数理解析研究所講究録
489巻 1983年 1-16

四元数射影空間の平行部分多様体

都立大理　塚田和美（Kazumi Tsukada）

次のような問題を考えよう。

問題：　$\tilde{M}$を Riemann 対称空間, $f: M \to \tilde{M}$ を Riemann 多様体Mから$\tilde{M}$への第2基本形式が平行な isometric immersionとする。この時 Mとfを決定せよ。

以上の時，Mは局所 Riemann 対称空間になることが知られており，対称空間の様々な理論との関連で興味深い。以後fによって $\tilde{M}$に immerse されたMのことを$\tilde{M}$の<u>平行部分多様体</u>と呼ぶことにする。ここでは$\tilde{M}$が四元数射影空間 $P_n(\mathbb{H})$, その non-compact dual の時 平行部分多様体を決定すること を試みる（Theorem 2.2，Theorem 2.3）。

$\tilde{M}$が複素空間形の時その平行部分多様体は内藤氏によって精密でかつ最終的な形で決定されたが（[3],[4]），その時使われた方法はかなり一般の対称空間に対して上の問題を解決する方向性を与えていると思われる。そこで最初に私なりに

内藤氏の方法を整理してみる；

上の問題に対して「M は Riemann 対称空間で f は equivariant immersion になる」と解答の"目星"をつける。即ち $(\tilde{G},\tilde{K})$, (G,K) をそれぞれ $\tilde{M}$ 及び M に対応する Riemann 対称対とする時, Lie 群の準同型 $\rho: G \longrightarrow \tilde{G}$ があって各点 $p \in M$ 及び各元 $g \in G$ に対して $f(g \cdot p) = \rho(g) f(p)$ となる。この"目星"に沿って次の２つの Steps を実行する。

<u>1st Step</u> Reduction Theorem (Theorem 2.2 に相当)

例えば 複素射影空間 $P_n(\mathbb{C})$ の平行部分多様体 M は次の図式によって $P_n(\mathbb{H})$ の平行部分多様体になっている。

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & P_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & P_n(\mathbb{H}) \\ & \text{才２基本形式平行} & & \text{全測地的} & \\ & & & \text{(totally geodesic)} & \end{array}$$

本質的にどこの平行部分多様体か区別し整理しておく必要がある。また次の Step の準備として問題を代数化する必要がある。そのために次のような状態にしておきたい；

$$T_pM + N_p^1(M) = T_p\tilde{M}$$

ここで $N_p^1(M)$ は才２基本形式の像の張る $T_p\tilde{M}$ の部分空間である。才２基本形式が平行となっていることから，immersion の微分幾何学的量としては才２基本形式までしか捉えることができない。従って才２基本形式までですべて制御で

きるようにしておくことが望まれる。以上が Reduction Theorem のもうひとつの意義である。

<u>2nd Step</u> 平行部分多様体の model の構成.

$\tilde{G}$ 及び G の Lie 環をそれぞれ $\tilde{\mathfrak{g}}$ 及び $\mathfrak{g}$ とする時，才2基本形式が平行になるような immersion が得られるように Lie 環の準同型 $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ を構成することが本質である。今まで実及び複素空間形についてその平行部分多様体が決定されているが，Lie 環の準同型の構成という点から見れば一般的手法はまだ見出されていず，各個撃破的と思われる。

以下この論説では $P_n(\mathbb{H})$ を含む Riemann 多様体の class である Quaternionic Kaehler manifold の部分多様体論を紹介し，1st Step の Reduction Theorem を述べることを主目標にしよう。

§1. Quaternionic Kaehler manifold とその部分多様体

まず線形代数学の準備をしよう。$\mathbb{H}$ を四元数体 即ち

$$\mathbb{H} = \{ \lambda = a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j \}$$ とする。

