{Z}) = [X, \mathbb{C}^*]$ (1次元トポロジ-群)

2.3.2 二つの単位的 C^* 環の間の準同型写像 $\varphi: A \rightarrow B$ は自然な準同型写像 $\varphi_*: K^1(A) \rightarrow K^1(B)$ を導く。

2.4 C^* 環 A に実構造、つまり、 A 上の写像 $a \mapsto a^*$ で

$$(i) (ma + b)^- = \bar{m} a^- + b^- \quad (m \in \mathbb{C})$$

$$(ii) (a^-)^- = a$$

$$(iii) (ab)^- = a^- b^-$$

$$(iv) (a^*)^- = (a^-)^*$$

をみたすものを与え、これにより不変なものへの議論を制限すれば、実ベクトル束に対応するK理論も得られる。

2.5 コンパクト群 G と C^* 系 (A, G, α) に対して、 G の $A \otimes K(L^2(G)) \otimes K$ への作用 $\tilde{\alpha}$ を $\tilde{\alpha}_t = \alpha_t \otimes \rho_t \otimes \text{id}$ とする。ただし、 ρ は G の右正則表現が与えられる K 上の作用である。このとき、 $\text{Proj}((A \otimes K(L^2(G)) \otimes K)^{\tilde{\alpha}}) / \sim$ の Grothendieck 群を Equivariant K群 とし、 $K_G(A)$ と書く。 $A = C(X)$ のときは、 $K_G(A) = K_G(X)$ である。 $K_G(A) \cong K(A \rtimes_r G)$ が成り立っている。

3. K群の基本的性質 K群を具体的に求めるときに使う性質のうちで代表的なものを幾つかあげておく。なかでも、ホモトピー不変性、六項完全系列、Bottの周期性が成り立つことは、K理論が一般コホモロジー理論であることを示している。連続性はホモトピー不変性と関連した性質であるし、Mayer-Vietorisの完全系列は六項完全系列とほぼ同値な内容である。最も大切なものがThom同型である。これはBottの周期性を一般化したものであって、 \mathbb{Z} の接合積に関する六項完全系列と同値である。3.1~3.8のうちで接合積と関係した3.6, 3.7以外はBanach環でも証明されている。

3.1 連続性 $K(\varinjlim A_n) = \varinjlim K(A_n)$

3.2 ホモトピー不変性 C^* 環 A, B に対し、 $\varphi = \{\varphi_t : t \in [0, 1]\}$ を $[0, 1]$ から $\text{Hom}(A, B)$ への連続写像とすれば、K群の準同型写像として、 $(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_*$ 。

3.3 半完全系列 C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow J \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\varphi} A \rightarrow 0$ に対し系列 $K^0(J) \xrightarrow{\iota_*} K^0(E) \xrightarrow{\varphi_*} K^0(A)$, $K^1(J) \xrightarrow{\iota_*} K^1(E) \xrightarrow{\varphi_*} K^1(A)$ はともに完全である。

証明 3.5の終りで必要となる K 群の完全性のみを示す。 K^0 群に対しは Bott の周期性が示された時点で、自働的にわかる。 E は単位元 e を持つと仮定する。
 $v \in J^\sim$ は $w + \lambda 1$ ($w \in J$) と表せるので、 $\varphi_* (\iota_* [v]) = [\lambda] = 0$ 。 逆に、 $[u] \in \text{Ker } \varphi_*$ とす。 $\varphi_* ([u]) = 0$ であるから、 $\varphi(u) \in U_0((K \otimes A)^\sim)$ 。 したがって、 $\varphi(u') = \varphi(u)$ をみたす $u' \in U_0((K \otimes E)^\sim)$ がある。 $[u] = [u'^* u]$ である。 再び、 $\varphi(u'^* u) = 1$ であるから、 $v' \equiv u'^* u \in J^\sim$ 。 したがって、 $\iota_* ([v]) = [v'^* u] = [u]$ 。

3.4 Index 写像 δ C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow K \rightarrow \mathcal{L}(f) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{Q}(f) \rightarrow 0$ に対し、 $\varphi^{-1}(GL(\mathcal{Q}(f)))$ は f 上の Fredholm 作用素の全体と一致する。 λ は λ 元 x に対し、 $\text{ind}(x) = \dim(\text{Ker } x) - \dim(\text{Coker } x) \in \mathbb{Z}$ が指数 (index) である。 これを抽象化して $K^1(\mathcal{Q}(f))$ から $K^0(K) \cong \mathbb{Z}$ への写像 δ を作りた。 もっと一般に次の補題が成り立つ。 δ のことを Index 写像 または Connecting 写像 といい。

補題 C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow J \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\varphi} A \rightarrow 0$ に対し、 $K^1(A)$ から $K^0(J)$ への準同型写像 δ が存在して、 $K^1(E) \xrightarrow{\varphi_*} K^1(A) \xrightarrow{\delta} K^0(J) \xrightarrow{\iota_*} K^0(E)$ が完全系列になる。

証明の概略。 E が単位元を持つ場合の δ の構成: $0 \rightarrow J \otimes M_n \xrightarrow{\iota \otimes \text{id}} E \otimes M_n \xrightarrow{\varphi \otimes \text{id}} A \otimes M_n \rightarrow 0$ は完全である。 同様の完全系列が M_n がかわりに K に対しても成り立つ。 $[u] \in K^1(A)$ に対し、 $u \in U(A \otimes M_n)$ と仮定する。 $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix} \in U_0(A \otimes M_{n+m})$ とするよりの $u' \in U_0(A \otimes M_n)$ (たとえば、 $u' = u^*$ とすればよい)。 この場合には、 $(\varphi \otimes \text{id})(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix}$ とする $v \in U_0(E \otimes M_{n+m})$ がある。 $v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*$ は $\varphi \otimes \text{id}$ の核に入るから、 $J \otimes M_n \subset J \otimes K$ の元である。 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $J \otimes K$ の元であるから、 $v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \in J \otimes K$ 。 したがって、 $[v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*] - [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}] \in K^0(J \otimes K)$ 。

実は、これは $K^0(J)$ の元である。実際、完全系列 $0 \rightarrow J \otimes K \rightarrow J \sim \otimes K \xrightarrow{\varphi \otimes \text{id}} C \otimes K \rightarrow 0$ を考えれば、 $\psi_*([v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*] - [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}]) = 0$ 。そこで、 $K'(A)$ から $K^0(J)$ への Index 写像を $\delta([u]) = [v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*] - [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}]$ で定義する。これが Well defined であることを検証する際に、上記 u' とした u^* にしたからたまたま生じてくる。 δ が準同型写像であることは $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて示される。

