

Hermitian symmetric space の cut locus について

筑波大数学研究科 田崎博之

(Hiroyuki Tasaki)

1. 序

完備 Riemann 多様体 M とその点 P に対して, M の P における cut locus を $C_P(M)$ と書くことにする。単連結 compact 対称空間の cut locus については次のことが知られている。

定理 (Crittenden [2]). 単連結 compact 対称空間 M とその点 P に対して, $C_P(M)$ は M の P における first conjugate locus に一致する。

必ずしも単連結ではない compact 対称空間の cut locus は, 次の Sakai [5] による定理で決定された。

定理 1. M を compact 対称空間とし, P をその点とする。

A が P を通る M の極大全測地的平坦部分多様体ならば,

$$(1) \quad C_P(M) \cap A = C_P(A)$$

が成り立つ。さらに, (U, K) が Riemann 対称対で $M = U/K$,

$K \cdot P = P$ を満たせば,

$$(2) \quad C_p(M) = \bigcup_{k \in K} k \cdot C_p(A).$$

この定理を使って, Sakai [6], Takeuchi [8], [9] は compact 対称空間の cut locus の stratification を与えている。

本稿の主目的は次の定理を証明することである。

定理 2. M_1, M_2 を compact 型 Hermite 対称空間とし, さらに M_2 は複素射影空間に正則等長的に埋め込まれているとする。 M_1 が M_2 に正則等長的に埋め込まれているならば, M_1 の各点 P に対して,

$$C_p(M_1) = M_1 \cap C_p(M_2)$$

が成り立つ。

定理 1 において A は M の全測地的部分多様体だから, (1) は A における測地線の cut point が M においても cut point であることを主張している。他方定理 2 では M_1 は必ずしも M_2 の全測地的部分多様体ではないので, $C_p(M_1) = M_1 \cap C_p(M_2)$ は集合としての等式を主張しているにすぎない。

定理 2 の証明のおもな部分は, M_2 が複素射影空間の場合に主張を示すことである (定理 6)。その準備として, 2 節で compact 型 Hermite 対称空間 $M = U/K$ に対して, 原点 O を通るある正則な全測地的部分多様体 P を構成する。この P は, $P^1(\mathbb{C}) \times \cdots \times P^1(\mathbb{C})$ に同型で,

$$C_0(M) = \bigcup_{k \in K} k \cdot C_0(P)$$

を満たす。したがって、問題を $P^1(\mathbb{C}) \times \cdots \times P^1(\mathbb{C})$ の複素射影空間への正則等長埋め込みの場合に帰着させることができ、この場合を直接証明する。

2. 準備

M を compact 型 Hermite 対称空間とする。この節では、 M の極大全測地的平坦部分多様体 A と A を含む正則な全測地的部分多様体 P を構成する。証明を与えていない事実に関しては、Helgason [3] 参照。

(\mathfrak{u}, θ) を M に対応する orthogonal symmetric Lie algebra とする。 \mathfrak{u} の標準直和分解を得る。

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

ここで、

$$\mathfrak{u} = \{X \in \mathfrak{u} : \theta(X) = X\}, \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{u} : \theta(X) = -X\}.$$

\mathfrak{k} の極大可換部分代数 \mathfrak{h} を一つとる。 \mathfrak{u} , \mathfrak{k} , \mathfrak{p} , \mathfrak{h} の複素化をそれぞれ $\tilde{\mathfrak{u}}$, $\tilde{\mathfrak{k}}$, $\tilde{\mathfrak{p}}$, $\tilde{\mathfrak{h}}$ と書くことにする。すると $\tilde{\mathfrak{h}}$ は \mathfrak{h} の Cartan 部分代数になる。 Δ を $\tilde{\mathfrak{h}}$ に関する $\tilde{\mathfrak{u}}$ の root 全体とし、各 $\alpha \in \Delta$ に対して

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \tilde{\mathfrak{u}} : \forall H \in \tilde{\mathfrak{h}} [H, X] = \alpha(H)X\}$$