V を右からのスカラー積及びエルミート内積 $(\ ,\ )$ をもつ $\mathbb{H}$ 上の Vector space とする。特に Quaternionic Hermitian vector space と呼ぶ。この Vector space を Real vector space として捉えたい。そのために次のような(実)線形変換の作る代数 A 及び ユークリッド内積 $\langle , \rangle$ をもつ Real vector space V を考える。

(1.1)
(1) Aは$\mathbb{H}$と同型で Aの単位元が恒等変換に対応している。
(2) $\mathbb{H}$の i, j, kに対応するAの元をそれぞれ $\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}$とする時, $\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}$ で張られる Aの部分空間をA'とおく。ユークリッド内積$\langle , \rangle$はA'の元で不変。即ち $L \in A'$, $u, v \in V$ に対して, $\langle Lu, v\rangle + \langle u, Lv\rangle = 0$。

<u>Lemma 1.1</u> Quaternionic Hermitian vector space $(V, (,))$ から (1.1)を満たす Real vector space $(V, A, \langle , \rangle)$ が構成でき逆も成立する。

Quaternionic Hermitian vector space $(V, (,))$ から Real vector space $(V, A, \langle , \rangle)$ を構成するには, まずVの係数体を $\mathbb{R}$ に制限して real vector space を得る。次に(実)線形変換 $\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}$ を $u \in V$に対して $\tilde{I}u = u(-i)$, $\tilde{J}u = u(-j)$, $\tilde{K}u = u(-k)$ で定義する。これらと恒等変換を合わせて A を生成する。さらに エルミート内積 $(,)$の実部分をとって ユークリッド内積 $\langle , \rangle$ を定義すれば A

及び $\langle , \rangle$ は (1.1) を満たす。この過程の逆をたどれば，Real vector space $(V, A, \langle , \rangle)$ を Quaternionic Hermitian vector space と見なせる。

各点の接空間が Real vector space として捉えた Quaternionic Hermitian vector space となりかつその構造が平行移動で不変になっている Riemann 多様体として Quaternionic Kaehler manifold を定義する。即ち

<u>Definition 1.2</u> (石原 [2]) $\tilde{M}$ を連結な可微分多様体，A' を (1,1)型のテンソルから成る Vector bundle $\mathrm{Hom}(T\tilde{M}, T\tilde{M})$ の 3-dim subbundle, $\tilde{g}$ を $\tilde{M}$ 上のリーマン計量とする。A', $\tilde{g}$ が次の性質を満たす時 $(\tilde{M}, A', \tilde{g})$ を <u>Quaternionic Kaehler manifold</u> と呼ぶ。

(a) $\tilde{M}$ の各座標近傍 U 上で次のような A' の local base $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ がとれる;

$$\tilde{I}^2 = \tilde{J}^2 = \tilde{K}^2 = -id, \quad \tilde{I}\tilde{J} = -\tilde{J}\tilde{I} = \tilde{K},$$
$$\tilde{J}\tilde{K} = -\tilde{K}\tilde{J} = \tilde{I}, \quad \tilde{K}\tilde{I} = -\tilde{I}\tilde{K} = \tilde{J},$$

ここで id は恒等変換を表わす。

これらの式を満たす A' の local base を canonical base と言うことにする。

(b) 任意の点 p に対して $\tilde{g}_p$ は A'_p の元で不変。即ち $L \in A'_p$, $u, v \in T_p\tilde{M}$ に対して $\tilde{g}_p(Lu, v) + \tilde{g}_p(u, Lv) = 0$。

(c) A' は $(\tilde{M}, \tilde{g})$ の Riemannian connection $\tilde{\nabla}$ に関して parallel。即ち $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ を $\tilde{U}$ 上の canonical base とすると、$\tilde{U}$ 上で定義された 1-forms α, β, γ が存在して

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{I} = \qquad \gamma(X)\tilde{J} - \beta(X)\tilde{K}$$
$$\tilde{\nabla}_X \tilde{J} = -\gamma(X)\tilde{I} \qquad + \alpha(X)\tilde{K}$$
$$\tilde{\nabla}_X \tilde{K} = \beta(X)\tilde{I} - \alpha(X)\tilde{J}$$