$K'(A)$ における完全性: $[w] \in K'(E)$ に対し $u, v \in \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^* \end{pmatrix}$ とすれば、 $\delta \circ \varphi_*([w]) = [v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*] - [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}] = 0$ 。逆に、 $\delta([u]) = [v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*] - [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}]$ が 0 ならば、 $J \sim \otimes K$ において $v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。 L は $0 \rightarrow J \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ に対し、 $w \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0_{n+k} \end{pmatrix}$ 。 $\begin{pmatrix} v^* & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix} w^* = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0_{n+k} \end{pmatrix}$ となる $w \in U(J \sim \otimes M_{n+n+k})$ がある。ゆえに、 $w \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix}$ は $v_1 \in E \otimes M_n$ により $\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}$ と表せる。 L は $0 \rightarrow J \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ に対し、 $(\varphi \otimes \text{id})(v_1) = u$ 、すなわち、 $\varphi_*([u]) = [u]$ 。

$K^0(J)$ における完全性: $L_*([v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^*]) = L_*([\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}])$ であるから、 $L_* \circ \delta = 0$ 。逆に、 $L_*([e] - [1_n]) = 0$ ならば、 $\begin{pmatrix} l(e) & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$ 。 L は $0 \rightarrow J \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ に対し、 $v \begin{pmatrix} l(e) & 0 \\ 0 & 1_{n+k} \end{pmatrix} v^* = 1_{n+n+k}$ となる $v \in U(E \otimes M_{n+n+k})$ がある。 $u = (\varphi \otimes \text{id})(v)$ とすれば、 $\delta([u]) = L_*([e] - [1_n])$ 。

E が単位元をもたないとき: C^* 環の系列 $0 \rightarrow J \xrightarrow{L} E \rightarrow A \rightarrow 0$ が完全になるときの系列 $K'(E) \rightarrow K'(A) \xrightarrow{\delta} K^0(J) \rightarrow K^0(E)$ は完全である。 $K^0(E) = K^0(E) \oplus \mathbb{Z}$ であるが、 $L: J \rightarrow E$ は単射であるから、 L_* の像は $K^0(E)$ に直交する。

例 $J = K, E = \mathcal{L}(f), A = \mathcal{Q}(f)$ ならば、 $K^0(\mathcal{L}(f)) = K'(\mathcal{L}(f)) = 0$ であるから、 $K'(\mathcal{Q}(f)) \cong K^0(K) \cong \mathbb{Z}$ 。

3.4.1 $K'(A) \cong K^0(A \otimes C_0(\mathbb{R}))$

単位区間 $I = [0, 1]$ 上の $C_0(I) = \{f \in C(I) : f(0) = f(1) = 0\}$ とすれば、 $A \otimes C_0(\mathbb{R}) \cong$

$A \otimes C_0(\mathbb{I})$. これを A の懸垂 (Suspension) といい SA と書き, $A \otimes \{f \in C(\mathbb{I}) : f(0) = 0\}$ を A の錐 (Cone) といい CA と書けば, C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow SA \rightarrow CA \rightarrow A \rightarrow 0$ を得る. \therefore これは, $a \in CA$ の CA/SA における剰余類と A における $a(1)$ と \mathbb{E} 同視していい. 一般に, (CA) の元 a はホモトピー $\{ \varphi_t : t \in [0, 1] \} : (\varphi_t a)(s) = Q(ts) \ (s \in \mathbb{I})$ により可縮 (Contractible) であるから, $K(CA) = 0, K'(CA) = 0$ である. \therefore 3.4.9 補題を上記の完全系列に適用すれば, 3.4.1 が得られる.

3.5 Bottの周期性 $S^2A = S(SA)$ とすれば, $K^i(S^2A) = K^i(A) \ (i=1, 2)$.
これを示すには 3.4.1 とよく似た次の式を示せばいい.

3.5.1 $K^0(A) \cong K^1(A \otimes C_0(\mathbb{R}))$

3.4.1 の証明に倣って, この証明には技巧が要求される. \therefore これは Atiyah [3] の方法を用いる. まず, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$ の上の $C_0(\mathbb{T}) = \{f \in C(\mathbb{T}) : f(1) = 0\}$ と $C_0(\mathbb{R})$ \mathbb{E} 同視して, $K^0(A) \cong K^1(A \otimes C_0(\mathbb{T}))$ を示すことにする.

証明の概略. A が単位元をもたずるとき: (i) $Q_n(A) = \{a \in M_n(A) : a = a^*, Sp(a) \in \mathbb{Z}\}$ と定義 $a \in Q_n(A) \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Q_{n+1}(A)$ を考え. $a \in \bigcup_{|j| \leq \|a\|} Q_n(A)$ の右ノルム分解 $a = \sum_{|j| \leq \|a\|} j e_j$ に対して, $[a] = \sum_{|j| \leq \|a\|} j [e_j]$ とすれば, $K^0(A) \cong \varinjlim Q_n(A) / \sim$.

(ii) $K^1(SA) = K^1((SA)^\sim) \Rightarrow$ 考える $(SA)^\sim$ は $\{f \in A \otimes C(\mathbb{T}) : f(1) \in \mathbb{C}\}$ と同視できる. \therefore $(SA)^\sim$ の元は Stone-Weierstrass 定理により, Laurent 多項式 $z \in \mathbb{T} \mapsto \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^j a_j \in A$ により一様近似される. 同様のことは $(SA)^\sim$ の n 次行列 $M_n((SA)^\sim)$ に対してもいえる. \therefore $K^1(SA) = \varinjlim U(M_n((SA)^\sim)) / U_0(M_n((SA)^\sim))$.

(iii) (Exponential 写像) (i) の右ノルム分解 $a = \sum j e_j \in M_n(A)$ に対して, $e^{2\pi i t a} = (1 - e_0) + \sum_{|j| \leq \|a\|} e^{2\pi i t j} e_j \ (t \in [0, 1])$ である. $\mathbb{T} \cong [0, 1]$ とすれば, これは (ii) の元 $\delta(a)$

$$\begin{aligned} \exp(2\pi i t a) &= 1 + \frac{2\pi i t}{1} e_j + \frac{(2\pi i t)^2}{2} e_j^2 + \dots \\ &= (e^{2\pi i t} - 1) e_j + 1 = e^{2\pi i t} e_j + (1 - e_j) \end{aligned}$$

$z \in \mathbb{T} \mapsto (1 - e_0) + \sum z^j e_j \in M_n(A)$ と見なすことによりできた. $\delta(a) \in M_n((SA)^\sim)$ である.

(iv) 対応 $[a] \in K^0(A) \mapsto [\delta(a)] \in K^1(SA)$ が well defined であること, 同型写像であることを示す. 後者を示すには, Laurent 多項式を二つの Taylor 多項式の差として表し, $\text{Proj}(K \otimes A)$ から $U(K \otimes (SA)^\sim)$ の Taylor 多項式全体の対応を付ける. その際, Atiyah の方法を用いると, 多項式の 1 次式の計算に帰着できる.

(v) (Atiyah のように) Taylor 多項式 $z \in \mathbb{T} \mapsto \sum_{j=0}^n z^j a_j \in A$ を考える. 基本変形を繰り返して

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ z & 1 & & \\ & z & & \\ & & \ddots & \\ & & & z & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} - z a_n & a_n \\ z & 1 & & & \\ & z & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & z & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} - z a_n & 0 \\ z & 1 & & & \\ & z & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & z & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^n z^j a_j & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

最初の行列は $M_{n+1}(A)$ の値をもつ 1 次式であり, 最後は A に値をもつ n 次多項式である.

