

ピンチされた4次元多様体の極小曲面の安定性

京大理 河合茂生 (Shigeo Kawai)

本稿は, S. Kawai: On the instability of a minimal surface in a 4-manifold whose curvature lies in the interval $(\frac{1}{4}, 1]$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 18 (1982), 1067-1075 の解説である。

M を compact orientable manifold で, ある Riemannian manifold に minimal に immerse されたものとする。このとき M が不安定であるとは, M 上の normal vector field u が存在して, u 方向の第2変分が負となることである。

球面定理, 及び stable current と homology 群の関係から, Lawson と Simons は次のことを予想した。「complete simply-connected Riemannian manifold で, 断面曲率が $(\frac{1}{4}, 1]$ にふくまれるようなもののすべての minimal current は不安定である。」

これに対し Aminov は「く弱い形ではあるが, 次のよ

うな肯定的結果を出した。

定理 (Amimov). N は complete, simply-connected Riemannian manifold で断面曲率が $(\frac{1}{4}, 1]$ にふくまれているものとする。 $M \subset N$ に minimal に immerse された surface で、2次元球面に homeomorphic なものとするとき、 M は不安定である。

N が4次元のとき、この結果は次のように拡張されることを示すのが、目的である。

定理. N は4次元 orientable な Riemannian manifold でその断面曲率が $(\frac{1}{4}, 1]$ にふくまれているものとする。 $M \subset N$ は orientable な compact surface で N に minimal に immerse されているものとする。このとき、 M の normal bundle の (いづれかの向きづけに対する) Euler 数が M の genus 以上であれば、 M は不安定である。

証明. 2段階に分けて証明する。

① normal bundle の section $u \neq 0$ が存在して、ある微分方程式をみたせば、 M は不安定となることを示す。

② その微分方程式をみたす section $u \neq 0$ の存在を示す。

①の証明. J は normal bundle ν の complex structure とし、 ∇ は ν の connection とする。

命題 1. $\nabla J = 0$.

R を ν の curvature $\times (2)$, ν の section u に対して M 上の function $S(u)$ を

$$S(u)(p) = \langle R(e, Ie)u(p), Ju(p) \rangle$$

で定義する. ただし, e は T_pM の unit vector, I は TM の complex structure である.

命題 2. ν の section u が

$$(*) \quad J \circ \nabla u = \nabla u \circ I$$

をみたせば,

$$\langle \Delta u, u \rangle + S(u) = 0$$

をみたす. ただし, $\Delta = \nabla^* \circ \nabla = -\text{tr}(\nabla \nabla u)$.

証明. $e \in T_pM$ の unit vector, $E \in \mathcal{P}$ のまわりの local vector field z , $E(p) = e$, $(\nabla E)(p) = 0$ をみたすものとするとき,

$$\begin{aligned} R(e, Ie)u &= \nabla_e \nabla_{Ie} u - \nabla_{Ie} \nabla_e u \\ &= \nabla_e (J \nabla_{Ie} u) + \nabla_{Ie} \nabla_{Ie} u \\ &= J \nabla_e \nabla_{Ie} u + \nabla_{Ie} (J \nabla_{Ie} u) \\ &= J (\nabla_e \nabla_{Ie} u + \nabla_{Ie} \nabla_{Ie} u) \\ &= -J \Delta u. \end{aligned}$$

(したがって,

$$\langle R(e, Ie)u, Ju \rangle = \langle -J \Delta u, Ju \rangle = -\langle \Delta u, u \rangle$$

となり、求める結果を得る。

注意. 命題1. から, u が (*) をみたせば, $Ju \neq (*)$ をみたす.

さて, $\bar{R} \in N$ の curvature τL , U の section u に対し, M 上の function $\bar{S}(u)$ を次の式で定義する.

$$\bar{S}(u)(p) = \langle \bar{R}(u(p), e) e, u(p) \rangle + \langle \bar{R}(u(p), Je) Je, u(p) \rangle$$

ただし e は $T_p M$ の unit vector である.