が成り立つ。

容易に分るように A'_p と恒等変換で生成された線形変換の部分空間を A_p とおけば、$(T_p\tilde{M}, A_p, \tilde{g}_p)$ は Quaternionic Hermitian vector space である。

例 Wolf ([7]) は Riemann 対称空間の中で Quaternionic Kaehler manifold となるものを分類している。$P_n(\mathbb{H})$ 及びその non-compact dual もその class の中に含まれる。

ここで $P_n(\mathbb{H})$ 及びその non-compact dual の curvature tensor $\tilde{R}$ を Quaternionic Kaehler structure の言葉を使って表示しよう。

Proposition 1.3 (石原 [2]) $P_n(\mathbb{H})$ $(n \geqq 2)$ 及びその non-compact dual の curvature tensor $\tilde{R}$ は次の形をしている。

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \frac{\tilde{c}}{4}\{\tilde{g}(Y,Z)X - \tilde{g}(X,Z)Y + \tilde{g}(\tilde{I}Y,Z)\tilde{I}X - \tilde{g}(\tilde{I}X,Z)\tilde{I}Y$$
$$+\tilde{g}(\tilde{J}Y,Z)\tilde{J}X - \tilde{g}(\tilde{J}X,Z)\tilde{J}Y + \tilde{g}(\tilde{K}Y,Z)\tilde{K}X - \tilde{g}(\tilde{K}X,Z)\tilde{K}Y$$
$$-2\tilde{g}(\tilde{I}X,Y)\tilde{I}Z - 2\tilde{g}(\tilde{J}X,Y)\tilde{J}Z - 2\tilde{g}(\tilde{K}X,Y)\tilde{K}Z\}$$

ここで $P_n(\mathbb{H})$ の時 $\tilde{c} > 0$ で,

その non-compact dual の時 $\tilde{c} < 0$ である。

次に Quaternionic Kaehler manifold の3種類の部分多様体を定義しよう。その準備として Quaternionic Hermitian vector space の次の3種類の実部分空間を考える。

<u>Definition 1.4</u> (船橋 [1]) $(V, A, \langle\ ,\ \rangle)$ を Quaternionic Hermitian vector space とし, A' を $\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}$ で張られた A の subspace とする。V の実部分空間 W が

① invariant $\Longleftrightarrow$ 任意の $L \in A'$ について $LW \subset W$。

② totally complex $\Longleftrightarrow$ A' の 1-dim subspace A_0 が存在して任意の $L \in A_0$ について $LW \subset W$ かつ A_0 に直交する任意の $L \in A'$ について $LW \perp W$。

③ totally real $\Longleftrightarrow$ 任意の $L \in A'$ について $LW \perp W$

以上の subspaces を model にして, 3種類の immersions を定義する。

<u>Definition 1.5</u> ([1]) $(\tilde{M}, A', \tilde{g})$ を Quaternionic Kaehler manifold, $f : M \to \tilde{M}$ を Riemann 多様体 M から

$\tilde{M}$ への isometric immersion とする。任意の点 p に対して $f_*(T_pM)$ が $T_{f(p)}\tilde{M}$ の invariant, totally complex, totally real subspace の時，それぞれ f を <u>invariant</u>, <u>totally complex</u>, <u>totally real immersion</u> と言う。

invariant immersion 及び totally complex immersion について その基本的な性質を述べておこう。

<u>Proposition 1.6</u> (cf. [1]) $f: M \longrightarrow \tilde{M}$ を invariant immersion とすると，f は totally geodesic である。

実 8 次元以上の Quaternionic Kaehler manifold は Einstein manifold になることが知られている (cf. [2])。従って特にスカラー曲率は一定になる。このことに注意して，