これを用いると (iv) の対応が 1 対 1 であることをわかる.

A が単位元をもたないとき: 次の完全系列より明らかである.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K^1(A \otimes C_0(\mathbb{R})) & \rightarrow & K^1(\hat{A} \otimes C_0(\mathbb{R})) & \rightarrow & K^1(C_0(\mathbb{R})) \rightarrow 0 \\ & & & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & K^0(A) & \rightarrow & K^0(\hat{A}) & \rightarrow & K^0(\mathbb{C}) \rightarrow 0 \end{array}$$

3.6 六項完全系列 C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow J \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\varphi} A \rightarrow 0$ に対し次の

$$\begin{array}{ccccc} K^0(J) & \xrightarrow{\iota_*} & K^0(E) & \xrightarrow{\varphi_*} & K^0(A) \\ \uparrow \sigma & & \uparrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ K^1(A) & \xleftarrow{\varphi_*} & K^1(E) & \xleftarrow{\iota_*} & K^1(J) \end{array}$$

完全系列の成り立つ

3.4 の補題, 3.4.1, 3.5.1 を完全系列 $0 \rightarrow J \otimes C_0(\mathbb{R}) \rightarrow E \otimes C_0(\mathbb{R}) \rightarrow A \otimes C_0(\mathbb{R}) \rightarrow 0$ に適用し, 3.3 を用いればよい.

3.7 Thom 同型 $K^0(A) \cong K^1(A \times \mathbb{R}), K^1(A) \cong K^0(A \times \mathbb{R})$

d が自明な作用のときは, $A \times \mathbb{R} \cong A \otimes C_0(\mathbb{R})$ であるから, 3.4.1 と 3.5.1 と同内容である.

Connes による証明の外にも, Rieffel, Elliott 等のものがある. いずれも方針は同じである.

証明の方針. まず $A = \mathbb{C}$ の場合を考察し, $K^1(C^*(\mathbb{R}))$ の生成元を求め $(\mathbb{C} \times \mathbb{R} =$

$C^*(\mathbb{R}) \cong C_0(\mathbb{R})$. $C^*(\mathbb{R}) \cong C_0(\mathbb{T})$, $C_0(\mathbb{T}) \cong C(\mathbb{T})$ であるから, Bott の周期性
 と同型対応 3.5.1 により, $K^0(\mathbb{C}) \cong K^1(C(\mathbb{T}))$. 1次元の射影元 e に対応する $K^0(\mathbb{C})$ の元
 $[e]$ は $K^0(\mathbb{C})$ の生成元である. 3.5.1 の証明より, $[e]$ に対応する $K^1(C(\mathbb{T}))$ の元 $z \mapsto (1-e) + ze$

1) 同値類 $[e] \in K^1(C(\mathbb{T}))$ の生成元である:
$$z \longleftarrow K^0(\mathbb{C}) \longleftarrow K^1(C(\mathbb{T}))$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$[e] \qquad \qquad \qquad [z \mapsto (1-e) + ze]$$

そこで $C(\mathbb{T})$ で Winding 数 1 の関数 $z \mapsto z$ に対応する $C^*(\mathbb{R})$ の元 ξ を求めよ:

$$C(\mathbb{T}) \xleftrightarrow{\text{Cayley 変換}} C_0(\hat{\mathbb{R}}) \xleftrightarrow{\text{Fourier 変換}} C^*(\mathbb{R})$$

$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$
 $z \mapsto z \qquad \qquad \qquad \hat{f}(\mu) = \frac{\mu-1}{\mu+i} = 1 + \hat{g}(\mu) \qquad \qquad \qquad 1 + \lambda(g)$

ここで \hat{g} が $C_0(\hat{\mathbb{R}})$ の元となるように $L =$ 実数, $\hat{g}(\mu) = -2i/(\mu+i)$. すると, λ は $L^2(\mathbb{R})$
 上の正則表現であり $\lambda(g) = \int g(t)\lambda(H)dt$ である. $t \mapsto \lambda(t)$ の無限小生成元 $\xi \in i\mathbb{H}$ とすれば,
 $\lambda(t) = e^{itH}$ ($H = -i\frac{d}{dt}$). H のスペクトル分解 $H = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda)$ を用いると, $\lambda(g) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\hat{\mathbb{R}}} g(\lambda) e^{it\lambda} dE(\lambda) dt$
 $= \hat{g}(-H)$ となる. したがって, $K^1(C^*(\mathbb{R}))$ の生成元は $[1 + \hat{g}(-H)]$ と表せる.

このように $A = \mathbb{C}$ の場合の議論を, 接合積の場合に考え直す. $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ は $L^1(\mathbb{R}, A)$ を稠密な部分
 $*$ 環と見做す. ところで, $a \in A$ と $f \in L^1(\mathbb{R}, A)$ に対し, $(af)(t) = a f(t)$, $(fa)(t) =$
 $f(t)\alpha_t(a)$ とおくと, $af, fa \in L^1(\mathbb{R}, A)$ となるので, A の元は $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ の Multiplier と
 見ることが出来る. このことを念頭に, 3.4.1 の Index 写像 (= 相当な) 写像を構成する. $[e] \in K^0(A)$
 に対し, e が d_t で不変でないときは, α の横動 $\alpha'_t = Ad_{u_t} \circ d_t$ を用いて, $d'_t(e) = e$ と
 しようにする. 同様に, $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R} \cong A \rtimes_{\alpha'} \mathbb{R}$ であるから, あるいは $d_t(e) = e$ と仮定できる. さら
 に, $t \mapsto d_t$ を導く K^1 表現で $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ の Multiplier に値をもつものを $t \mapsto v(t)$ とし, 無限
 小生成元 $\xi \in i\mathbb{H}$ とすれば, $d_t(x) = v(t)xv(t)^*$, $v(t) = e^{itH} \in M(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R})$. $He = eH$ となる.
 $A = \mathbb{C}$ の場合と同様に, $1 + \hat{g}(eHe)$ は $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ の Multiplier として可逆である. したがって
 $K^1(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R})$ の元 $[1 + \hat{g}(eHe)]$ が定まる. ところで, $\delta([e]) = [1 + \hat{g}(eHe)]$ とおけば, δ

14

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \square & \rightarrow & \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 \\
 \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

は $K^0(A)$ から $K^1(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R})$ への同型写像と T_{α} による。 $K^1(A)$ から $K^0(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R})$ への同型写像も容易に導き出される。

3.7.1 離散接合後に対応する六項完全系列 ([7]) C^* 接合後 $B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}$ に対する完全系列は完全である:

$$\begin{array}{ccccc}
 K^0(B) & \xrightarrow{\delta - \beta_*} & K^0(B) & \xrightarrow{\delta_*} & K^0(B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \downarrow \\
 K^1(B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\delta_*} & K^1(B) & \xleftarrow{\delta - \beta_*} & K^1(B)
 \end{array}$$