とおく。 $\tilde{\mathfrak{h}} \subset \tilde{\mathfrak{k}}$ だから、各 root α に対して、 $\mathfrak{g}^\alpha \subset \tilde{\mathfrak{k}}$ または $\mathfrak{g}^\alpha \subset \tilde{\mathfrak{p}}$ が成り立つ。 $\mathfrak{g}^\alpha \subset \tilde{\mathfrak{k}}$ のとき α を compact と呼び、 $\mathfrak{g}^\alpha \subset \tilde{\mathfrak{p}}$

のとき α を noncompact と呼ぶ。母の root 空間分解から、

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{f}} + \sum_{\alpha: \text{compact}} \mathfrak{g}^{\alpha}, \quad \tilde{\mathfrak{f}} = \sum_{\beta: \text{noncompact}} \mathfrak{g}^{\beta}$$

を得る。各 root は $\mathbb{R}\mathfrak{f}$ 上実数値をとるから、実線形空間 $\mathbb{R}\mathfrak{f}$ の双対空間に辞書式順序を入れると Δ の元に正負が定まる。

Q を正の noncompact root 全体とし、 r を M の階数とする。すると、 $\gamma_i \pm \gamma_j \notin \Delta$ ($1 \leq i, j \leq r$) を満たす $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\} \subset Q$ が存在する。各 root $\alpha \in \Delta$ に対して、次の条件を満たす 0 でない元 $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ が存在する。

$$(3) \quad X_{\alpha} - X_{-\alpha}, \quad \mathbb{R}(X_{\alpha} + X_{-\alpha}) \in \mathcal{U},$$

$$(4) \quad [X_{\alpha}, X_{-\alpha}] = \frac{2}{\alpha(H_{\alpha})} H_{\alpha}.$$

ただし、 H_{α} は母の Killing 形式に関する α の双対元とする。

$\gamma_i \pm \gamma_j \notin \Delta$ だから、 $i \neq j$ なる i, j に対して、

$$(5) \quad [X_{\pm \gamma_i}, X_{\pm \gamma_j}] = [H_{\pm \gamma_i}, X_{\pm \gamma_j}] = 0.$$

したがって、

$$(6) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^r \mathbb{R} \mathbb{F}(X_{\gamma_i} + X_{-\gamma_i})$$

とおくと、 $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ は母の極大可換部分空間になる。

U を Lie 代数が \mathcal{U} であるような単連結 Lie 群とする。 \mathfrak{k} に対応する U の解析部分群を K とおく。 M は単連結だから、

$$M = U/K$$

となる。 U の M への作用は、正則等長的である。

0 を $M = U/K$ の原点とし、

$$A = \exp(\alpha_p) \cdot 0$$

とおく、 α_p は \mathfrak{p} の極大可換部分空間だから、 A は M の極大全測地的平坦部分多様体になる。

次に、

$$\begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} \longmapsto X_{r_i} - X_{-r_i}, \quad \begin{bmatrix} & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & \end{bmatrix} \longmapsto \sqrt{-1}(X_{r_i} + X_{-r_i})$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & \\ & -\sqrt{-1} \end{bmatrix} \longmapsto \frac{2\sqrt{-1}}{\delta_i(H_{r_i})} H_{r_i}$$

によって線形写像 $\phi_i: \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{u}$ を定める。(3), (4)より、 ϕ_i は \mathfrak{u} への Lie 代数準同型になる。(5)より、 $i \neq j$ なる i, j に対して、

$$[\phi_i(\mathfrak{su}(2)), \phi_j(\mathfrak{su}(2))] = \{0\}$$

だから、 $\mathfrak{su}(2)$ の r 個の直和 $\mathfrak{su}(2)^r$ から \mathfrak{u} への単射 Lie 代数準同型 ϕ を

$$\phi(X_1, \dots, X_r) = \sum_{i=1}^r \phi_i(X_i), \quad X_i \in \mathfrak{su}(2),$$

によって定義できる。 ϕ が誘導する $SU(2)$ の r 個の直積 $SU(2)^r$ から \mathfrak{u} への Lie 群準同型も ϕ で表わすことにする。

すると、 ϕ は equivariant な正則埋め込み

$$\begin{aligned} \rho: SU(2)^r / S(U(1) \times U(1))^r &\longrightarrow M \\ &\simeq S(U(1) \times U(1))^r \longrightarrow \phi(x) \cdot 0, \quad x \in SU(2)^r \end{aligned}$$

を誘導する。 $SU(2)/S(U(1) \times U(1)) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に注意すると、