<u>Proposition 1.7</u> $(\tilde{M}, A', \tilde{g})$ を実 8 次元以上の Quaternionic Kaehler manifold でスカラー曲率が零でないとする。$f: M \to \tilde{M}$ を実 4 次元以上の Riemann 多様体 M から $\tilde{M}$ への totally complex immersion とすると，

(1) f^*A' は次が成立する local canonical base $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ をもつ。

(i) $\tilde{\nabla}_X \tilde{I} = 0$, ここで $\tilde{\nabla}$ は $\tilde{M}$ の Riemannian connection から導入された f^*A' の connection, X は M 上の vector field。

(iii) $\tilde{I}T_pM = T_pM$, $\tilde{J}T_pM \perp T_pM$, $\tilde{K}T_pM \perp T_pM$。

(2) Mは$\tilde{I}$から導入された（局所的な）Kaehler structure Iをもつ。normal bundle $N(M)$も$\tilde{I}$から導入された（局所的な）almost complex structure Iをもち normal connection $\nabla^\perp$に関して parallel 即ち，$\nabla^\perp_X I = 0$となる。さらにfの第２基本形式をhとすれば，$h(IX, Y) = h(X, IY) = I\,h(X, Y)$が成立する。

この Proposition によって，totally complex immersionは Kaehler immersion と極めて類似の性質をもつことが分る。実際 $\tilde{M}$が$P_n(\mathbb{H})$の時には $P_{2n+1}(\mathbb{C})$への Kaehler immersion と密接な関係をもっていることが示される。S^3を structure group とする principal fibre bundle である Hopf fibration $S^{4n+3} \longrightarrow P_n(\mathbb{H})$に associate する fibre bundle として，$\pi: P_{2n+1}(\mathbb{C}) \longrightarrow P_n(\mathbb{H})$という Riemannian submersion がある。$P_n(\mathbb{H})$への totally complex immersion はこの Riemannian submersionの total space $P_{2n+1}(\mathbb{C})$への Kaehler immersion に lift される。即ち，

<u>Theorem 1.8</u>　Mを実４次元以上の連結な Riemann 多様体，fをMから$P_n(\mathbb{H})$への totally complex immersion とする。

この時 Mを高々2回リーマン被覆する Kaehler manifold $\hat{M}$と，$\hat{M}$から $P_{2n+1}(\mathbb{C})$ への Kaehler immersion $\hat{f}$ が存在して，次の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd} \hat{M} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\hat{\pi}"'] & P_{2n+1}(\mathbb{C}) \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"'] & P_n(\mathbb{H}) \end{tikzcd}$$

Riemann多様体 $\tilde{M}$の接空間 $T_p\tilde{M}$ の subspace W が $\tilde{R}(W,W)W\subset W$ を満たす時，Wを curvature invariant subspace と呼ぶ。Riemann対称空間の totally geodesic submanifold はその接空間によって完全に特徴付けられる。即ち Riemann対称空間 $\tilde{M}$ の totally geodesic submanifold N の各点 p について，T_pN は $T_p\tilde{M}$ の curvature invariant subspace であり，逆に $T_p\tilde{M}$ の curvature invariant subspace W に対して Wに接する $\tilde{M}$の complete totally geodesic submanifold は唯ひとつ存在する。Quaternionic Kaehler manifold の3種類の部分多様体は，$P_n(\mathbb{H})$ 及びその non-compact dual の totally geodesic submanifold の接空間を model にして考案されたものである。実際，船橋氏による $P_n(\mathbb{H})$ 及

びその non-compact dual の接空間の curvature invariant subspace の分類を見てみよう。

<u>Proposition 1.9</u> ([1]) $\tilde{M}$ を $P_n(\mathbb{H})$ $(n \geqq 2)$ 又はその non-compact dual とする。$T_p\tilde{M}$ の curvature invariant subspace W は次のいずれかである。

$\dim_{\mathbb{R}} W \geqq 4$ の時 (1) invariant (2) totally complex (3) totally real