これは Pimsner-Voiculescu により示され、その後 Cuntz, Connes, Elliott 等による別証明が与えられた。 Thom 同型を用いた証明: $(A, R, \alpha) = \text{Ind}_{\mathbb{Z} \uparrow \mathbb{R}}(B, \mathbb{Z}, \beta)$ とする。すなわち、

A を $\{f \in B \otimes C(\mathbb{R}) : f(t+1) = \beta(f(t))\}$ とし、 $(\alpha_t f)(s) = f(s-t)$ とする。このとき $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{R} \cong (B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}) \otimes K$ 。Thom 同型により、 $K^0(A) \cong K^1(B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z})$, $K^1(A) \cong K^0(B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z})$ 。すなわち C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow SB \xrightarrow{\delta} A \xrightarrow{\beta} B \rightarrow 0$ を $\varphi(f) = f(0)$ により与えたと、六項完全系列

$$\begin{array}{ccccc}
 K^0(SB) & \xrightarrow{\delta_*} & K^0(A) & \xrightarrow{\beta_*} & K^0(B) \\
 \delta_* \uparrow & & \downarrow \delta_* & & \downarrow \delta_* \\
 K^1(B) & \xleftarrow{\beta_*} & K^1(A) & \xleftarrow{\delta_*} & K^1(SB)
 \end{array}$$

が得られる。ここで δ_0, δ_1 は詳細に検討すればよい。

直接的証明. \mathbb{Z} により生成される等長作用素 S から生成される C^* 環を $C^*(S)$ とすれば、 C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow K \xrightarrow{\iota} C^*(S) \xrightarrow{\rho} C(T) \rightarrow 0$ が得られる。ただし、 ι は K を生成元行列単位 $e_{ij} (i, j \geq 0)$ から $S^i(1 - SS^*)S^j$ への対応であり、 $\rho(S) = (z \mapsto z)$ である。つぎに、 C^* 系 (B, \mathbb{Z}, β) に対し、 $B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z} \cong C^*(B \otimes 1, u \otimes \rho(\mathbb{Z}))$ を $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ へ制限したものを E とすれば、 E は $B \otimes 1$ と $u \otimes S$ により生成され、 C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow B \otimes K \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\rho} B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ が得られる。さらに、 $\iota(b \otimes e_{ij}) = u^i b u^{*j} \otimes L_0(e_{ij})$ 。 L_0 は $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 上の六項完全系列をもち、六角形の完全系列

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K^0(B) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 K^0(B) & \rightarrow & K^0(E) & \rightarrow & K^0(B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \downarrow \\
 K^1(B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}) & \leftarrow & K^1(E) & \leftarrow & K^1(B) \\
 & & \uparrow & & \\
 & & K^1(B) & &
 \end{array}$$

を得る。

この論法は A_0 や $C^*(F_n)$ の K 群を求めるときに有効である。なお、この 3.7.1 から Thom 同型を導くことができた。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \boxed{K^0} \\ & & & & \downarrow \\ \boxed{K^1} & \longleftarrow & \mathbb{Z}^2 & \longleftarrow & \mathbb{Z}^2 \end{array}$$

3.8 Mayer-Vietoris 完全系列 $A_i \xrightarrow{j_i} B$ ($i=1,2$) に対し, $A_1 \oplus_B A_2 \subseteq A_1 \oplus A_2$

の B 上の \mathcal{T} -イバ-積とすると,

$$\begin{array}{ccccccc} K^0(A_1 \oplus_B A_2) & \xrightarrow{i_*} & K^0(A_1) \oplus K^0(A_2) & \xrightarrow{j_*} & K^0(B) & & \text{1項完全系列} \\ \uparrow & & & & \downarrow & & \\ K^1(B) & \xleftarrow{j_*} & K^1(A_1) \oplus K^1(A_2) & \xleftarrow{i_*} & K^1(A_1 \oplus_B A_2) & & \end{array}$$

である. $T=T^{-1}$, $i_*(a) = (i_{1*}a, i_{2*}a)$, $j_*(a, b) = j_{1*}a - j_{2*}b$ である.

\mathcal{T} -イバ-積の説明が始めた. 可換図式 $A \begin{array}{c} \xrightarrow{j_1} A_1 \\ \xrightarrow{j_2} A_2 \end{array} \xrightarrow{j_1} B$ において, (a) j_1 または j_2 は全射, (b) $j_1(a) = j_2(a_2)$ をみたす任意の $(a_1, a_2) \in A_1 \oplus A_2$ に対し $i_1(a) = a_1, i_2(a) = a_2$ をみたす a が一意に存在する. このとき, $A \subseteq A_1 \oplus A_2$ の B 上の \mathcal{T} -イバ-積といい, $A_1 \oplus_B A_2$ と書く. これは $A_1 \oplus A_2$ の部分 C^* 環 $\{(a_1, a_2) \in A_1 \oplus A_2 : j_1(a_1) = j_2(a_2)\}$ と同型である.

さて, $J_1 = \text{Ker } i_1, J_2 = \text{Ker } i_2$ とする. j_1 は全射ならば, i_2 は J_1 から J_2 への同型写像になる:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J_1 & \xrightarrow{i_1} & A & \xrightarrow{i_1} & A_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow i_2|_{J_1} & & \downarrow i_2 & & \downarrow j_1 & & \\ 0 & \longrightarrow & J_2 & \xrightarrow{i_2} & A_2 & \xrightarrow{j_2} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

実際, $x \in J_1$ ならば, $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$ を用いて, $i_2(x) \in J_2$. 逆に, $y \in J_2$ ならば, i_2 が全射であるから, $i_1(x) = 0, i_2(x) = y$ をみたす $x \in A$ が唯一つある. したがって, i_2 を J_1 へ制限したものは, J_1 から J_2 への同型写像である. したがって, 六項完全系列を用いて,

新たな完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & K^1(A) & \xrightarrow{i_*} & K^1(A_1) & \xrightarrow{\delta} & K^0(J_1) & \xrightarrow{L_*} & K^0(A) & \xrightarrow{i_*} & K^0(A_1) \\ & \downarrow i_{2*} & & \downarrow j_{1*} & & \parallel (i_2|_{J_1})_* & & \downarrow i_{2*} & & \downarrow j_{1*} \\ \longrightarrow & K^1(A_2) & \xrightarrow{j_*} & K^1(B) & \xrightarrow{\delta'} & K^0(J_2) & \xrightarrow{L_*} & K^0(A_2) & \xrightarrow{j_*} & K^0(B) \end{array}$$

を作る. $\delta' = L_{1*} \circ (i_2|_{J_1})_* \circ \delta$ を $K^1(B)$ から $K^0(A)$ への準同型写像とみると, 完全系列 $K^1(A) \xrightarrow{i_*} K^1(A_1) \oplus K^1(A_2) \xrightarrow{j_*} K^1(B) \xrightarrow{\delta'} K^0(A) \xrightarrow{L_*} K^0(A_1) \oplus K^0(A_2) \xrightarrow{j_*} K^0(B)$ が得られる. 懸念により, Mayer-Vietoris 完全系列が得られる.

逆とは逆に, Mayer-Vietoris 完全系列を初めに証明しておいてから, 六項完全系列を示すこともできる. その際には, δ' を Index 写像の構成と同じように作ればよい.

u. Mayer-Vietoris 完全系列は層 C^* 環の K 群を求めるときに有効である.