M の volume の, u 方向の第2変分 $\delta^2(u)$ は次のようにかける.

$$\delta^2(u) = \int_M \{ \langle \Delta u, u \rangle - \bar{S}(u) - \|A^u\|^2 \} dV.$$

ただし, A^u は u 方向の第2基本型式, dV は M の volume form である.

命題3. N の断面曲率が $(\frac{1}{4}, 1]$ に含まれるとする.

$u \neq 0$ が (*) の解ならば,

$$\delta^2(u) + \delta^2(Ju) < 0.$$

証明. $\delta^2(u) + \delta^2(Ju)$ の被積分関数は.

$$\begin{aligned} & \langle \Delta u, u \rangle - \bar{S}(u) - \|A^u\|^2 + \langle \Delta(Ju), Ju \rangle - \bar{S}(Ju) - \|A^{Ju}\|^2 \\ (**) & = \{ \langle \Delta u, u \rangle + S(u) + \langle \Delta(Ju), Ju \rangle + S(Ju) \} \\ & \quad - \{ S(u) + S(Ju) + \bar{S}(u) + \bar{S}(Ju) + \|A^u\|^2 + \|A^{Ju}\|^2 \} \end{aligned}$$

となるが, Ricci identity より.

$$S(u)(p) = \langle \bar{R}(e, Je) u(p), Ju(p) \rangle$$

$$+ \langle A^{Ju(p)}(e), A^{u(p)}(Ie) \rangle - \langle A^{u(p)}(e), A^{Ju(p)}(Ie) \rangle$$

となる。また,

$$\begin{aligned} S(Ju(p)) &= - \langle \bar{R}(e, Ie) Ju(p), u(p) \rangle \\ &\quad - \langle A^{u(p)}(e), A^{Ju(p)}(Ie) \rangle + \langle A^{Ju(p)}(e), A^{u(p)}(Ie) \rangle \\ &= S(u(p)). \end{aligned}$$

(したがって,

$$\begin{aligned} S(u(p)) + S(Ju(p)) &= -2 \langle \bar{R}(e, Ie) u(p), Ju(p) \rangle \\ &\quad + 2 \langle A^{Ju(p)}(e), A^{u(p)}(Ie) \rangle - 2 \langle A^{u(p)}(e), A^{Ju(p)}(Ie) \rangle. \end{aligned}$$

これから, (*) の右辺2項は次のようにおける.

$$\begin{aligned} &- \{ 2 \langle \bar{R}(e, Ie) u, Ju \rangle + \bar{S}(u) + \bar{S}(Ju) \} \\ &- \{ 2 \langle A^{Ju}(e), A^u(Ie) \rangle - 2 \langle A^u(e), A^{Ju}(Ie) \rangle \\ &\quad + \|A^u\|^2 + \|A^{Ju}\|^2 \}. \end{aligned}$$

N の断面曲率が $[a, 1]$ にふくまれているとき ($a > 0$), Berger の不等式により,

$$\begin{aligned} &2 | \langle \bar{R}(e, Ie) u, Ju \rangle | - \bar{S}(u) - \bar{S}(Ju) \\ &\leq \left\{ 2 \cdot \frac{2}{3} (1-a) - 4a \right\} \|u(p)\|^2 \\ &= \frac{4}{3} (1-4a) \|u(p)\|^2 \end{aligned}$$

(したがって, $\forall a > \frac{1}{4}$ 存在, \exists かつ $u(p) \neq 0$ 存在点 p が負である.

また,

$$\begin{aligned}
& 2 \langle A^{J^4}(e), A^4(Ie) \rangle - 2 \langle A^4(e), A^{J^4}(Ie) \rangle \\
& + \|A^4\|^2 + \|A^{J^4}\|^2 \\
& = \|A^{J^4}(e) + A^4(Ie)\|^2 + \|A^4(e) - A^{J^4}(Ie)\|^2 \\
& \geq 0
\end{aligned}$$

2'あるから, $\delta^2(u) + \delta^2(J^4u) < 0$ が示された.