$\dim_{\mathbb{R}} W = 3$ の時 (1) totally real (2) A_p' の canonical base $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ を固定した時 W のベクトル X が存在して W は $X, \tilde{I}X, \tilde{J}X$ で張られる。

$\dim_{\mathbb{R}} W = 2$ の時 (1) totally complex (2) totally real

特に $\tilde{M} = P_n(\mathbb{H})$ の場合, invariant subspace, totally complex subspace, totally real subspace に接する totally geodesic submanifold はそれぞれ $P_r(\mathbb{H})$, $P_r(\mathbb{C})$, $P_r(\mathbb{R})$ である。

§2. Reduction Theorem.

§1 の準備のもとに 1st Step の Reduction Theorem を述べよう。$f: M \longrightarrow \tilde{M}$ isometric immersion 及び点 $p \in M$ に対して $T_p\tilde{M}$ の subspace $O_p^1(M)$ を $T_pM + N_p^1(M)$ で定義し,

<u>1st osculating space</u> と呼ぶ。Proposition 1.3 で与えられた curvature tensor の形，並びに第2基本形式が平行という条件をフルに使って計算し次の結果を得る。

<u>Proposition 2.1</u> $\tilde{M}$ を $P_n(\mathbb{H})$ $(n \geq 2)$ 又はその non-compact dual とし，$f: M \longrightarrow \tilde{M}$ を連結な Riemann 多様体 M から $\tilde{M}$ への第2基本形式が平行な (not totally geodesic) isometric immersion とすると，T_pM 及び $O_p^1(M)$ は $T_p\tilde{M}$ の中で curvature invariant subspace になり，次のいずれかが起り得る：

(a) $\dim_{\mathbb{R}} M \geq 4$

	T_pM	$O_p^1(M)$
(R-R)	totally real	totally real
(R-C)	〃	totally complex
(C-C)	totally complex	totally complex
(C-H)	〃	invariant

(b) $\dim_{\mathbb{R}} M = 3$

(R-R)	totally real	totally real
(R-C)	〃	totally complex
(E-H)	E	invariant かつ $\dim_{\mathbb{R}} O_p^1(M) = 4$

(c) $\dim_{\mathbb{R}} M = 2$

(R-R)	totally real	totally real

(R-C)	totally real	totally complex
(C-C)	totally complex	totally complex
(C-E)	〃	E
(C-H)	〃	invariant かつ $\dim_{\mathbb{R}} O_p'(M) = 4$

ここで (b) の E は，A_p' の canonical base $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ を1つ固定した時 T_pM のベクトル X が存在して T_pM は X, $\tilde{I}X$, $\tilde{J}X$ で張られることを意味し，(c) の E は A_p' の canonical base $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ がとれて $\tilde{I}\,T_pM = T_pM$, $\tilde{J}T_pM \perp T_pM$, $\tilde{K}T_pM \perp T_pM$ となり，さらに T_pM のベクトル X が存在して $O_p'(M)$ は $X, \tilde{I}X, \tilde{J}X$ で張られることを表わす。

Proposition 1.9，2.1 及び内藤氏が [4] で用いた議論を使って次の定理を得る。

<u>Theorem 2.2</u> (Reduction Theorem) Proposition 2.1 と同じ仮定のもとに，$\tilde{M}$ の complete totally geodesic submanifold N が存在して $f(M) \subset N$ でかつ $p \in M$ に対して $T_pN = O_p'(M)$ が成り立つ。さらに次の場合が起り得る：

(a) $\dim_{\mathbb{R}} M \geq 4$

(R-R) $\tilde{M}$ が $P_n(\mathbb{H})$ 又はその non-compact dual であることに応じて（以下同様） N は $P_\ell(\mathbb{R})$ 又は real hyperbolic space,

(R-C) $N = P_r(\mathbb{C})$ or complex hyperbolic space, f は N への totally real immersion,

(C-C) $N = P_r(\mathbb{C})$ or complex hyperbolic space, f は N への Kaehler immersion,

