数理解析研究所講究録
489巻 1983年 41-45

Einstein 計量と Riemann サブマージョン

東工大 理 松沢忠幸 (Tadayuki Matsuzawa)

Hopf ファイブレーションは、その標準的な計量とあわせて、Riemann サブマージョンの典型的な例となっている。他方、その計量は(等質的) Einstein 計量の典型的な例ともなっている。Einstein 計量とサブマージョンとの関連との立場から、以下の結果に注目する。Jenzen [4] は Riemann 多様体 $(B, \langle\ ,\ \rangle_B)$ 上の主束 $P(B, G)$ の全空間 P 上に、射影 $\pi: P \to B$ が Riemann サブマージョンとなるような計量を与え、その計量が Einstein 計量となる条件を考察した: まず、P 上に接続形式 γ, G 上に両不変計量 $\langle\ ,\ \rangle_G$ を与え, P 上の計量 $\langle\ ,\ \rangle_t$ $(t>0)$ を

$$\langle E, F\rangle_t = t\langle \gamma E, \gamma F\rangle_G + \langle \pi_* E, \pi_* F\rangle_B$$

と定めて、この計量が Einstein 計量となるような正値 t の存在、非存在を問うた。より具体的には、コンパクト連結 Lie 群 K, その連結閉部分群 H (H は更にその閉正規部分群 H_1, H_2 の直積と局所的に同型となっているとする) をとり、$P = K/H_2$, $B = K/H$, $G = H_1$, 又接続形式としては—— K 上に H_1, H_2 の Lie 環が直交するような両不変計量を与えて—— H_1 の Lie 環への射

影からP上に自然に定まるK不変接続をとって，議論する。こうして奇数次元球面S^{4n+3}やStiefel多様体上に標準的でない Einstein 計量が見出された。

又，Ziller [8] は，球面や射影空間に等質的に作用する群の分類を利用して，これらの空間上の等質的 Einstein 計量を決定した。そして複素奇数次元射影空間$\mathbb{C}P^{2n+1}$上に標準的でない Einstein 計量が見出されたのであるが，この計量は次のファイブレーション $S^2 \longrightarrow \mathbb{C}P^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{H}P^n$ と密接に関連している。

これらの構成を，Riemann サブマージョンの立場から見て，等質性の仮定なしで，以下に述べる定理を得た：$\pi : M \longrightarrow B$ を Riemann サブマージョンとする。全空間$(M, \langle\,,\,\rangle)$は連結，完備，各ファイバー$\pi^{-1}(b)$ $(b \in B)$は全測地的であると仮定する。このとき，Hermann [3] によれば，各ファイバーは互いに等長的であるので，例えば「ファイバーの Ricci テンソル」のような言葉使いに意味がある。今，全空間$(M, \langle\,,\,\rangle_M)$，底空間$(B, \langle\,,\,\rangle_B)$，及び各ファイバー$(\pi^{-1}(b), \langle\,,\,\rangle_F)$は Einstein 計量をもつとする。従って各空間の Ricci テンソルは，適当な定数λ^M, λ^B, λ^Fをとって，

$$Ric^M = \lambda^M \langle\,,\,\rangle_M \quad , \quad Ric^B = \lambda^B \langle\,,\,\rangle_B \; ,$$

$$Ric^F = \lambda^F \langle\,,\,\rangle_F$$

と書ける。以上の仮定のもとで，

<u>定理</u>（［6］）　$t = \lambda^F/(\lambda^B - \lambda^F)$　の値が正値かつ1ではないとすると，値 t に対応する全空間の計量のファイバー方向への相似変形 $\langle\, ,\rangle_t$ は，全空間に今一つの Einstein 計量を与える。

ここで，正値 t に対応するファイバー方向への相似変形とは，次の様にして定まる Riemann サブマージョンに「自然」な計量の変形である（Berard Bergery and Bourguignon［　］を見よ）：M の接空間に於いて，垂直方向（ファイバーに接する方向），水平方向（垂直方向と直交する方向）への射影をそれぞれ $\mathcal{V}$，$\mathcal{H}$ とする。このとき M 上の新しい計量 $\langle\, ,\rangle_t$ を，

$$\langle E, F\rangle_t \equiv t\langle \mathcal{V}E, \mathcal{V}F\rangle + \langle \mathcal{H}E, \mathcal{H}F\rangle \quad (E, F \in T_mM)$$