4. Kasparov の KK 理論

ここでは, C^* 環 A, B から可換群 $KK(A, B)$ の KK フังก์ターを考へる。これは Atiyah の K ホモロジーや BDF 理論を一般化したものであるが, $KK(C, B) \cong K(B)$, $KK(A, C) \cong K_0(A)$ が成り立ち, K 群と K ホモロジーの両方の性質を備えている。さらに KK フังก์ターには, 結合法則を満たす Kasparov 積 $(x, y) \in KK(A, B) \times KK(B, C) \mapsto y \circ x \in KK(A, C)$ が定義できるので, この積に関して $KK(A, B)$ または $KK(B, C)$ が可逆元を含めば, $K_0(A) \cong K_0(B)$ または $K(B) \cong K(C)$ となる。Kasparov 自身による群 C^* 環の研究や Connes による葉層 C^* 環の研究では, このような可逆元の存在を論じたものが多い。高井氏の講演もそうである (同氏の講演記録参照)

4.1 C^* 環の拡大と K_1 ホモロジー C^* 環完全系列 $0 \rightarrow K \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ に

対応される C^* 環 E を A の 拡大, または K の A による 拡大 という。このような拡大の分類を司るには, 通常次の同式
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K & \hookrightarrow & E & \xrightarrow{\phi} & A & \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \phi & & \downarrow \tau & \\ 0 & \rightarrow & K & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{L}(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\phi_0} & \mathcal{Q}(\mathcal{H}) & \rightarrow 0 \end{array}$$
 により, E を K の Multiplier 環 $M(K) = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ の部分 C^* 環 \hookrightarrow 埋藏し, この拡大を A から Calkin 環 $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ の中への (単位的) 単準同型写像 $\tau = \phi_0 \circ \phi^{-1}$ と対応させ, 拡大の分類を単準同型写像の分類に帰着させる。 $Ext(A)$ はこのような (単位的) 単準同型写像全体を $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ の内部自己同型で割ったものとして定義される。単準同型写像 τ を含む同値類を $[\tau]$ と表すことにすれば, $Ext(A)$ は加法 $[\tau_1] + [\tau_2] = [\tau_1 \oplus \tau_2]$ により

可換半群になる。ただし, \mathcal{H} が可算無限次元であることを用いて得られた関係
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{L}(\mathcal{H}) & \subset & \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{Q}(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \end{array}$$
 は今後も断わりなく利用する。とくに τ が持

ち上げ (Lifting) $p: A \xrightarrow{\phi} \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\phi_0} \mathcal{L}(\mathcal{H})$ とするとき, つまり単準同型写像 $\rho: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が存在して上の同式が可換になるときには, $[\tau] = 0$ である。さらに, A が

核型 α ときは, $\text{Ext}(A)$ は可換群になり, K_1 ホモロジー そのものである. \therefore 得られた反変
 フังก์ター Ext は K 群と同じような性質をもつたことが省略可.

例 $\text{Ext}(\mathbb{C}) = 0$

Pimsner-Popa-Voiculescu はこれをさらに一般化し, 拡大 $0 \rightarrow K \otimes C(X) \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ の分類を行った. Kasparov [6] はこれと独立に, (ほぼ) 時を同じくして拡大 $0 \rightarrow K \otimes B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ の分類を論じた.

4.2 K_0 ホモロジー 単準同型写像 $\varphi: A \rightarrow \mathcal{L}(E)$ と $\varphi(a)F - F\varphi(a) \in K(E)$

($\forall a \in A$) ときたがフレドホルム作用素 $F \in \varphi^{-1}(U(\mathcal{K}(E)))$ からなる対 (φ, F) の全体を
 考え. この集合のホモトピー-類全体は加法 $[\varphi_1, F_1] + [\varphi_2, F_2] = [\varphi_1 \oplus \varphi_2, F_1 \oplus F_2]$
 により可換半群になるので, その Grothendieck 群 $K_0(A)$ を A の K_0 ホモロジー 群とは
 K_0 ホモロジー とする.

これでは直感的な意味がわからぬ. そこで, 動機がわかるように uu 挿入しよう.

無限次元可分ヒルベルト空間 E_1, E_2 , 単準同型写像 $\psi_i: A \rightarrow \mathcal{L}(E_i)$ および

$\psi_i(a)F - F\psi_i(a) \in K(E_i)$ ($\forall a \in A$) ときたが E_1 から E_2 へのフレドホルム作用素

F ときたが五つ組 $(E_1, \psi_1, E_2, \psi_2, F)$ の全体を $EU(A)$ とする (階層型作用素の一般化).

これは加法 $(E_1, \psi_1, E_2, \psi_2, F) + (E'_1, \psi'_1, E'_2, \psi'_2, F') = (E_1 \oplus E'_1, \psi_1 \oplus \psi'_1,$

$E_2 \oplus E'_2, \psi_2 \oplus \psi'_2, F \oplus F')$ により可換半群になる. これを次の三条件により決まる同値関係で割ったものが $K_0(A)$ である:

(1) E_1 から E_2 への \mathbb{C} -値作用素 u_1, u_2 が

存在して, $u_1 \psi_1(a) = \psi'_1(a) u_1$, $u_2 F = F' u_2$, $u_2 \psi_2(a) = \psi'_2(a) u_2$ とき, $(E_1, \psi_1, E_2,$

$\psi_2, F) \sim (E'_1, \psi'_1, E'_2, \psi'_2, F')$; (2) $(E_1, \psi_1, E_2, \psi_2, F) + (E, \psi, E, \psi, 1) = (E_1, \psi_1, E_2,$

$\psi_2, F)$; (3) $\psi(a) - \psi'(a) \in K$ かつ F, F' の極分解 $F = U|F|$, $F' = U'|F'|$ とき

$u-v' \in K$ とき, $(\psi, \varphi, \psi', \varphi', F) \sim (\psi, \psi', \psi, \varphi', F')$. 実際, $K_0(A)$ は可換群になる.
 $(\psi, \varphi, \psi, \varphi, 1)$ を含む類が零元であり, $(\psi_1, \varphi_1, \psi_2, \varphi_2, F)$ を含む類の逆元は $(\psi_2, \varphi_2, \psi_1, \varphi_1, F^*)$ を含む類である. K_0 は反写 $\tau_p \rightarrow \tau_{p-1}$ である.

前の定義との関係を見よ. ためには, $(\psi_1, \varphi_1, \psi_2, \varphi_2, F) \in ((\begin{smallmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{smallmatrix}, F^*))$ のように対応に置きよ.