(C-H) $N = P_r(\mathbb{H})$ or その non-compact dual, f は N への totally complex immersion,

ここで一般に $r \leq n$ になっている。

(b) $\dim_{\mathbb{R}} M = 3$, (R-R), (R-C) の他に次が起り得る。

(E-H) $N = S^4$ or 4-dim real hyperbolic space

(c) $\dim_{\mathbb{R}} M = 2$, (R-R), (R-C), (C-C) の他に次が起り得る。

(C-E) $N = S^3$ or 3-dim real hyperbolic space

(C-H) $N = S^4$ or 4-dim real hyperbolic space

N が実空間形ないしは複素空間形の時にはその平行部分多様体は既に分類されている。従って我々に残されているのは Theorem 2.2 の (C-H) の場合である。この時, M は局所 Riemann 対称空間でさらに Proposition 1.7 より Kaehler である。従って M は局所エルミート対称空間になっている。N が $P_r(\mathbb{H})$ の non-compact dual の時には, Gauss equation を使って M は totally geodesic submanifold であることが示され, 特に (not totally geodesic）第2基本形式が平行な（C-H）の場合は起り得ない。Nが$P_r(\mathbb{H})$の時には，実際（C-H）となるものが存在する。その model の構成即ち最初に述べた 2nd Step に相当するものは次のようにして実行される。Theorem 1.8 によって，Mから$P_{2r+1}(\mathbb{C})$への Kaehler immersion をもつことが分る。エルミート対称空間から複素射影空間への Kaehler immersion については，その構成法がすべて分っている（cf. 中川-高木［5］，高木-竹内［6］）。それらのうち fibration $P_{2r+1}(\mathbb{C}) \to P_r(\mathbb{H})$ と合成させて $P_r(\mathbb{H})$ への totally complex immersion で第2基本形式が平行になるものを探すという手順をとればよい。実際次の結果を得る。

<u>Theorem 2.3</u>　Theorem 2.2 で（C-H）となる場合は，

(1) $N = P_r(\mathbb{H})$ の時，Mはコンパクト型のエルミート対称空間で次のものである：

$$M = SU(6)/S(U(3)\times U(3)),\quad Sp(3)/U(3),\quad SO(12)/U(6),$$
$$E_7/E_6\times T^1,\quad P_1(\mathbb{C})\times P_1(\mathbb{C}),\quad P_1(\mathbb{C})\times P_1(\mathbb{C})\times P_1(\mathbb{C}),\quad P_1(\mathbb{C})\times Q_n\ (n\geqq 3)$$

ここで Q_n は複素2次曲面で対称対としては $SO(n+2)/SO(n)\times SO(2)$ と表示されるものである。

そして f は次の図式が成り立つものとして得られる：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[dr, "f"'] & P_{2r+1}(\mathbb{C}) \arrow[d] \\ & P_r(\mathbb{H}) \end{tikzcd}$$

$\hat{f}$ は Kaehler imbedding

(2) $N = P_r(\mathbb{H})$ の non-compact dual の時 起らない。

文献

[1] S. Funabashi, Totally complex submanifolds of a Quatenionic Kaehler manifold, Kōdai Math. J. 2 (1979) 314-336.

[2] S. Ishihara, Quaternion Kählerian manifolds, J. Diff. Geom, 9 (1974), 483-500.

[3] H. Naitoh, Totally real parallel submanifolds in $P^n(C)$, Tokyo J. Math, 4 (1981), 279-306.

[4] ———, Parallel submanifolds of complex space forms I, II.

[5] H. Nakagawa and R. Takagi, On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space, J. Math. Soc, 28 (1976) 638-667.

[6] R. Takagi and M. Takeuchi, Degree of Symmetric Kählerian submanifolds in a complex projective space, Osaka J. 14 (1977) 501-518

[7] J. Wolf, Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces, J. Math. Mech, 14 (1963) 1033-1047.