$SU(2)^r/S(U(1) \times U(1))^r$ は自然に $P^1(\mathbb{C})$ の r 個の直積 $P^1(\mathbb{C})^r$ と同一視されることがわかる。

埋め込み $\rho: P^1(\mathbb{C})^r \rightarrow M$ の像を P と書くことにすれば, ϕ の定義と(6)より

$$\alpha_P \subset \phi(SU(2)^r)$$

となり, A の定義より,

$$A \subset P.$$

また, $\phi(SU(2)^r)$ は U の部分代数で,

$$\phi(SU(2)^r) = \mathfrak{k} \cap \phi(SU(2)^r) + \mathfrak{p} \cap \phi(SU(2)^r)$$

だから, P は M の全測地的部分多様体である。埋め込み ρ は equivariant なので, M から誘導される P の計量は $P^1(\mathbb{C})$ 上の Hermite 対称計量の Riemann 積になる。

Cartan の定理より,

$$(7) \quad M = \bigcup_{k \in K} k \cdot A$$

となり, したがって,

$$M = \bigcup_{k \in K} k \cdot P.$$

この節をまとめると, 次の命題を得る。

命題 3. a) A は M の原点 0 を通る極大全測地的部分多様体である。

b) $P \cong P^1(\mathbb{C})^r$ は M の正則全測地的部分多様体で A を含み, その計量は $P^1(\mathbb{C})$ 上の Hermite 対称計量の Riemann 積に等し

ii.

$$c) \quad M = \bigcup_{k \in K} k \cdot P.$$

埋め込み ρ は Takagi and Takeuchi [7] によって複素射影空間の対称 Kähler 部分多様体の degree を決定する際に使われた。

3. 定理2の証明

まず、定理2の主張を $P^1(\mathbb{C})$ から $P^d(\mathbb{C})$ への Veronese の埋め込み ι_d に対して示す。 $[z_0, z_1]$, $[w_0, w_1, \dots, w_d]$ をそれぞれ $P^1(\mathbb{C})$, $P^d(\mathbb{C})$ の同次座標とすると、Veronese の埋め込み ι_d は、

$$\iota_d [z_0, z_1] = \left[\sqrt{d} C_j z_0^{d-j} z_1^j \right]_{0 \leq j \leq d}$$

によって定義される。 $P^1(\mathbb{C})$, $P^d(\mathbb{C})$ の標準計量に関して、 ι_d は $P^1(\mathbb{C})$ の $P^d(\mathbb{C})$ への正則等長埋め込みになる。

$$C_{[1,0]}(P^1(\mathbb{C})) = \{[0, 1]\},$$

$$C_{[1,0,\dots,0]}(P^d(\mathbb{C})) = \{[w_0, w_1, \dots, w_d] \in P^d(\mathbb{C}) : w_0 = 0\}$$

だから、 $P^1(\mathbb{C})$ の点を ι_d による像と同一視すれば、

$$C_0(P^1(\mathbb{C})) = P^1(\mathbb{C}) \cap C_0(P^d(\mathbb{C})).$$

ただし、 $0 = [1, 0]$ 。

次に、定理2の主張を $P^m(\mathbb{C}) \times P^n(\mathbb{C})$ から $P^{mn+m+n}(\mathbb{C})$ への Segre の埋め込み σ に対して示す。 $[x_i]_{0 \leq i \leq m}$, $[y_j]_{0 \leq j \leq n}$,

$[z_{ij}]_{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n}$ をそれぞれ $P^m(\mathbb{C})$, $P^n(\mathbb{C})$, $P^{m+n+m+n}(\mathbb{C})$ の同次座標とすると, Segre の埋め込み σ は,

$$\sigma([x_i]_{0 \leq i \leq m}, [y_j]_{0 \leq j \leq n}) = [x_i y_j]_{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n}$$