例) $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, $K_0(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (n: \text{偶数}) \\ \mathbb{Z} & (n: \text{奇数}) \end{cases}$

4.3 KK $\tau_p \rightarrow \tau_{p-1}$ Kasparov 自身による定義から始める. $A, B \in C^*$ 環とす. 準同型写像 $\psi: A \rightarrow M(K \otimes B)$ と $F \in M(K \otimes B)$ から成る対 (ψ, F) の中では $[\psi(a), F], (F^2 - 1)\psi(a), (F - F^*)\psi(a)$ がどれも $K \otimes B$ に含まれるような a の全体は加法 $(\psi, F) + (\psi', F') = (\psi \oplus \psi', F \oplus F')$ により可換半群になる. $\tau = \tau^2$ として, 右辺では $M(K \otimes B) \oplus M(K \otimes B) \subset M_2(M(K \otimes B)) \subset M(M_2(K \otimes B)) \subset M(K \otimes B)$ のように同視を行く. この半群のホムトピー同値類の全体 $KK(A, B)$ は可換群になる. 上の三つの関係がどれも 0 となる (ψ, F) の類が零元であり, (ψ', F') を含む類の逆元は $(\psi', -F')$ を含む類である. 注4

もう少し直感的な定義は Cuntz により与えられている. これを用いると, Kasparov のように B に狭義正値元の存在を仮定せずに KK 群の定義ができる.

A から B への 疑似準同型写像 (quasihomomorphism) $A \rightarrow E \supset J \subset B$ とは, A から E への準同型写像の対 $(\psi, \bar{\psi})$ であり, $\psi(a) - \bar{\psi}(a)$ が J に含まれるようなものである (J は E の閉イデアルであり, B の部分 C^* 環である). 通常はこの外に, E が $\psi(A)$ と $\bar{\psi}(A)$ により, J が $\psi(a) - \bar{\psi}(a), a \in A$ により生成され, J が E において essential であることも仮定する. こうすると, 疑似準同型写像 $(\psi, \bar{\psi})$

は1次形式 $D_\psi(a) = \psi(a) - \bar{\psi}(a)$, 2次形式 $Q_\psi(a, b) = \psi(a)\psi(b)$ $a, b \in E$ により一意に定まる. $\psi: E, (\psi_0, \bar{\psi}_0)$ と $(\psi_1, \bar{\psi}_1)$ がホモトピーであること $\Leftrightarrow D_{\psi_0}, Q_{\psi_0}$ が, D_{ψ_1}, Q_{ψ_1} とホモトピーであることと定数同値である.

A から $K \otimes B$ への疑似準同型写像のホモトピー類の全体を $KK(A, B)$ と一致

し, 加法は $(\psi_1, \bar{\psi}_1) + (\psi_2, \bar{\psi}_2) = (\psi_1 \oplus \psi_2, \bar{\psi}_1 \oplus \bar{\psi}_2)$ と与えられる. $\tau = \tau \circ L$, 右辺 τ は $(K \otimes B) \oplus (K \otimes B) \subset M_2(K \otimes B) \hookrightarrow K \otimes B$ の τ を同一視を行なった. $[\psi, \psi] = 0, [\bar{\psi}, \psi] = -[\psi, \bar{\psi}]$ である.

4.4 Kasparov 積 KK フังก์ターで最も重要な役割を果たすのが Kasparov 積

$(x, y) \in KK(A, B) \times KK(B, C) \mapsto y \circ x \in KK(A, C)$ である. $\tau = \tau \circ L$, A は可分であることと仮定する. x, y の代表元である疑似準同型写像を $(\psi, \bar{\psi}): A \rightarrow E_1 \supset J_1 \subset K \otimes B, (\psi', \bar{\psi}'): B \rightarrow E_2 \supset J_2 \subset K \otimes C$ とする. $(\psi, \bar{\psi})$ を $K \otimes B$ へ拡張して $(\psi \oplus id, \bar{\psi} \oplus id)$ を改めて $(\psi, \bar{\psi})$ と書く. これを J_1 へ制限して $(\psi, \bar{\psi})|_{J_1}$ とし, E_1 へ拡張するとき $(\psi, \bar{\psi})|_{J_1}$ とホモトピーな疑似準同型写像の中で E_1 へ拡張するとき $E_1 \hookrightarrow M(J_1)$ とするとき $(\psi, \bar{\psi})$ と書く. $\alpha = \begin{pmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \bar{\psi} \end{pmatrix}, \bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \bar{\psi} & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}$ とおき, $\alpha(A)$ と $\bar{\alpha}(A)$ の生成する C^* 環を D , $Ad(\alpha)$ を D へ制限して τ を τ とすれば, $\alpha(a) - \tau(\bar{\alpha}(a)) \in M_2(J_2)$. L は τ かつ, $(\alpha, \tau \circ \bar{\alpha})$ は A から $K \otimes C$ への疑似準同型写像である. これを含むホモトピー類を $y \circ x$ とする.

Kasparov 積の結合法則 $z \circ (y \circ x) = (z \circ y) \circ x$ は τ を可換と見れば成り立つ.

4.5 基本的性質 KK フังก์ターは \mathcal{K} -左乗法に反変, \mathcal{K} -右乗法に変換に同値

である. この外, K 環 a と τ を述べた a と同じような性質が成り立つ.

4.5.1 $KK(A, \mathbb{C}) \cong K_0(A)$ K ホモロジー

4.5.2 $KK(\mathbb{C}, B) \cong K^0(B)$ K 群

これらの証明は Cuntz の定義に戻るとおもしろい。

4.5.3 $KK(A_1, B_1) \times KK(A_2, B_2) \rightarrow KK(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2)$ あり

同様の定義でできる。

h
4.5.4 $K_n K^m(A, B) = KK(S^n A, S^m B)$ とおくと, B の周期性

周期性 $KK(A, B) \cong K_2 K(A, B) \cong K_1 K^1(A, B) \cong KK^2(A, B)$ が成り立つ。ただし, 添字が 0 のときは省略している。 $\hookrightarrow K H_0(S^2 A) = K H_0(A)$

4.5.5 A が核型ならば, $KK^1(A, B) \cong \text{Ext}(A, B)$. 一般の C^* 環のときは, $KK^1(A, B)$ は $\text{Ext}(A, B)$ の可逆な部分である。

2
完全列 $4.5.6$ $0 \rightarrow J \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ が完全で, E が核型ならば, $\dots \rightarrow K_n(E, B) \rightarrow K_n K(J, B) \rightarrow K_{n-1} K(A, B) \rightarrow K_{n-1} K(E, B) \rightarrow \dots$ も完全である。

2
完全列 $4.5.7$ $0 \rightarrow J \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow 0$ が完全で, J が狭義正値元をもてば, $\dots \rightarrow KK^n(A, E) \rightarrow KK^n(A, B) \rightarrow KK^{n+1}(A, J) \rightarrow KK^{n+1}(A, E) \rightarrow \dots$ も完全である。

4.5.8 普遍係数定理 C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow K \otimes B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ には

対し $0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(K^0(A), K^0(B)) \oplus \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(K^1(A), K^1(B)) \rightarrow \text{Ext}(A, B) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}(K^0(A), K^1(B)) \oplus \text{Hom}(K^1(A), K^0(B)) \rightarrow 0$ も完全である。ただし, $\gamma([E]) = (\delta, \delta)$ である。これにより, C^* 環の拡大が K 群から定まる量により系統的に分類できる。とくに, $A = C(X)$ ($X \subset \mathbb{C}$), $B = \mathbb{C}$ の場合が BDF 理論で重要になる。

