数理解析研究所講究録
489巻 1983年 54-58

定幅曲線と凸面鏡

岩手医科大学教養部
柳本 浩
(Hiroshi Yanamoto)

$\boxed{\text{問題}}$ 平面内の卵形線Mを凸面鏡と見なし、Mの内部に光源Lを置く。そのとき、

(1) "光源Lから出た光が凸面鏡Mに二度反射されて光源Lに戻る。" ....(#)

ような光線は少くとも何本あるか？

(2) "光源Lから出たすべての光線が凸面鏡Mに二度反射されて光源Lに戻る" ....(##)

為の条件は何か？

$\boxed{\text{準備}}$ 光源Lに関するMの波面(Wavefront of M relative to L)

$W=\{L_p\,;\ \forall p\in M,\ \ y=2\langle x, e_2\rangle e_2\}$ をとり、

Mの各点Pにおける曲率を $\kappa(>0)$ とすれば、Wの点 L_p における曲率 $\bar{\kappa}$ は、

$$\bar{\kappa}=\frac{1}{r}-\frac{p}{2r^3\cdot\kappa}$$

で与えられる。ここで r は、

$$r=-\frac{\langle y, y\rangle}{2\langle y, n\rangle}$$

を満す。(図1を参照)

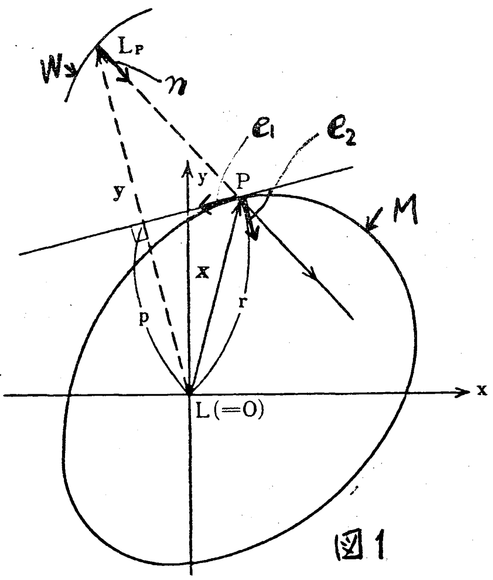

図1

(J. W. Brue et al. [1], P664).

〈注〉凸面鏡Mの光源Lに関する波面は卵形線とは限らない。例えば、Oを中心とし、半径1の円を凸面鏡とし、光源Lを$\overline{OL} < \frac{1}{2}$にとれば、Wは卵形線(oval epitrochoid)であるが、$\frac{1}{2} \leqq OL < 1$のときは、$\kappa \leqq 0$の点L_pがある。

$\boxed{\text{解答}}$ 問題(1)に関して、凸面鏡MのLに関する波面Wが卵形線となる場合、(#)を満たす光線の一回目の反射光線はWの重法線(double normal)になっているから、

N. H. Kuiper ([2])の定理より、

<u>Prop. 1</u> 凸面鏡Mの光源Lに関する波面Wが卵形線ならば、光源Lから出て二度反射されLに戻る光線は少なくとも二本ある。

問題(2)に関して、次の<例>に注目しよう。

<例> 楕円曲線Mを凸面鏡とし、焦点の1つFに光源Lを置けば、(#)を満たす。このとき、波面Wはもう一つの焦点F′を中心とする半径$\overline{FF'}/e$ (e:離心率)の円である。さて、

<u>Prop. 2</u> 凸面鏡Mの光源Lに関する波面Wが卵形線とする。(#)を満たすならば、Wは定幅曲線である。

なぜならば、Lから出たすべての光線の一回目の反射光線が波面Wの任意の重法線になるからである。

逆に、

<u>Prop.3</u>　Wを定幅な卵形線とし、W内に定点Lをとる。

WのLからの位置ベクトルyが

$$\frac{1}{\kappa} > r = -\frac{\langle y, y\rangle}{2\langle y, n\rangle} \quad (>0)$$

を満たすならば、

$M: x = y + rn$ により、Lを光源とする凸面鏡Mは

(##)を満たし、Mの波面はWと一致する。

〈例1〉 解析的ルローの三角形W内に光源$L=O=(0,0)$をとる。

$W: \; y = (h\cdot\cos\theta - h'\cdot\sin\theta,\; h\cdot\sin\theta + h'\cdot\cos\theta)$,

ここで、$h = a + b\cos 3\theta \quad (0 < 8b < a)$.