によって定義される。 $P^m(\mathbb{C})$, $P^n(\mathbb{C})$, $P^{m+n+m+n}(\mathbb{C})$ の標準計量に関して σ は $P^m(\mathbb{C}) \times P^n(\mathbb{C})$ から $P^{m+n+m+n}(\mathbb{C})$ への正則等長埋め込みになる。 $P^m(\mathbb{C}) \times P^n(\mathbb{C})$ の cut locus は,

$$\begin{aligned} & C_{([1,0,\dots,0],[1,0,\dots,0])}(P^m(\mathbb{C}) \times P^n(\mathbb{C})) \\ &= C_{[1,0,\dots,0]}(P^m(\mathbb{C})) \times P^n(\mathbb{C}) \cup P^m(\mathbb{C}) \times C_{[1,0,\dots,0]}(P^n(\mathbb{C})) \\ &= \{([x_0, \dots, x_m], [y_0, \dots, y_n]) \in P^m(\mathbb{C}) \times P^n(\mathbb{C}) : x_0 y_0 = 0\} \end{aligned}$$

だから, $P^m(\mathbb{C}) \times P^n(\mathbb{C})$ の点を σ による像と同一視すれば,

$$C_0(P^m(\mathbb{C}) \times P^n(\mathbb{C})) = P^m(\mathbb{C}) \times P^n(\mathbb{C}) \cap C_0(P^{m+n+m+n}(\mathbb{C})).$$

ただし, $0 = ([1,0,\dots,0], [1,0,\dots,0])$.

これを使うと次の補題を示すことができる。

補題4. M , N をそれぞれ $P^m(\mathbb{C})$, $P^n(\mathbb{C})$ の完備 Riemann 部分多様体とし, $p \in M$, $q \in N$ とする。 $0 = (p, q)$ とおく。

$$C_p(M) = M \cap C_p(P^m(\mathbb{C})), \quad C_q(N) = N \cap C_q(P^n(\mathbb{C}))$$

が成り立つと仮定する。 Segre の埋め込みによって $P^m(\mathbb{C}) \times P^n(\mathbb{C})$ は $P^{m+n+m+n}(\mathbb{C})$ の部分多様体とみなせるので, $M \times N$ もまた $P^{m+n+m+n}(\mathbb{C})$ の部分多様体とみなせる。このとき,

$$C_0(M \times N) = M \times N \cap C_0(P^{m+n+m+n}(\mathbb{C}))$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}
& \text{証明. } C_0(M \times N) \\
&= C_p(M) \times N \cup M \times C_q(N) \\
&= (M \cap C_p(\mathbb{P}^m(\mathbb{C}))) \times N \cup M \times (N \cap C_q(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))) \\
&= M \times N \cap C_0(\mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \\
&= M \times N \cap C_0(\mathbb{P}^{m+n}(\mathbb{C}))
\end{aligned}$$

補題5. P は $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の正則 Riemann 部分多様体で, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^r$ と同型であって $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の Hermite 対称計量の Riemann 積を計量として持つとする。このとき,

$$C_p(P) = P \cap C_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$$

が P の各点 P に対して成り立つ。

証明. P が $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の超平面に含まれないと仮定しても, 一般性は失われない。このとき, Nakagawa and Takagi [4] より, P の $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ への埋め込みは equivariant になり, さらに, ある正の整数 d_j ($1 \leq j \leq r$) が存在して, この埋め込みは,

$$\sigma_{r-1}(\dots \sigma_2(\sigma_1(l_{d_1}, l_{d_2}), l_{d_3}), \dots)$$

と同値になる。ただし, l_{d_j} は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ から $\mathbb{P}^{d_j}(\mathbb{C})$ への Veronese の埋め込みで, σ_j は Segre の埋め込みである。したがって, 補題4を繰り返し使うことによって, 補題5を証明することができる。

定理6. M を $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ に正則等長的に埋め込まれている compact 型 Hermite 対称空間とする。このとき, M の各点

P に対して,

$$C_p(M) = M \cap C_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$$

が成り立つ。

証明. 2節での記号をそのまま使うことにする。

$U_1 = \phi(SU(2)^r)$, $K_1 = U_1 \cap K$ とおくと, (U_1, K_1) は Riemann 対称対になり, $P = U_1/K_1$. P は M の全測地的部分多様体だから, A は P の極大全測地的平坦部分多様体にもなっている。したがって,

$$\begin{aligned} C_p(P) &= \bigcup_{k_i \in K_1} k_i \cdot C_p(A) && \text{(2) を } P \text{ に適用)} \\ &= \bigcup_{k_i \in K_1} k_i \cdot (A \cap C_p(M)) && \text{(1) を } M \text{ に適用)} \\ &= \left(\bigcup_{k_i \in K_1} k_i \cdot A \right) \cap C_p(M) \\ &= P \cap C_p(M) && \text{(7) を } P \text{ に適用)}. \end{aligned}$$