5 例 $u < v$ の例を選んで、もう少し詳しい解説をする。

5.1 AF環 順序群 (G, G^+) が次の二つの条件を満たすとき次元群と

いふ: (I) $a + \dots + a \in G^+$ ならば, $a \in G^+$; (II) $a_i \leq b_j$ ($i, j = 1, 2$) ならば, $a_i \leq c \leq b_j$ ($i, j = 1, 2$) を満たす c が存在. AF環の安定同型類と次元群は1対1に対応している. AF環の次元群は $K^0(A)$ に射影元 a 大, 小関係を入れたものである. AF環 A での C^* 環の K^0 群にも順序を考へることは有意義と思われる. (武元氏の講演記録参照)

5.2 無理数回転環 $A_\theta = C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ ($(\alpha f)(z) = f(e^{2\pi\theta i} z)$) は

交換関係 $uv = e^{2\pi\theta i} vu$ を満たす二つのユニタリ作用素 u, v から生成される C^* 環に同型である. Powers は A_θ が単純であることを示し, Rieffel は $p = f_1 u + f_0 + u^* f_{-1}$ という形の自明でない射影元を作った, Kadison の予想に決着を

つけた. (注: 差分方程式により記述される概 Mathieu ハミルトニアン $h(\lambda) =$

$u + u^* + \lambda(v + v^*)$ のスペクトルに ~~Mass gap~~ ^{ここがわかる} ~~がある~~ ^{がある} ~~ので~~, A_θ は自明でない

射影元がある. ~~事実~~ Powers は Rieffel が上の p を生じさせる前に A_θ が射影元を \mathbb{Z} を用いて作った事がある). ^{このかわかる}

したがって, Pimsner-Voiculescu は $K^0(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$, $K^1(A_\theta) \cong \mathbb{Z}^2$ であり,

それぞれ生成元が, $[1], [p]$ および $[u], [v]$ であること, A_θ 上の

規格化されたトレース τ により $\tau(K^0(A_\theta)) = \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ となることを示した. これ

により, $A_\theta \cong A_{\theta'}$ ($\theta, \theta' \in [0, 1]$) であるための完全条件が, $\theta = \theta'$ または

$\theta = 1 - \theta'$ であることが判明した. この最後の結果に対し, Cuntz は簡単な

別証を与えている.

2次元トラス $V = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の流れ $T_t(x, y) = (x + \theta t, y + t) \pmod{\mathbb{Z}^2}$

から導かれる葉層構造を F ($dx = \theta dy$) と可視化, $C^*(V, F) \cong C(V) \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ となる.

3. $t \in \mathbb{R}$ として, $d_t f = f \circ T_t^{-1}$. 軌道の切片として, 1 次元トラス $X = \{(x, 0) \in V :$

$x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$ とする. $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}} \in X$ を誘導した変換を S とすれば, $Sx = x + \theta$

(mod \mathbb{Z}) とする. $C(X)$ 上で $\beta g = g \circ S^{-1}$ とすれば, C^* 系 $(C(X), \mathbb{Z}, \beta)$

は C^* 系 $(C(V), \mathbb{R}, \alpha)$ を誘導する. β として, $C(V) \rtimes_{\alpha} \mathbb{R} \cong (C(X) \rtimes_{\beta} \mathbb{Z})$

$\otimes K \cong A_{\theta} \otimes K$ となり, $C^*(V, F)$ と A_{θ} の K 理論は一致する.

5.3 自由群 F_n ($n \geq 2$) の群 C^* 環の研究は Kadison の予想 " $C^*_{red}(F_n)$

は自明でない射影元をもつ" を目標に行われた. 77年 Cohen の " $C^*(F_n)$

は自明でない射影元をもつ" を示し, Cuntz の " $K^0(C^*(F_n)) \cong \mathbb{Z}$,

$K^1(C^*(F_n)) \cong \mathbb{Z}^n$ " を示した. \rightarrow ついで, Pimsner-Voiculescu の " $K^0(C^*_{red}(F_n))$

の生成元が $[1]$ である" を示し, 予想を肯定的に解決した. Cuntz

は, $KK(C^*(G), C^*_{red}(G))$ が Kasparov 積に閉じた次元 n 元を含むとき,

K 柔順 ということをし, 柔順群, 自由群等が K 柔順であること, 性質 T を持つ

無限群は K 柔順であることを示した. これに引上る結果はさらに見通し良く

なつた. Cuntz は正規表現から導かれた準同型写像 $\varphi: C^*(G) \rightarrow C^*_{red}(G)$ を

とし, $K^*(C^*(G)) \cong K^*(C^*_{red}(G)) \oplus K^*(\text{Ker } \varphi)$ を予想している. Lance は上の

Pimsner-Voiculescu の結果を一般化し, 別証を行った. その際, 可算

離散無限群 = 正しい性質 Λ という条件を導入している. これが成ると, 長

田表の Haagerup の性質が成ると, K 柔順も含め T : これら三つの条件

の相互関係はわかっていない. 柔順群や自由群を含む, 性質 T を持つ群

を含まない可算離散無限群のクラスが決まると (長田表の講演

Heisenberg Lie 群
の K^0, K^1 はとも 0

記録参照). $K_*(C^*(F_n)) \cong \mathbb{Z}^n$ (斎藤氏の証明がある).

5.4 Fell + Kirillov は 3次元ハイゼンベルグ群 $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ に対し, C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \otimes K \rightarrow C^*(G) \xrightarrow{\varphi} C_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow 0$ は分裂するの?, という問題を提せした. $T = T^*$ し, φ は表現 $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (a, b) \mapsto e^{i(ax+by)}$ が導かれ $T = \text{tr}$ である.

Kasparov は $\text{Ext}(C_0(\mathbb{R}^2), C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\})) \cong \mathbb{Z}^2$ であり, 上の拡大は $(-1, -1)$ に対応していることを示し, 分裂していることを示した. Rosenberg も $2n+1$ 次元ハイゼンベルグ群 H_{2n+1} に対して同様の結果を普遍係数定理を用いて示し, その系として $K^0(C^*(H_{2n+1})) = K^1(C^*(H_{2n+1})) = 0$ を示した.

Kasparov はこの結果をさらに拡張している.

単連結, 可解リー群 G の群 C^* 環の K 群は Kasparov により求められた. G は単連結, 閉正現部分群と \mathbb{R} の半直積で表せるので, Thom 同型を繰り返して, $K^i(A) \cong K^{i+j}(A \rtimes G)$ ($j = \dim G \pmod{2}$). ここで, $A = \mathbb{C}$ とすればよい.

群 G が \mathbb{R}^n と n 次元コンパクト群 H の半直積で与えられた運動群のときは, $C^*_{red}(G) \cong C(\hat{\mathbb{R}}^n) \rtimes H$. (したがって, $K^*(C^*_{red}(G)) \cong K^*_H(C(\hat{\mathbb{R}}^n)) \cong K^*_H(\mathbb{C}) \cong R(H)$). したがって, $R(H)$ は H の表現環である.