で定める。

<u>略証明</u>　O'Neill［7］による曲率テンソルの公式によって，計量 $\langle\, ,\rangle_t$ の Ricci テンソルを計算してみると，

$$Ric^t_{VW} = (\lambda^F/t + t(\lambda^M - \lambda^F))\langle V, W\rangle_t$$

$$Ric^t_{VX} = 0$$

$$Ric^t_{XY} = (\lambda^B + t(\lambda^M - \lambda^B))\langle X, Y\rangle_t$$

となる。ここで V, W は垂直方向，X, Y は水平方向のベクトルである。従って $\langle\, ,\rangle_t$ が Einstein 計量を与えるならば t は2次方程式

$$\lambda^F/t + t(\lambda^M - \lambda^F) = \lambda^B + t(\lambda^M - \lambda^B)$$

を満たさねばならない。この方程式の解の一方は 1，他方が定理に述べた値である。（証明終）

以下若干の計算例を与える。残念ながら、新しい Einstein 計量の例を与えることができないので，ここではよく知られた例を再確認するにとどめる。

i) $S^3 \longrightarrow S^{4n+3} \longrightarrow \mathbb{H}P^n$: $\lambda^B = 4(n+2)$, $\lambda^F = 2$. 従って $t = 1/(2n+3)$。これは Jenzen [4] の例である。

ii) $S^7 \longrightarrow S^{15} \longrightarrow S^8(4)$: 底空間は定曲率 4 の空間形であるから $\lambda^B = 28$, $\lambda^F = 6$. 従って $t = 3/11$。これは Bourguignon-Karcher [2] の例である。

Ziller [8] によれば，球面上の等質的 Einstein 計量は，標準的なものの他 i) 及び ii) でつきている。他方 i) 及び ii) の Einstein 計量はそれぞれ $\mathbb{H}P^{n+1}$, $\mathbb{C}aP^2$ の距離球（測地球面）として実現されている：Bourguignon-Karcher [2]。類似の事——部分多様体としての実現——は Jenzen [4] の与えた，他の Einstein 計量についても成立する場合がある：Jenzen [5] を見よ。

iii) $S^2(4) \longrightarrow \mathbb{C}P^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{H}P^n$; $\lambda^B = 4(n+2)$, ファイバーは定曲率 4 の空間形であるから $\lambda^F = 4$，従って $t = 1/(n+1)$。これは Ziller [8] の例である。

再び，Ziller によれば，射影空間 $\mathbb{K}P^n$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{C}a)$ 上の等

質的 Einstein 計量は，標準的なものの他 iii) でつきている。

文献

[1] Berard Bergery L. and Bourguignon J. P. : Laplacian and Riemannian submersions with totally geodesic fibres. Lecture Notes in Math. 838, 30 - 35 (1981)

[2] Bourguignon J. P. and Karcher H. : Curvature operators : Pinching estimates and geometric examples. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4e série, t. 11 71 - 92 (1978)

[3] Hermann R. : A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fibre bundle. Proc. Amer. Math. Soc. 11, 236 - 242 (1960)

[4] Jenzen G. R. : Einstein metrics on principal fibre bundles. J. Diff. Geom. 8, 599 - 614 (1973)

[5] 〃 : Imbeddings of Stiefel manifolds into Grassmannians. Duke Math. J. Vol 42 397 - 407 (1975)

[6] Matsuzawa T. : Einstein metrics and fibred Riemannian. structures. to appear.

[7] O'Neill B. : The fundamental equations of a submersion. Michigan Math. J. 13, 459 - 469 (1966)

[8] Ziller W. : Homogeneous Einstein metrics on spheres and projective spaces. Math. Ann. 259, 351 - 358 (1982)