したがって, 命題3のc)より,

$$C_p(M) = \bigcup_{k \in K} k \cdot C_p(P).$$

Nakagawa and Takagi [4] より, 埋め込み $M \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ は equivariant なので, K は自然に $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ に正則等長的に作用する。 $P \subset M \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ だから, P は $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ に正則等長的に埋め込まれている。よって補題5より,

$$C_p(P) = P \cap C_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})).$$

これより,

$$C_p(M) = \bigcup_{k \in K} k \cdot C_p(P)$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcup_{k \in K} k \cdot (P \cap C_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))) \\
&= \left(\bigcup_{k \in K} k \cdot P \right) \cap C_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \\
&= M \cap C_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})).
\end{aligned}$$

定理6が示されれば、定理2は定理6の系として得られる。

定理2の証明. $M_2 \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ としておく。 M_1, M_2 に定理6を適用すると、

$$\begin{aligned}
C_p(M_1) &= M_1 \cap C_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \\
&= M_1 \cap M_2 \cap C_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \\
&= M_1 \cap C_p(M_2).
\end{aligned}$$

定理2は、 M_2 が複素射影空間に正則等長的に埋め込まれるという仮定なしに成り立つことが講演後わかったので、それについて簡単に触れておく。詳しくは Tasaki [10] 参照。

実解析的な Kähler 計量を持つ Kähler 多様体 M 上の diastasis D を考える。diastasis は、Calabi [1] によって導入された概念で、 $M \times M$ 上の実解析的関数要素から生成された実解析関数である。 D の定義域は $M \times M$ の対角集合を含むが、必ずしも $M \times M$ 全体には一致しない。diastasis の基本的な性質として次の事実がある。 M, N を実解析的な Kähler 計量を持つ Kähler 多様体とし、 M が N の Kähler 部分多様体であるとする。このとき、 M の diastasis は N の diastasis

の制限になっている。

compact型 Hermite 対称空間 M に対しては、命題3の部分多様体 P を仲介にして、

$$C_p(M) = \{q \in M : D(P, q) \text{ が定義できない}\}$$

が M の各点 P に対して成り立つことがわかる。この結果と先の diastasis の基本的性質とを使えば、次の定理を得る。

定理2'. M_1, M_2 を compact型 Hermite 対称空間とする。 M_1 が M_2 に正則等長的に埋め込まれているならば、 M_1 の各点 P に対して、

$$C_p(M_1) = M_1 \cap C_p(M_2)$$

が成り立つ。

証明. D_1, D_2 をそれぞれ M_1, M_2 の diastasis とする。

$$\begin{aligned} C_p(M_1) &= \{q \in M_1 : D_1(P, q) \text{ が定義できない}\} \\ &= \{q \in M_1 : D_2(P, q) \text{ が定義できない}\} \\ &= M_1 \cap C_p(M_2). \end{aligned}$$

References

- [1] E. Calabi, Isometric imbedding of complex manifolds, Ann. of Math., 58(1953), 1-23.
- [2] R. Crittenden, Minimum and conjugate points in symmetric spaces, Canad. J. Math., 14(1962), 320-328.
- [3] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and

- symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.
- [4] H. Nakagawa and R. Takagi, On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space, J. Math. Soc. Japan, 28(1976), 638-667.
- [5] T. Sakai, On cut loci of compact symmetric spaces, Hokkaido Math. J., 6(1977), 136-161.
- [6] T. Sakai, On the structure of cut loci in compact Riemannian symmetric spaces, Math. Ann., 235(1978), 129-148.
- [7] R. Takagi and M. Takeuchi, Degree of symmetric Kahlerian submanifolds of a complex projective space, Osaka J. Math., 14(1977), 501-518.
- [8] M. Takeuchi, On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces I, Tsukuba J. Math., 2(1978), 35-68.
- [9] M. Takeuchi, On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces II, Tsukuba J. Math., 3(1979), 1-29.
- [10] H. Tasaki, The cut locus and the diastasis of a Hermitian symmetric space of compact type, to appear.