5.5 最後に Connes による非可換微分幾何について少し触れておく. リー群 G の作用する C^* 系 (A, G, α) に対し, A 上に規格化された α 不変トレス τ の存在を仮定すれば, $K^*(A) = K^0(A) \oplus K^1(A)$ から G の de Rham コホモロジー環 $H^*_\mathbb{R}(G)$ への群準同型写像 $ch_\tau: K^*(A) \rightarrow H^*_\mathbb{R}(G)$ が構成できる.

例 1. (A, \mathbb{R}, α) の場合には, $ch_\tau([u]) = \frac{1}{2\pi i} \tau(\delta(u)u^*)$, $u \in U(A)$.
 $[u] \in K^1(A) \xrightarrow{ch_\tau}$

これを用いると、単位元のない単純 C^* 環 A において、自明な射影元は存在しないものも例が作れる。

$$K^0(A) \ni [e]$$

例 2. (A, \mathbb{R}^2, d) の場合には $ch_\tau([e]) = \tau(e) + c_1(e) \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \in H_{\mathbb{R}}^*(G)$.

$T \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ は $G = \mathbb{R}^2$ の 1-環の標準基底である。このとき、 $c_1(e)$ は Chern 数 といわれ、 $c_1(e) = \frac{1}{2\pi i} \tau(e[\delta_1(e), \delta_2(e)])$ とする。 $T \in \mathbb{R}^2$, δ_1, δ_2 は

$\varepsilon^1, \varepsilon^2$ に対応して d の導関数の微分である。 T と之を $A = A_\theta$ のときには、

$c_1(K^0(A_\theta)) = \mathbb{Z}$ であり、 $\psi < 1$ は $c_1(p) = 1$ とする。 T の τ , $\psi = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$ による

イクル振動を行っても、 p は不変な作用は作れないことがわかる。

例 3. $G = \mathbb{R}^m$ の場合には指数定理を一般化して、 C^* 環の完全系列 $0 \rightarrow A \otimes \mathbb{R}^m \rightarrow E \rightarrow A \otimes C(S^{m-1}) \rightarrow 0$ が得られる。 $T \in \mathbb{R}^m$, 表象 $\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m, A)$ に対応する擬微分作用素は $P_\alpha = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{\alpha}(s) V_s ds \in M(A \otimes \mathbb{R}^m)$ であり、 $\sigma(P_\alpha)$ はその主表象である。 $D \in E$ の降階型作用素 a のときには、 $\hat{c}(\sigma(D)) = \langle ch_\tau(\sigma(D)), \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^m \rangle$ とする。 $T \in \mathbb{R}^m$, δ は Index 写像 $K^1(A \otimes C(S^{m-1})) \rightarrow K^0(A \otimes \mathbb{R}^m)$ である。 G がリー群の場合にも同様の式が成り立つことが知られる。

とくに、 $A = A_\theta$, $G = \mathbb{T}^2$ とすると、 $A_\theta \otimes \mathbb{T}^2 \cong \mathcal{K}$ となり、 $\hat{c} \circ \delta$ は整数値になる。これは $c_1(p) = 1$ の別の解釈と一致している。

以上の議論の中で、Chern 指標を定義するには、接続、曲率などの概念が必要になるが、 T と之を $A = C(\mathbb{R}^m)$, $G = \mathbb{R}^m$ のときには、それらも擬微分作用素などの概念も通常の a も一致している。

文 献

(1) 入門解説

- [1] Taylor, J. L., Banach algebras and topology, Algebras and Analysis (Ed. J. H. Williams) Academic Press, 1975
- [2] Karoubi, M., K-theory, An introduction, Springer-Verlag, 1978
- [3] Atiyah, M., K-theory, Benjamin, 1967

(2) C^* 環のK理論研究の本格化

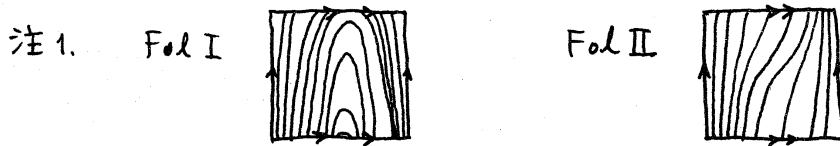
- [4] Connes, A., Sur la théorie non commutative de l'intégration, Algèbre d'Opérateurs (Ed. P. de la Harpe) Springer Lecture Notes in Math. 725.
- [5] Cuntz, J., K-theory for certain C^* -algebras, Ann. of Math., 113 (1981), 181-197.
- [6] Kasparov, G. G., The operator K-functor and extensions of C^* -algebras, Izv. Acad. Nauk. SSSR, 44 (1980), 571-636.
- [7] Pimsner, M. and D. Voiculescu, Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-products of C^* -algebras, J. Operator Theory 4 (1980), 93-118.

(1) C^* 環のK理論の概説

- [8] Connes, A., A survey of foliations and operator algebras, Proc. Symp. Pure Math. 38 (1981),
- [9] Cuntz, J., The internal structure of simple C^* -algebras, Proc. Symp. Pure Math. 38 (1981),

- [10] Cuntz, J., K-theory and C*-algebras, Preprint 1983.
- [11] Douglas, R. G., C*-algebra Extensions and K-homology, Ann. of Math. Studies, No 95, 1980.
- [12] Rosenberg, J., Homological invariants of extensions of C*-algebras, Proc. Symp. Pure Math. 38 (1981)

これは [8, 9, 10, 11, 12] で引用された文献を参照していただきたい。



注 2. 岸本氏(は O_n と \mathbb{R} の G^* -作用の接合積 $O_n \times_{\mathbb{R}}$ が単純でトレースをもつこととを示した. Thom 同型により $K^0(O_n \times_{\mathbb{R}}) \cong K^1(O_n) = 0$ であるから, $O_n \times_{\mathbb{R}}$ は自明な非自乗元をもたない (Elliott).

注 3 位相的 K 群 K^0, K^1 に対し, 代数的 K 群は K_0, K_1 と区別するのが普通であるが, ここでは K ホモロジーと紛らわしいので, ここでは K 群は K^i , K ホモロジーは K_i とした. 単位的 C* 環 A の代数的 K 群を $K_{alg}^i(A)$ と書くことにすれば, $K_{alg}^0(A)$ は A の群を用いた $K^0(A)$ により, $K_{alg}^1(A)$ ($i \geq 1$) は離散群 $GL(\bigcup_n M_n(A))$ の分類空間 $BGL(\bigcup_n M_n(A))$ の部分空間 $BGL(\bigcup_n M_n(A))^+$ を用いて $K_{alg}^i(A) = \pi_i(BGL(\bigcup_n M_n(A))^+)$ により定義される. とくに, $K_{alg}^1(A) = U(\bigcup_n M_n(A)) / (\text{交換子群})$, $K_{alg}^2(A) = H_2(\text{交換子群}, \mathbb{Z})$ である. $K^i(A \otimes K) \cong K_{alg}^i(A \otimes K)$ が予想されている.

注 4 Kasparov のもとの定義は, 実構造と, コンパクト群の equivariance も同時に扱った形で与えられている.