これより、$n = -(\cos\theta, \sin\theta)$

$\kappa = 1/(h + h'') = 1/(a - 8b\cdot\cos 3\theta) > 0$ を得る。

今、Wを $h = a + b\cos 3\theta \; (0 < 17b < a)$にとり、

Mを $M: x = y + rn$

$$r = -\langle y, y\rangle / 2\langle y, n\rangle = (h^2 + h'^2)/(2h)$$

とすれば、$\kappa > 0$ を得る。(図2を参照)

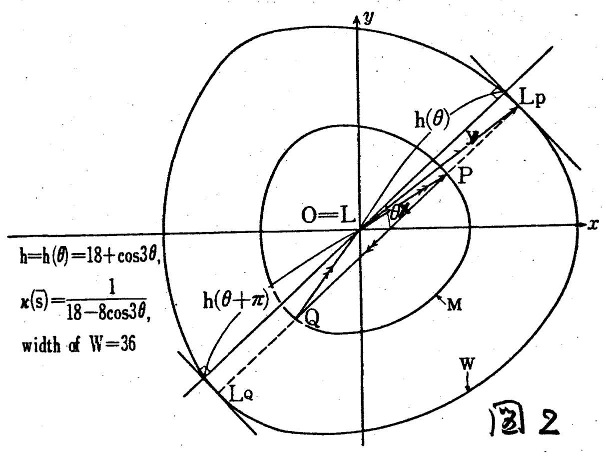

図2

〈例2〉 図3のような、凸状の部分弧$\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$で作られる閉曲線Γの伸開線をWとすれば、Wは定幅曲線である。今、Γ内に光源Lをとり、WのLに関する位置ベクトルyが、$1/\kappa > r = -\langle y, y\rangle / 2\langle y, n\rangle > 0$ を満たすように$\overline{AA'}$を十分大きくとれば、(##) を満たす凸面鏡 M: $x = y + rn$ を得る。かつ、Mの反射光線によって出来るcuspsはΓに一致する。

（図3, 4参照）

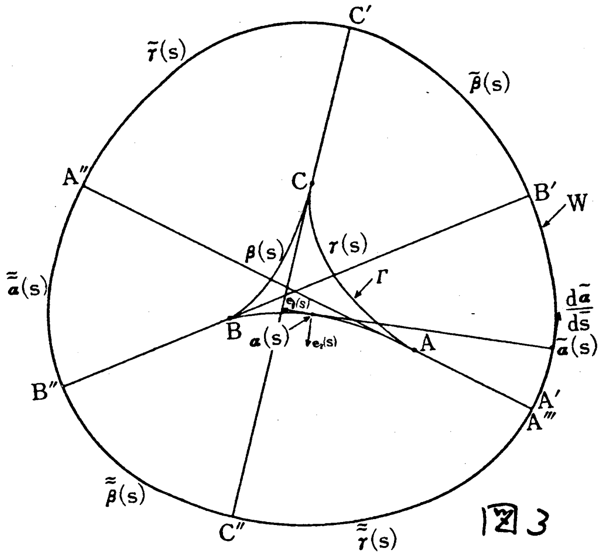

図3

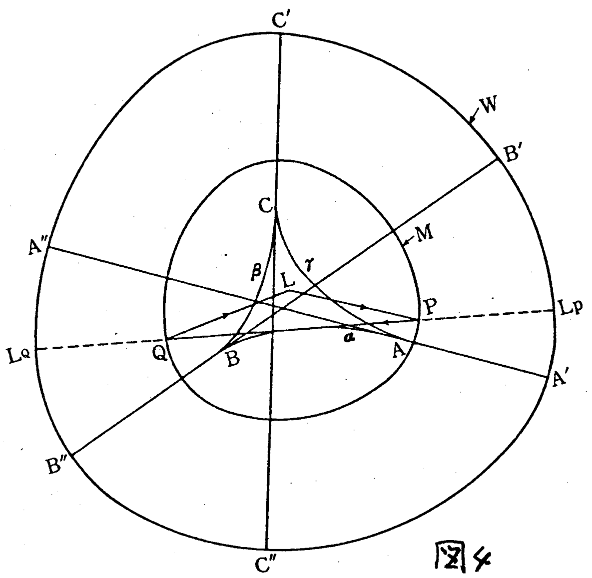

図4

$\boxed{\text{関連事項}}$

(i) 撞球問題に関しては、高橋[4] 及び、次の定理が知られている（Birkhoff[3] 参照）。

<u>Prop</u> (Poincaré) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を強凸状完閉C^∞−領域とする。$2m \leq n$ なる各自然数m, nに対して、mを回転数, nを反射数とする閉測地線の集合$\Gamma(m, n)$は空でない。

(ii) 問題(1),(2) は"定幅曲面と凸面鏡"と曲面に拡張できる。

文献

[1] J.W. Bruce, P.J. Giblin and C.G. Bibson; On caustics of plane curves, American Math Monthly Vol 1, 88, No.9, 1981, p651 − 667

[2] N.H. Kuiper; Double normals of convex bodies.

[3] Birkhoff ; Dynamical systems, Colloq, Publ., Vol IX, Amer. Math. Soc., 1927

[4] 高橋秀俊著; 数理と現象(岩波書店) 1975, 楕円に反射する光線(P113 − 120)

[5] H. Yanamoto ; Some Remarks on Geometical Optics, Ann. Dep. of Iwate M. Univ. (No.17), p65 ~ 92, 1982