②の証明.

補題. normal bundle ν は, ある holomorphic line bundle の構造をもち, $(*) J \circ \nabla u = \nabla u \circ I$ の解は, その holomorphic section と一致する.

もし, この証明がきたとすると, $u \neq 0$ なる $(*)$ の解の空間の次元は, Riemann-Roch の定理を使ってしるべしである. $\chi(\nu)$ を ν の Euler 数, $g(M)$ を M の genus とするとき,

$$\dim H^0(M, \nu) - \dim H^1(M, \nu) = \chi(\nu) + 1 - g(M)$$

だから,

$$\dim H^0(M, \nu) \geq \chi(\nu) + 1 - g(M).$$

したがって定理の証明は明らかなのである.

補題の証明. $(*) J \circ \nabla u = \nabla u \circ I$ の local relation を各点のまわりにつくって, その line bundle の frame をつくることを考える. $z = x + iy \in M \ni p$ のまわりの local coordinate とすると,

$$J \circ \nabla U = \nabla U \circ I \Leftrightarrow J \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} U = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} U.$$

$m, JM \in P$ のまわりの ν の orthonormal frame とし,

$$u = fM + gJM \quad (f, g \text{ は } \mathbb{R}\text{-valued function})$$

とすると,

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} - g \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} M, JM \rangle = -\frac{\partial g}{\partial x} - f \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} M, JM \rangle \\ \frac{\partial f}{\partial x} - g \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} M, JM \rangle = \frac{\partial g}{\partial y} + f \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} M, JM \rangle. \end{cases}$$

ここで, $\alpha = \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} M, JM \rangle$, $\beta = -\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} M, JM \rangle$ とおけば,

$$(**) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z} (f+i'g) = \frac{1}{2}(\alpha+i'\beta)(f+i'g).$$

ところが, 方程式 $\frac{\partial}{\partial z} F = \frac{1}{2}(\alpha+i'\beta)F$ は local solution

$F \in \mathbb{C}$ がある. (したがって $f+i'g = \exp F$ とすると, (**) は

(**) の解であり, non-zero である. よって, 各点 p のまわ

りに, (**) の解 u_p, Ju_p がある. 次のような bundle chart がつくられる.

$$\begin{aligned} \varphi_p : U_p \times \mathbb{C} &\longrightarrow \pi^{-1}(U_p) \\ &\downarrow \\ (z, a+ib) &\longmapsto au_p(z) + bJu_p(z), \end{aligned}$$

ただし, U_p は u_p の定義域, π は normal bundle ν の projection である. $z \in U_p \cap U_q$ のとき,

$$u_q = m u_p + n J u_p \quad (m, n \text{ は } \mathbb{R}\text{-valued function})$$

とすると, u_p, u_q がともに (**) の解であることは,

$$Xm - (IX)n = 0,$$

$$(IX)m + Xn = 0$$

が、 $\forall z \in T_p M$ に対して成り立つ、これは \mathbb{C} -valued function $m+i'n$ が $U_p \cap U_q$ 上 holomorphic であること
を示す。ところが、transition function $g_{qp} = \varphi_q \circ \varphi_p^{-1}$ は

$$g_{qp}(z) = \{(m+i'n)(z)\}^{-1}$$

だから、 $\{\varphi_p\}_{p \in M}$ によって ν は holomorphic line bundle の構造を持つ。

この構造に関する holomorphic sections が (10) の解と一致することは定義からわかる。故に補題が示された。

定理の系として次のようなことがわかる。

系1, M が 2次元球面と homeomorphic $\Leftrightarrow M$ は不安定。
これは Aminov の結果の $\dim N=4$ の場合である。

系2, M が 2次元 torus と homeomorphic で normal bundle が trivial である $\Rightarrow M$ は不安定。

文献

1. Aminov : Math. USSR Sbornik 29, 359-375 (1976).
2. Lawson, Simons : Ann. of Math. 98, 427-450 (1973).